2025

1a. edición

JORGE ENRIQUE TRIVIÑO MACÍAS
LUIS EDUARDO TORRES GARCÍA
JUAN ALEXANDER TRIVIÑO QUICENO

Cálculo Integral

Una Introducción

Universidad de la Amazonia

CÁLCULO INTEGRAL: Una Introducción

Esta obra deberá ser citada de la siguiente manera: Triviño, Jorge; Torres, Luis E. y Triviño, Juan. (2025). CÁLCULO INTEGRAL: Una Introducción. Primera Edición. Editorial Universidad de la Amazonia.

70 pp.: 17.5 X 23 cms. Incluye bibliografía. © Editorial - Universidad de la Amazonia

Autor(es): Triviño Macías, Jorge Enrique; Torres García, Luis Eduardo y Triviño Quiceno, Juan Alexander.
ISBN (Digital): 978-628-7693-34-0
Número y año de edición: Primera edición, 2025.
Palabras claves: Función, Tangente, Derivada, Integral, Análisis Matemático, Cálculo.

Diagramación y diseño de cubierta: Miguel Leonardo Sánchez Fajardo.
Impresión y terminación: Editorial Universidad de la Amazonia.
Corrección de estilo: Miguel Leonardo Sánchez Fajardo.
Revisión de la edición: Mauro Ochoa Correa.
Tiraje: Digital.

Universidad de la Amazonia
Vicerrectoría de Investigación e Innovación
Editorial Universidad de la Amazonia
Campus Porvenir: Calle 17 Diagonal 17 con Carrera 3F - Barrio Porvenir
Contacto: vrinvestigaciones@uniamazonia.edu.co

Depósito Legal: Biblioteca Nacional de Colombia.

Impreso y hecho en Colombia / Printed and made in Colombia.

Universidad de la Amazonia
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIONES
EDITORIAL UNIVERSIDAD DE LA AMAZONIA

CÁLCULO INTEGRAL: Una Introducción

Jorge Enrique Triviño Macias

Docente Universidad de la Amazonia, Facultad Ciencias de la Educación, programa de Licenciatura en Matemáticas, Grupo de investigación: Colectivo de Investigadores en Educación Matemática - CIEM. Correo electrónico: jo.trivino@udla.edu.co

Luis Eduardo Torres García

Docente Universidad de la Amazonia, Facultad Ciencias de la Educación, programa de Licenciatura en Matemáticas, Grupo de investigación: Colectivo de Investigadores en Educación Matemática - CIEM. Correo electrónico: luis.torres@udla.edu.co

Juan Alexander Triviño Quiceno

Docente Universidad de la Amazonia, Facultad Ciencias de la Educación, programa de Licenciatura en Matemáticas, Grupo de investigación: Colectivo de Investigadores en Educación Matemática - CIEM. Correo electrónico: j.trivino@udla.edu.co

UNIVERSIDAD DE LA AMAZONIA

Fabio Buritica Bermeo

Rector

Diber Albeiro Vaquiro Plazas

Vicerrector Académico y de Aseguramiento de la Calidad

Liliana Patricia Benítez Barrera

Vicerrectora Administrativa y Financiera

Juan Carlos Suárez Salazar

Vicerrector de Investigación e Innovación

DISEÑO DE PORTADA

Título de la portada: Tiger & Turtle - Magic Mountain

Por: EN PORT AVENTURA

PUBLICADO POR:

Editorial - Universidad de la Amazonia

2025

Diseño y diagramación:

DVS - Publicidad, Florencia - Caquetá

CÁLCULO INTEGRAL
Una Introducción

Jorge Enrique Triviño Macias
Magister en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT; Especialista en Matemáticas Avanzadas de la Universidad Nacional de Colombia; Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Surcolombiana; profesor tiempo completo programa Licenciatura en Matemáticas y Física, Facultad Ciencias de la Educación, Universidad de la Amazonia, Florencia - Caquetá.

Luis Eduardo Torres García
Magister en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT; Especialista en Matemáticas Avanzadas de la Universidad Nacional de Colombia; Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Surcolombiana; profesor tiempo completo programa Licenciatura en Matemáticas y Física, Facultad Ciencias de la Educación, Universidad de la Amazonia, Florencia - Caquetá.

Juan Alexander Triviño Quiceno
Magister en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia; profesor tiempo completo programa Licenciatura en Matemáticas y Física, Facultad Ciencias de la Educación, Universidad de la Amazonia, Florencia - Caquetá.

Universidad de la Amazonia
Facultad Ciencias de la Educación
Programa Licenciatura de Matemáticas y Física
Florencia - Caquetá
2025

INTRODUCCIÓN

Cálculo Integral: Una introducción, se ha escrito como una primera edición, a partir de la experiencia como docentes de los espacios académicos o asignaturas orientadas en el área del cálculo durante los últimos años de labor docente en la Universidad de la Amazonia, Caquetá, Colombia, dando prioridad a dos elementos fundamentales: El primero, poder brindarle a los estudiantes aspectos conceptuales básicos del cálculo integral de manera precisa y comprensible sobre el saber disciplinar del cálculo. El segundo, presentar los conceptos y procedimientos como instrumentos didácticos para favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje del cálculo integral en su formación profesional.

El texto se convierte en un apoyo fundamental en el aprendizaje del cálculo, porque está pensado para ser utilizado en espacios académicos o asignaturas relacionadas con el cálculo relativas a cursos de ingeniería, matemáticas, ciencias básicas, entre otras, de tal forma que le permitan, tanto al estudiante como al docente, comprender y dominar el cálculo integral como herramienta básica para su desempeño profesional, sin abandonar el rigor disciplinar. Se ha procurado en cada una de las exposiciones de los temas, abordar datos históricos que contribuyeron a su conceptualización, acompañado de ejemplos y ejercicios prácticos que permitirán ofrecer métodos para determinar resultados desde la razón de cambio, como análisis del cálculo integral. Desde luego, no se hace ninguna aportación nueva desde el punto de vista disciplinar, pero si desde el aspecto didáctico, con la finalidad de romper con la enseñanza habitual del cálculo y llevar a los estudiantes y docentes a dinámicas nuevas de trabajo.

Cada capítulo finaliza con una propuesta de ejercicios, que ayuda a fortalecer la comprensión de los conceptos abordados, de esta manera se comprueba que realmente se ha comprendido el contenido del capítulo.

Finalmente, se agradece a los estudiantes, porque con su querer saber, han mostrado aquellas partes del cálculo integral, en las que se encuentran mayores dificultades en su proceso de enseñanza y aprendizaje. Se espera que este texto sea de ayuda para docentes y estudiantes que abordan el maravilloso estudio del cálculo integral.

Los autores.

EDICIÓN DEL LIBRO

En la edición, diseño y composición tipográfica de este material se han utilizado los siguientes programas:

1. LaTeX 2_ε Tipografía del texto, ecuaciones, definiciones, ejemplos, teoremas, ejercicios, entre otros.
2. TikZ Edición de figuras y diagramas.
3. Inskcape 0.91 Edición de figuras y diagramas.
4. Geogebra 5 Diseño de figuras, gráficos, diagramas.
5. TeXstudio 2.12.16 Edición del código fuente LaTeX 2_ε.

Además, se utilizaron los paquetes ".sty" del libro de los autores Walter Mora F., Alexánder Borbón A., que se llama "EDICIÓN DE TEXTOS CIENTÍFICOS LATEX. Composición, Diseño Editorial, Gráficos, Inkscape, Tikz y Presentaciones Beamer. 3ra edición. 2010".

Índice general

1 LA INTEGRAL

1.1 INTRODUCCIÓN

El cálculo integral (término acuñado en 1700 por Jacob Bernoulli) y que en el lenguaje antiguo se conoce como “el problemas de las cuadraturas” es, en principio, un método para encontrar el área encerrada por una curva. Antes de la invención del Cálculo, solo era posible encontrar el área de ciertas figuras como polígonos, círculos, sectores de círculos, etc. En la antigua Grecia, Eudoxio y Arquimedes desarrollaron formas ingeniosas para calcular áreas de varias figuras (método de “exhaución” del área), incluyendo el área de un círculo y el de un segmento de parábola que son, básicamente, uno y el mismo método utilizado actualmente para definir el concepto de Integral.

Sin embargo, calcular áreas mediante “exhaución”, a la manera de Arquimedes, requería un estudio muy detallado del comportamiento de la figura escogida y, en ocasiones, de métodos aún más ingeniosos y difíciles.

Después de los antiguos griegos, no hubo ningún progreso importante en el problema de las cuadraturas hasta el sigo XVI. Avances como los de Johanes Kepler (1571 - 1630), Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), Gilles de Roberval (1602 - 1675) y Pierre de Fermat (1601 - 1665) apuntalaron el trabajo de Newton y Leibniz en el siglo XVII. Por ejemplo Cavalieri (inspirado en los cálculos de áreas de sectores de elipses que había llevado a cabo Kepler en sus estudios de movimientos planetarios) pensaba que cualquier área estaba formada por un número finito de líneas que “sumadas” deberían dar por resultado el área buscada. Roberval, por su parte, no pensaba en sumas infinitas de segmentos de rectas, sino en sumas finitas de áreas de rectángulos “infinitamente delgados”. También, Fermat siguió este camino, generalizando de una manera un poco más rigurosa (aunque sin pruebas) muchos de los resultados sobre figuras particulares que habían ya alcanzado sus predecesores.

Los matemáticos del siglo XVIII, por lo tanto, recibieron complacidos el hecho de que la invención del problema de la tangente (derivada) resolviera el de cuadraturas según el teorema de Newton y Leibniz (o teorema fundamental del Cálculo), y se hizo claro entonces que existía un método general que se ajustaba bien a un número infinito de figuras distintas. Lo mismo también era cierto para el Cálculo de volúmenes, superficies, longitudes de curvas, etc.

Después de la creación del Cálculo Diferencial e Integral por parte de Newton y Leibniz, siguió un periodo de rápidos desarrollos (particularmente en aplicaciones) en las más diversas ramas de la tecnología y de las ciencias naturales. El Cálculo refleja propiedades muy profundas del mundo material, y, por tanto, responde a muchas preguntas prácticas tales como el movimiento mecánico de cuerpos sólidos, el movimiento de líquidos y gases en sus partículas esenciales, las leyes de flujo, la conducción del calor y la electricidad, la trayectoria de las reacciones químicas, etc. Debe aclararse, sin embargo, que los conceptos de derivada e integral, como fueron presentados por Newton y Leibniz y sus contemporáneos, no se separaban de sus orígenes físicos y geométricos de velocidad y área. De hecho, fueron mitad matemáticos y mitad físicos. Las condiciones de la época no eran propicias para producir una definición puramente formal de estos conceptos: era común que el investigador siguiera el camino matemáticamente correcto si permanecía en contacto directo con aspectos prácticos de su problema.

La evolución de los conceptos del análisis matemático (derivada, integral, etc.) continuó después de Newton y Leibniz. Un punto importante en este desarrollo se dió a comienzos del siglo XIX con los trabajos de Cauchy y Weierstrass, pues fueron los primeros en dar definiciones formales del concepto de límite y de usar éste como base para sus definiciones de continuidad, derivada o integral.

1.2 FUNCIÓN PRIMITIVA O ANTI DERIVADA

Un tipo muy importante de problema es cuando conocemos la derivada de una función (una tasa de variación instantánea o la pendiente a su gráfica) y queremos encontrar la función. Por ejemplo, conocemos la velocidad y queremos hallar el espacio recorrido.

Este tipo de situaciones, dada la función derivada encontrar la función original no es exclusiva de la mecánica, surgen en otras ramas de la Física, en otras ciencias y por supuesto en la propia Matemática. La gran diversidad de problemas que pueden resolverse con la ayuda del cálculo de las “antiderivadas” o “primitivas”, motiva a que se estudie de forma sistemática su cálculo.

Es conveniente advertir al lector que el problema de calcular primitivas es más complejo que el problema inverso, la de calcular derivadas. Cuando estudiamos las reglas de derivación vimos que como resultado de la derivación de funciones elementales, obtuvimos nuevamente funciones elementales, y esta operación siempre fue factible, usando las reglas de derivación de las operaciones aritméticas con funciones, de la compuesta de dos funciones y las derivadas de funciones fundamentales básicas. Sin embargo, hay funciones elementales que no son derivadas de ninguna función elemental y, por tanto, el problema de hallar la primitiva lleva a la necesidad de introducir nuevas funciones no considerada dentro del rango de las funciones elementales.

Además, incluso cuando la primitiva de una función es una función elemental, no siempre es simple su cálculo; por ello, necesitamos de la elaboración de métodos de integración y de clases de funciones que se integran por un mismo método.

El termino antiderivación fue introducido por Daniel Amurray en 1908 y por George D. Birkhoff en 1906. El término primitiva o integral indefinida fue introducido por Lacroix (1797-1802).

En el capitulo (2) estudiamos el problema, dada la función F obtener la función $F' = f$. Ahora vamos a tratar el problema inverso, dada f como hallara F. Es decir dada f hallará F tal que $F' = f$.

Definición 1.1

Si F es una función tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x en un intervalo (a,b), entonces F se llama una primitiva (o antiderivada) de f en (a,b). Si x es un punto frontera en (a,b), F' solo necesita tener derivada unilateral.

Ejemplo 1.1

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es una primitiva de $f(x) = x^2$, pues $F'(x) = x^2 = f(x)$.

Ejemplo 1.2

$F(x) = x^3$ es una primitiva de $f(x) = 3x^2$, pues $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Teorema 1.1

Si f es una función derivable en un intervalo (a,b) y si $f'(x) = 0$ para toda x en (a,b), entonces f es constante en (a,b).

Demostración: Sea x_1 un punto fijo en (a,b) y x otro punto cualquiera en (a,b). Entonces, por el teorema del valor medio existe c en (a,b) tal que si $x_1 < c < x$, entonces

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = 0.$$

Por tanto $f(x) = f(x_1)$. Como esto es cierto para toda x en (a,b), la función f es constante en (a,b).

Teorema 1.2

Si F y G son antiderivadas de la misma función f en un intervalo (a,b). Entonces existe una constante c tal que

$$F(x) = G(x) + c$$

Demostración: Por hipótesis, $F'(x) = G'(x) = f(x)$ para todo x en (a,b).

Sea $H(x) = F(x) - G(x)$, entonces $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$, para todo x en (a,b). Por el teorema (1.1), existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $H(x) = c$ para toda x en (a,b), es decir, que $F(x) = G(x) + c$, para todo x en (a,b).

Observación:

a) La parte geométrica del teorema la ilustra la figura (1.1).

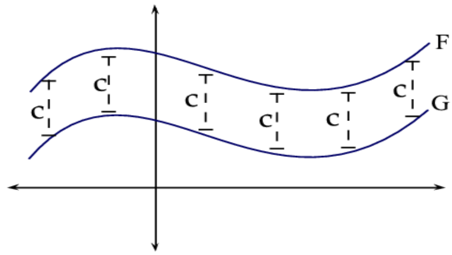


Figura 1.1

Ejemplo 1.3

Dadas las funciones f y su respectiva antiderivada $F+c$, comprobar que $F' = f$.

1. Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $F(x)+c = -\dfrac{1}{x}+c$ entonces
$$F'(x) = \frac{1}{x^2} = f(x).$$

2. Si $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$ y $F(x)+c = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$, entonces
$$F'(x) = x^{\frac{1}{2}} = f(x).$$

3. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ con $x > 0$ y $F(x)+c = \ln x + 1$, entonces
$$F'(x) = \frac{1}{x} = f(x).$$

4. Si $f(t) = e^t$ y $F(t)+c = e^t+c$, entonces
$$F'(t) = e^t = f(t).$$

5. Si $f(\theta) = 2\cos(\theta)$ y $F(\theta)+c = 2\operatorname{sen}\theta + c$, entonces
$$F'(\theta) = 2\cos\theta = f(\theta).$$

Definición 1.2

Si F es una función primitiva (o antiderivada) de f, la familia de primitivas $F+c$ se llama la integral indefinida de la función f y se designa mediante el símbolo $\displaystyle\int f(x)\,dx$ y se lee “integral indefinida de f respecto a de x” donde f se llama la función integrando y x es la variable con respecto a la cual se considera la integral de f. Lo anterior lo podemos generalizar de la siguiente manera:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \text{si y solo si} \quad F'(x) = f(x)$$

Ejemplo 1.4

De acuerdo con lo anterior podemos construir la siguiente tabla

Función		Anti-derivada		Verificación
$f(x)$	$\ldots$	$\int f(x)\,dx = F(x)+c$	$\ldots$	$F'(x) = f(x)$
$3x^2$	$\ldots$	$\int 3x^2\,dx = x^3+c$	$\ldots$	$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$
x^2	$\ldots$	$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+c$	$\ldots$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\right] = x^2$
$\frac{1}{x}$	$\ldots$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\|+c$	$\ldots$	$\frac{d}{dx}[\ln\|x\|] = \frac{1}{x}$
e^t	$\ldots$	$\int e^t\,dt = e^t+c$	$\ldots$	$\frac{d}{dx}[e^t] = e^t$
$2\cos\theta$	$\ldots$	$\int 2\cos\theta\,d\theta = 2\operatorname{sen}\theta+c$	$\ldots$	$\frac{d}{d\theta}[2\operatorname{sen}\theta] = 2\cos\theta$

Observaciones:

(a) Una interpretación geométrica de F' es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $(x, F(x))$.

(b) ¿Cómo se interpretaría geométricamente la integral indefinida de f?

(c) Justifique que:

- $\int F'(x)\,d(x) = F(x) + c$.
- $\int k\,dx = kx + c$.
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$.
- $\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt = \int f(\theta)\,d\theta = \int f(y)\,dy = \ldots$.
- $\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c, \quad \text{si} \quad m \neq 1.$

(d) Los procedimientos mediante los cuales se obtiene o calculan las funciones primitivas de una función, se denominan integración o cálculo de integrales indefinidas.

2 FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE INTEGRACIÓN

Las fórmulas de integración que se dan a continuación se deducen inmediatamente, a partir de la definición (1.1) o mediante derivación directa del miembro de la derecha de la igualdad.

Fórmulas de integración

1. $\displaystyle\int k\,dx = kx + c.$

2. $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}\,x^{r+1} + c,\ r \neq -1,\ r \in \mathbb{R}.$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.\quad \ln|x| = \ln\sqrt{x^2} = \frac{1}{2}\ln x^2$, pues
$$(\ln|x|)' = \left(\frac{1}{2}\,\ln x^2\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \frac{1}{x}$$

4. $\displaystyle\int e^t\,dt = e^t + c.$

5. $\displaystyle\int a^t\,dt = \frac{1}{\ln a}\,a^t + c,\ a > 0,\ a \neq 1.$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\theta)\,d\theta = -\cos\theta + c.$

7. $\displaystyle\int \cos(\theta)\,d\theta = \operatorname{sen}\theta + c.$

8. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c.$

9. $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + c.$

10. $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c.$

11. $\displaystyle\int \cot x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c.$

12. $\displaystyle\int \sec x \, \tan x \, dx = \sec x + c.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c.$

14. $\displaystyle\int \frac{ds}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + c.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c.$

A continuación, se demuestran las fórmulas 14, 15 y 16 respectivamente.

14) $\displaystyle\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = [\, \ln|1+x| - \ln|1-x|\,].$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right] &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\ln|1+x| - \ln|1-x|] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right] = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

15) $\displaystyle\arctan x + c = \frac{d}{dx}[\arctan x + c] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1.$

16) $\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c.$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c\right] &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}.
\end{aligned}$$

2.1 ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Propiedades:

1. $\displaystyle\int f'(x)\, dx = f(x) + c.$

2. $\displaystyle Dx\left[\int f(x)\, dx\right] = f(x).$

3. $\displaystyle\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx + c$, k constante real.

4. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x).$

Demostración: La combinación de las propiedades 3, 4 y las fórmulas fundamentales de integración 2, posibilitan el cálculo de las integrales indefinidas de un número ilimitado de funciones.

Ejemplo 2.1

Calcular $\int (2x^2+3x-1)\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int (2x^2+3x-1)\,dx &= \int 2x^2\,dx + \int 3x\,dx - \int 1\,dx \\
&= 2\int x^2\,dx + 3\int x\,dx - \int 1\,dx \\
&= 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + 3\left(\frac{x^2}{2}\right) - x + c \\
&= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + c.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2

Si $\int f(x)\,dx = F(x)+c$, y $\int \frac{d}{dx} = \ln|x|+c$ entonces:

(a) $\int f(mx)\,dx = \frac{1}{m}F(mx)+c$, $\int \frac{dx}{3x} = \frac{1}{3}\ln|x|+c$

(b) $\int f(mx+b)\,dx = \frac{1}{m}F(mx+b)+c$, $\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\ln|3x+2|+c$.

Ejemplo 2.3

- $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}+c$, se utilizó (a).
- $\int \operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ se utilizó (b).
- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$.

2.2 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

El método de integración por sustitución se puede considerar como una aplicación de la regla de la cadena:

$$Dx[F(g(x))] = F'[g(x)]\,g'(x),$$

luego

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F[g(x)] + c.$$

Ahora, si

$$u = g(x), \quad du = g'(x)\, dx$$

"diferencial de u", entonces

$$\int F'(u)\, du = F(u) + c,$$

y

$$\int f(u)\, du = F(u) + c.$$

Luego,

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$$

Observación:

El éxito de la aplicación de este método, depende directamente de la experiencia que tenga el estudiante para reconocer integrándoos de la forma $f(g(x))\, g'(x)$, conformado por una función interior g y su correspondiente derivada g' (a la que le puede faltar o no un coeficiente constante).

Ejemplo 2.4

Calcular las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}$.

   Solución: Utilizando el método de *integración por sustitución*, tenemos que:

   $$\begin{bmatrix} u = 3x-1 \\ du = 3\, dx \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3}\, u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\, [3x-1]^{\frac{1}{2}} + c.$$

   Comprobación:

   $$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}\,(3x-1)^{\frac{1}{2}} + c\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{d}{dx}[3x-1]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(3x-1)^{-\frac{1}{2}}(3) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}.$$

   Ahora, resolverlo si $u = \sqrt{3x-1}$.

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, \cos x\, dx$.

   Solución: Utilizando el método de *integración por sustitución*, tenemos que:

   $$\begin{bmatrix} u = \operatorname{sen} x \\ du = \cos x\, dx \end{bmatrix} = \int u\, du = \frac{u^2}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c$$

   Comprobación:

   $$Dx\left[\frac{1}{2}\, \operatorname{sen}^2 x\right] = \frac{1}{2}\, [2\operatorname{sen} x]\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$$

3. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\, dx.$

Solución: Utilizando el método de *integración por sustitución*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = x^3 \\ du = 3x^2\, dx \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int e^u\, du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

La comprobación queda como ejercicio.

4. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx.$

Solución: Utilizando el método de *integración por sustitución*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

La comprobación queda como ejercicio.

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx.$

Solución: Utilizando el método de *integración por sustitución*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = x^2+1 \\ du = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = u^{\frac{1}{2}} + c = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c$$

La comprobación queda como ejercicio.

6. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta.$

Solución: Utilizando el método de *integración por sustitución*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = \sqrt{\theta} = \theta^{\frac{1}{2}} \\ du = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\theta}}\, d\theta \end{bmatrix} = 2\int \sec^2 u\, du = 2\tan u + c = 2\tan(\sqrt{\theta}) + c$$

La comprobación queda como ejercicio.

7. $\displaystyle\int t\sqrt{t-1}\, dt.$

Solución: Utilizando el método de *integración por sustitución*, tenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u = t-1 \\ du = dt \\ t = u+1 \end{bmatrix} &= \int (u+1)u^{\frac{1}{2}}\, du = \int u^{\frac{3}{2}}\, du + \int u^{\frac{1}{2}}\, du \\ &= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}(t-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}} + c \\ &= 2(t-1)\left(\frac{1}{5}t + \frac{2}{15}\right)\sqrt{t-1} + c. \end{aligned}$$

2.3 INTEGRACIÓN POR PARTES

Recordemos que:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

integrando a ambos lados obtenemos que:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du \quad \Leftrightarrow \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Observación: El método de integración por partes es tal vez el más utilizado. En particular se utiliza para calcular integrales que contienen en el integrando funciones logarítmicas, trigonométricas inversas y funciones del tipo $x^k \operatorname{sen}(ax)$, $x^k \cos(ax)$, $x^k e^{ax}$, $x^k \ln x$, $\ldots$, etc.

Ejemplo 2.5

Calcular las integrales dadas:

1. $\displaystyle\int xe^x\,dx.$

   Solución: Utilizando el método de *integración por partes*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = x, \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

2. $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx.$

   Solución: Utilizando el método de *integración por partes*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = x^2, \\ du = 2xdx \\ dv = \cos xdx \\ v = \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\,dx + c.$$

   Luego, utilizando nuevamente el mismo método tenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u = x, \\ du = dx \\ dv = \operatorname{sen} dx \\ v = -\cos x \end{bmatrix} &= x^2 \operatorname{sen} x - 2\left[-x\cos x + \int \cos x\,dx\right] + c \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx + c \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + c. \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 \theta\,d\theta.$

Solución: Utilizando el método de *integración por partes*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = \operatorname{sen}\theta, \\ du = \cos\theta\, d\theta \\ dv = \operatorname{sen}\theta d\theta \\ v = -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{aligned} &= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \int \cos^2\theta\, d\theta + c \\ &= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \int [1-\operatorname{sen}^2\theta]\, d\theta + c \\ &= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \theta - \int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta + c, \end{aligned}$$

luego

$$\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta + c.$$

Otra forma de resolverla sería de la siguiente manera:

$$\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \int \frac{(1-\cos 2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta + c.$$

Ahora, haciendo el cambio de sustitución tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = 2\theta \\ du = 2d\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + c = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta) + c$$

4. $\displaystyle\int \arctan(x)\, dx.$

Solución: Utilizando el método de *integración por partes*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = \arctan x \\ du = \frac{dx}{x^2+1} \\ dv = dx \\ v = x \end{bmatrix} = x\arctan x - \int \frac{xdx}{x^2+1} + c.$$

Ahora, haciendo el cambio de sustitución tenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u = x^2+1 \\ du = 2x\, dx \end{bmatrix} + c &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|u| + c = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \ln x\, dx.$

Solución: Utilizando el método de *integración por partes*, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int dx + c = x\ln x - x + c$$

6. $\displaystyle\int x\ln x\, dx.$ (Queda como ejercicio).

2.4 FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

A continuación se presentan las más importantes “fórmulas de reducción” con el fin de complementar su archivo personal de fórmulas y tablas de integración.

Fórmulas de reducción (1)

1.

$$\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}\right],$$
$$m \neq -1.$$

2.

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{(2m-2)(x^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{m-1}}\right],$$
$$m \neq 1.$$

3.

$$\int (a^2 \pm x^2)^m \, dx = \frac{x(a^2 \pm x^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1}\int (a^2 \pm x^2)^{m-1}\, dx, \quad m \neq -\frac{1}{2}.$$

4.

$$\int (x^2 - a^2)^m \, dx = \frac{x(x^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1}\int (x^2 - a2)^{m-1}\, dx, \quad m \neq -\frac{1}{2}.$$

Fórmulas de reducción (2)

¿Que fórmulas se obtienen si en (1) y (2) hacemos $m = 1$ y en (3) y (4) hacemos $m = -\frac{1}{2}$?

1. $\displaystyle\int x^m e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}x^m e^{ax} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}\, dx.$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x\, dx.$

3. $\displaystyle\int \cos^m x\, dx = \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x\, dx.$

4. $\displaystyle\int x^m \operatorname{sen}(bx)\, dx = -\frac{x^m}{b}\cos(bx) + \frac{m}{b}\int x^{m-1}\cos(bx)\, dx.$

5. $\displaystyle\int x^m \cos(bx)\, dx = \frac{x^m}{b}\operatorname{sen}(bx) - \frac{m}{b}\int x^{m-1}\operatorname{sen}(bx)\, dx.$

2.5 OTROS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

2.5.1 INTEGRALES QUE CONTIENEN UN TRINOMIO CUADRADO

Son de la forma:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\int \frac{(mx+d)dx}{ax^2+bx+c} \qquad \int \frac{(mx+d)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Todo trinomio se puede transformar así:

$$ax^2+bx+c = a\left[(x+h)^2 \pm k^2\right] = a\left[t^2 \pm k^2\right]$$

donde $t = x+h$ entonces $dt = dx$.

Las integrales dadas anteriormente, y en general las integrales que contienen trinomios cuadráticos, se pueden expresar de una de las formas siguientes, las cuales se dan con su respectiva solución para que sean usadas como fórmulas de integración. La mayoría de ellas son conocidas, pues han sido dadas anteriormente en las tablas de integrales.

Las que no son conocidas se pueden obtener o deducir mediante la aplicación apropiada de los métodos de integración y/o por partes.

En cualquier caso, se pueden comprobar derivando los dos miembros de la igualdad.

(a) $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right)+c.$

(b) $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2-k^2} = \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+c.$

(c) $\displaystyle\int \frac{dt}{k^2+t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-k^2}$ y se aplica (2.5.1).

(d) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2\pm k^2}\right|+c.$

(e) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{t}{k}\right)+c.$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{t^2\pm k^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2\pm k^2} \pm \frac{1}{2}k^2\ln\left(t+\sqrt{t^2\pm k^2}\right)+c.$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{k^2-t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{k^2-t^2} + \frac{1}{2}k^2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{t}{k}\right)+c.$

Ejemplo 2.6

Calcular cada una de las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-4x-16}.$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2x^2-4x-16} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x-8} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2-3^2} \\
&= \begin{bmatrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-3^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right] + c \\
&= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right| + c.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+2x+5} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} \\
&= \begin{bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+5}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+5} &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+2}{x^2+2x+5}dx + c \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} + c \\
&= \begin{bmatrix} u = x^2+2x+5 \\ du = (2x+2)dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \sqrt{2-4x-x^2}\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2-4x-x^2}\,dx &= \int \sqrt{2-(x^2+4x+4-4)}\,dx + c \\
&= \int \sqrt{6-(x+2)^2}\,dx + c = \begin{bmatrix} t = x+2 \\ du = dx \end{bmatrix} \\
&= \int \sqrt{6+t^2}\,dt + c \\
&= \frac{1}{2}t\sqrt{6-t^2} + 3\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}(x+2) + 3\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + c.
\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

Solución:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{3x+1+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \\
&= \begin{bmatrix} u = x^2+x+1 \\ du = (2x+1)dx \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} \\
&= \frac{3}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + c \\
&= \begin{bmatrix} t = x+\frac{1}{2} \\ dt = dx \end{bmatrix} = 2u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}} + c \\
&= 3(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right| + c \\
&= 3\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + c.
\end{aligned}
$$

2.6 INTEGRALES QUE CONTIENEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A continuación se dan algunas identidades que sirven de herramienta para resolver algunas integrales.

Identidades para resolver integrales

(a) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$

(b) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$

(c) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$

(d) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}.$

(e) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}.$

(f) $\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx) = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$

(g) $\cos(ax)\cos(bx) = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$

(h) $\operatorname{sen}(ax)\cos(bx) = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b)x + \operatorname{sen}(a-b)x].$

Ejemplo 2.7

Evaluar las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int \tan^2\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta + c = \tan\theta - \theta + c.$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta + c.$

3.
$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(3x)\,\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx + c \\
&= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + c.
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \cos(3x)\cos x\,dx$, queda como ejercicio.

5.
$$\begin{aligned}
\int \cos^3\theta\,d\theta &= \int \cos^2\theta\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int (1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta = \begin{bmatrix} u = \operatorname{sen}\theta \\ du = \cos\theta d\theta \end{bmatrix} \\
&= \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} + c \\
&= \operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} + c.
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \tan^4\theta\,d\theta$, queda como ejercicio, utilizar la identidad (2.6).

7.
$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x\,\cos^2 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x\,\operatorname{sen} x\,\cos^2 x\,dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = \begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = -\operatorname{sen} x\,dx \end{bmatrix} \\
&= \int (1-u^2)u^2\,du + c = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c \\
&= \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.
\end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx$, queda como ejercicio.

2.7 SUSTITUCIÓN PARA RACIONALIZAR

Para integrándoos de la forma $\sqrt[n]{ax+b}$, la sustitución es $u=\sqrt[n]{ax+b}$ o, $u^n=ax+b$.

Ejemplo 2.8

Evaluar la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} &= \begin{bmatrix} u^2=x \\ 2udu=dx \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{2udu}{u^2-u} \\
&= 2\int \frac{u\,du}{u-1} \\
&= 2\ln|u-1|+c \\
&= 2\ln|\sqrt{x}-1| \\
&= c.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.9

Evaluar la integral $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx &= \begin{bmatrix} u=\sqrt[3]{x-4} \\ u^3 \\ =x-4 \\ 3u^2du=dx \end{bmatrix} \\
&= \int (u^3+4)u\cdot 3u^2\,du \\
&= 3\int (u^6+4u^3)\,du+c \\
&= \frac{3u^7}{7}+3u^4+c \\
&= \frac{3}{7}\left[(x-4)^{\frac{1}{3}}\right]^7+3\left[(x-4)^{\frac{1}{3}}\right]^4+c \\
&= \frac{3}{7}(x-4)^{\frac{7}{3}}+3(x-4)^{\frac{4}{3}}+c.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.10

Evaluar la integral $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx &= \int x\left[(x+1)^2\right]^{\frac{1}{5}}\,dx = \int x\left[(x+1)^{\frac{1}{5}}\right]^2\,dx \\
&= \begin{bmatrix} u=(x+1)^{\frac{1}{5}} \\ u^5=x+1 \\ 5u^4du=dx \end{bmatrix} = \int (u^5-1)u^2 5u^4\,du \\
&= 5\int \left(u^{11}-u^6\right)\,du = \frac{5}{12}u^{12}-\frac{5}{7}u^7+c \\
&= \frac{5}{12}\left[(x+1)^{\frac{1}{5}}\right]^{12}-\frac{5}{7}\left[(x+1)^{\frac{1}{5}}\right]^7+c \\
&= \frac{5}{12}\left[(x+1)^{12}\right]^{\frac{1}{5}}-\frac{5}{7}\left[(x+1)^7\right]^{\frac{1}{5}}+c \\
&= \frac{5}{12}\sqrt[5]{(x+1)^{12}}-\frac{5}{7}\sqrt[5]{(x+1)^7}+c \\
&= \frac{5}{12}(x+1)^2\sqrt[5]{(x+1)^2}-\frac{5}{7}(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2}+c \\
&= 5(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2}\left[\frac{(x+1)}{12}-\frac{1}{7}\right]+c \\
&= 5(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2}\left[\frac{7x+7-12}{84}\right]+c \\
&= \frac{5}{84}(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2}(7x-5)+c.
\end{aligned}$$

2.8 INTEGRALES DE LA FORMA

$$\sqrt{a^2-x^2},\qquad \sqrt{a^2+x^2},\qquad \sqrt{x^2-a^2}$$

Introduciremos estos tipos de integral mediante algunos ejemplos:

1. Para la integral $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ construimos el triángulo

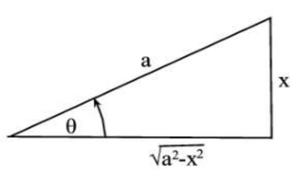


Figura 2.1

donde $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{x}{a}$, $x=a\operatorname{sen}\theta$, $dx=a\cos\theta\,d\theta$ y $\theta=\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, donde $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$. Reemplazando lo anterior con la integral dada obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} a \cos\theta \, d\theta &= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \int [1 + \cos 2\theta] \, d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right] \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(2 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right)\right) \right] + c \\
&= \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen}(2\theta) \\
&= \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + c \\
&= \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c.
\end{aligned}$$

2. Para esta integral $\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$ construimos el triángulo

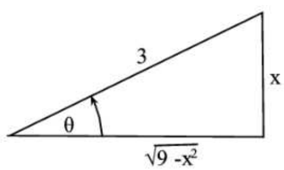


Figura 2.2

Donde $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{3}$, $x = 3 \operatorname{sen}\theta$, y $dx = 3 \cos\theta \, d\theta$. Reemplazando lo anterior en la integral dada obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9 - x^2} \, dx &= \int \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot 3 \cos\theta \, d\theta = 9 \int \cos^2 \theta \, d\theta \\
&= \frac{9}{2} \int (1 + \cos^2 \theta) \, d\theta = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4} \operatorname{sen}^2 \theta + c \\
&= \frac{9}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + c \\
&= \frac{9}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2}.
\end{aligned}$$

3. Para esta integral $\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$ construimos el triángulo

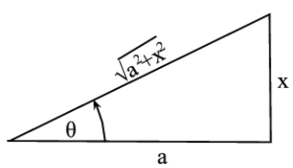


Figura 2.3

Donde $\tan\theta = \dfrac{x}{a}$, $x = a \tan\theta$ y $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$.

Reemplazando lo anterior en la integral dada obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx &= \int \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta \\
&= a^2\int \sqrt{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta \\
&= a^2\int \sec^3\theta\,d\theta = a^2\int \sec\theta\cdot\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \begin{bmatrix} u=\sec\theta \\ du=\sec\theta\tan\theta d\theta \\ dv=\sec^2\theta d\theta \\ v=\tan\theta \end{bmatrix} = a^2\sec\theta\tan\theta - a^2\int \sec\theta\tan^2\theta\,d\theta \\
&= a^2\sec\theta\tan\theta - a^2\int \sec(\sec^2\theta-1)\,d\theta \\
&= a^2\sec\theta\tan\theta - a^2\int \sec^3\theta\,d\theta + a^2\int \sec\theta\,d\theta 2a^2\int \sec^3\;d\theta \\
&= a^2\sec\theta\tan\theta + a^2\int \sec\theta d\theta\int \sec^3 d\theta \\
&= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\cdot\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right| + c \\
&= \frac{1}{2a^2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right| + c.
\end{aligned}$$

4. Para integral $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ construimos el triángulo donde

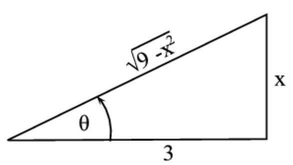


Figura 2.4

Donde $\tan\theta = \frac{x}{3}$, $x = 3\tan\theta$, $dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$, $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{9+x^2}}$ y $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$.

Reemplazando lo anterior en la integral dada obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta \\
&= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{3}\right| + c.
\end{aligned}$$

5. Para esta integral $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ construimos el triángulo rectángulo

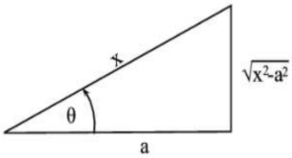


Figura 2.5

Donde $\sec\theta = \frac{x}{a}$, $x = a\sec\theta$, y $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$. Reemplazando en la integral dada obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx &= \int \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}\cdot a\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= a^2\int \tan^2\theta\sec\theta\,d\theta + c \\
&= a^2\int \sec\theta(\sec^2\theta-1)\,d\theta + c \\
&= a^2\int \sec^3\theta\,d\theta - a^2\int \sec\theta\,d\theta + c \\
&= \frac{a^2}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{a^2}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| - a^2\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c \\
&= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c.
\end{aligned}$$

6. Para esta integral $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$ construimos el triángulo

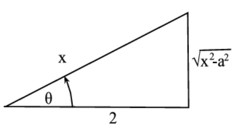


Figura 2.6

Donde $\sec\theta = \frac{x}{2}$, $x = 2\sec\theta$ y $dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$. Reemplazando en la integral dada obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-2^2}}{x}\,dx &= \int \sqrt{4\sec^2\theta-4} = 2\int \sqrt{\sec^2\theta-1}\cdot\tan\theta\,d\theta \\
&= \int \tan^2\theta\,d\theta = 2\int (\sec^2\theta-1)\,d\theta \\
&= 2\int \sec^2\theta\,d\theta - 2\int d\theta \\
&= 2\tan\theta - 2\theta = 2(\tan\theta-1).
\end{aligned}$$

2.9 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Son funciones de la forma

$$f(x) = \frac{2}{(x+3)^3}, \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}$$

se llaman funciones racionales propias. La función

$$h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x} = x^2-3+\frac{14x+1}{x^3+5x}$$

consta de un polinomio y una función racional.

2.10 DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

2.10.1 FACTORES LINEALES SIMPLES

1. Para

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{(3x-1)}{(x-3)(x+2)}\,dx = \int \frac{A}{x-3}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx,$$

debemos obtener constantes A y B tales que

$$\frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Multiplicando a ambos miembros de la ecuación por $(x-3)$, tenemos que

$$\frac{3x-1}{x+2} = A + \frac{B(x-3)}{x+2}.$$

Si $x=3$, obtenemos que $A = \frac{8}{5}$. De forma similar, multiplicando a ambos lados de la ecuación por $(x+2)$, se tiene que

$$\frac{3x-1}{x-3} = \frac{A(x+2)}{x-3} + B.$$

Si $x=-2$, obtenemos que $B = \frac{7}{5}$. Luego,

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{8}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x+2} + c = \frac{8}{5}\ln|x-3| + \frac{7}{5}\ln|x+2| + c.$$

2. $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx = \int \frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)}\,dx.$

$$\int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x+1}\,dx + \int \frac{C}{x-3}\,dx$$

Debemos hallar las constantes A, B y C tales que

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}.$$

Ahora, si $x = 0$, entonces $A = -1$. De forma similar, multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(x+1)$ obtenemos que

$$\frac{5x+3}{x-3} = \frac{A(x+1)}{x} + B + \frac{C}{x-3}(x+1).$$

Si $x = -1$, entonces $B = \frac{1}{2}$. Finalmente, multiplicando a ambos lados de la ecuación por $(x-3)$ tenemos que

$$\frac{5x+3}{x(x+1)} = \frac{A(x-3)}{x} + \frac{B(x-3)}{x+1} + c.$$

Si $x = 3$, obtenemos que $C = \frac{3}{2}$. Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx &= -\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-3} + c \\
&= -\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + c
\end{aligned}$$

2.10.2 FACTORES LINEALES REPETIDOS

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.11

$$\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{A}{x-3}\,dx + \int \frac{B}{(x-3)^2}\,dx.$$

Solución: Debemos obtener constantes A y B tales que

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} \quad \text{o} \quad x = A(x-3) + B.$$

Si $x = 3$, $B = 3$ y si $x = 0$, $A = 1$. Luego,

$$\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-3} + 3\int \frac{dx}{(x-3)^2} = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + c$$

2.10.3 FACTORES LINEALES DISTINTOS Y ALGUNOS REPETIDOS

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}\,dx = \int \frac{A}{x+3}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx + \int \frac{C}{(x-1)^2}\,dx$$

Debemos hallar las constantes A, B y C tales que

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \text{o}$$

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + c(x+3).$$

Ahora, si $x=1$ entonces $C=2$. Si $x=-3$, entonces $A=4$ y si $x=0$ entonces $B=-1$. Luego

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}\,dx &= 4\int \frac{dx}{x+3}-\int \frac{dx}{x-1}+2\int \frac{dx}{(x-1)^2+c}\\ &= 4\ln|x+3|-\ln|x-1|+\frac{2}{(x-1)}+c.\end{aligned}$$

La regla general para descomponer factores lineales repetidos en el denominador es: Por cada factor $(ax+b)^k$ en el denominador, existen k términos en la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

2.10.4 FACTORES CUADRÁTICOS

Un solo factor cuadrático:

$$\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(s^2+1)}\,dx=\int \frac{A}{4x+1}\,dx+\int \frac{Bx+C}{x^2+1}\,dx.$$

Debemos obtener constantes A, B y C tales que

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{4x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $(4x+1)$ obtenemos que

$$\frac{6x^2-3x+1}{x^2+1}=A+\frac{(Bx+C)+(4x+1)}{(x^2+1)}$$

De esta manera, $x=-\dfrac{1}{4}$, entonces $A=2$. Igualmente, multiplicando la ecuación por (x^2+1) obtenemos que

$$\frac{6x^2-3x+1}{4x+1}=\frac{A}{4x+1}(x^2+1)+(Bx+C).$$

Si $x=0$, entonces $C=-1$ y si $x=1$, entonces $B=1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(s^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{4\,dx}{4x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{x^2+1}-\int \frac{dx}{x^2+1}+c\\ &= \frac{1}{2}\ln|4x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\arctan x+c.\end{aligned}$$

2.11 FACTOR CUADRÁTICO REPETIDO

$$\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx=\int \frac{A}{x+3}\,dx+\int \frac{Bx+C}{x^2+2}\,dx+\int \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}\,dx.$$

Debemos hallar constantes A, B, C, D y E tales que

$$\frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}\quad \text{o}$$

$$\begin{aligned}
6x^2-15x+22 &= A(x^2+2)^2+(Bx+c)(x+3)(x^2+2)+(Dx+E)(x+3)\\
&= (A+B)x^4+(3B+C)x^3+(4A+3C+B+D)x^2\\
&+ (3B+C+3D+E)x+(4A+3C+3E).
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes obtenemos que

$$A+B=0$$

$$3B+C=0$$

$$4A+3C+B+D=6$$

$$3B+C+3D+E=-15$$

$$4A+3C+3E=22$$

Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos que

$$A=1, D=-5, B=-1, E=0 \quad \text{y} \quad C=3.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx &= \int \frac{dx}{x+3}\,dx+\int \frac{-x+3}{x^2+1}\,dx+\int \frac{-5x}{(x^2+2)^2}\,dx\\
&= \ln|x+3|-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+3\int \frac{dx}{x^2+2}-\frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,dx\\
&= \ln|x+3|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{5}{2(x^2+2)}+c.
\end{aligned}$$

2.12 EJERCICIOS

Ejercicios 2.1

2.1 En los siguientes ejercicios, calcular la integral indefinida y comprobar el resultado mediante derivación.

a.) $\displaystyle\int (x^2-1)\,dx.$

b.) $\displaystyle\int (4x^{2/3}-\frac{3}{x^2}+\sqrt{x})\,dx.$

c.) $\displaystyle\int (e^{\frac{x}{2}}+\operatorname{sen}2x)\,dx.$

d.) $\displaystyle\int (\sec^2\theta+\tan\theta\sec\theta)\,d\theta.$

e.) $\displaystyle\int \left(\frac{4}{x^2+4}-\frac{2}{1-4x^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx.$

2.2 Hallar tales que $\dfrac{1}{2-x^2}=\dfrac{A}{\sqrt{2}-x}+\dfrac{B}{\sqrt{2}+x}$ y usar esta igualdad para calcular $\displaystyle\int \frac{4}{2-x^2}\,dx$

2.3 Hallar $g(x)$, si $g'(x)=3\sqrt{x}$ y $g(1)=1$.

2.4 Hallar $h(t)$, si $h'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}+\dfrac{1}{t}$ y $h(1)=\pi$.

2.5 Calcular las siguientes integrales por el método de sustitución:

a.) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$

b.) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

c.) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$ (Sugerencia: $u=1-\sqrt{x}$)

d.) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(a\theta+b)\,d\theta.$

e.) $\displaystyle\int \tan(2\theta)\,d\theta.$

f.) $\displaystyle\int \tan\theta\sec^2\theta\,d\theta.$

g.) $\displaystyle\int \tan\theta\sec^3\theta\,d\theta.$

h.) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+2\cos\theta}}\,d\theta.$

i.) $\displaystyle\int \cot(e^x e^x)\, dx.$

j.) $\displaystyle\int x e^{x^2-1}\, dx.$

k.) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx.$

l.) $\displaystyle\int \frac{\ln(t+1)}{t+1}\, dt.$

m.) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}.$

n.) $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)\arctan(t)}.$

ñ.) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$

o.) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x) e^{\cos x}\, dx.$

p.) $\displaystyle\int tan^{t^2}\, dt.$

2.6 Resolver mediante integración por partes:

a.) $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\, dx.$

b.) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx.$

c.) $\displaystyle\int x^n \ln x\, dx.$

d.) $\displaystyle\int x \operatorname{arc\,sen} x\, dx.$

e.) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\, dx.$

f.) $\displaystyle\int x \cos^2\, dx.$

g.) $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c.$

h.) $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(b \operatorname{sen} bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + c.$

2.7 Aplicar las fórmulas de reducción, para resolver las siguientes integrales:

a.) $\displaystyle\int (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$

b.) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

c.) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

d.) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\,dx$.

e.) $\displaystyle\int \frac{dy}{2y^2-2y+1}$.

f.) $\displaystyle\int \frac{3y-1}{y^2-y+1}\,dy$.

g.) $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$.

h.) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

i.) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$.

j.) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$.

2.8 Calcular las integrales trigonométricas:

a.) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4\theta\,d\theta$.

b.) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\sqrt{\cos x}\,dx$.

c.) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 t\,dt$.

d.) $\displaystyle\int \tan^2\theta\sec^3\theta\,d\theta$.

e.) $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos x}\,dx$.

f.) $\displaystyle\int \sec^4(2x)\cos^3(2x)\,dx$.

g.) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\cos(3x)\,dx$.

2.9 Calcular las siguientes integrales por el método de fracciones parciales:

a.) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$.

b.) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$.

c.) $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}\, dx.$

d.) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^3 + 2x^2 + x}.$

e.) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - x}.$

f.) $\displaystyle\int R dt = \int \frac{x^2}{a^4 - x^4}\, dx.$

2.10 Preguntas de comprobación.

a.) ¿Qué entiende usted por primitiva de una función en un intervalo? Enuncie algunos ejemplos.

b.) ¿Puede una función tener mas de una primitiva en un intervalo?¿Cuántas? ¿Qué relación hay entre ellas?, Justifique se respuesta.

c.) ¿Qué entiende usted por integral indefinida de una función en un intervalo? ¿Puede la integral indefinida de una función en un intervalo representarse de diversas formas? Explique su respuesta.

3 LA INTEGRAL DEFINIDA

3.1 EL CONCEPTO DE ÁREA COMO FUNCIÓN DE CONJUNTO

Cuando un matemático intenta desarrollar una teoría general que abarque muchos conceptos distintos, procura aislar propiedades comunes que parecen ser fundamentales para cada una de las aplicaciones particulares que considera. Utiliza entonces esas propiedades como piedras fundamentales de su teoría. Euclides siguió este método al desarrollar la geometría elemental como un sistema deductivo basado en un conjunto axiomático. También hemos utilizado el mismo proceso de introducción axiomático del sistema de los números reales, y lo usaremos una vez más en nuestra discusión del concepto de área.

Cuando asignamos un área a una región plana, asociamos un número, a un conjunto S del plano. Desde el punto de vista puramente matemático, esto significa que se tiene una función a (función área) que significa que se tiene un número real $a(S)$ (el área de S) a dada conjunto S de una cierta colección de conjuntos dada.

Una función de ésta naturaleza, cuyo dominio es una colección de conjuntos y cuyos valores son números reales, se llama función de conjunto. El problema básico es este: Dado un conjunto plano S, ¿qué área $a(S)$ asignamos a S?

El método para abordar este problema consiste en partir de ciertas propiedades que el área debiera tener y tomarlas como axiomas para el área. Cualquier función de conjunto que satisfaga esos axiomas se llamará función área.

¿Es necesario demostrar que existe una función área [1]?

No intentaremos hacerlo. En cambio, suponemos la existencia de dicha función área y deducimos nuevas propiedades a partir de los axiomas. Antes de establecer los axiomas para el área, haremos algunas observaciones acerca de los conjuntos del plano a los que se les puede asignar área a. Estos se llamarán conjuntos medibles; la colección de todos los conjuntos medibles se designará por $\mathcal{M}$. Los axiomas contienen la suficiente información acerca de los conjuntos de $\mathcal{M}$ para permitirnos demostrar que todas las figuras geométricas que aparecen en las aplicaciones usuales del cálculo están en $\mathcal{M}$ y que sus áreas pueden calcularse por integración.

---

[1] Una construcción elemental de una función área se encuentra en los capítulos 14 y 22 de Edwin E. Moie, Elementary Geometry from An advanced stand point, Adisson-Wesley publisting co., 1963.

Uno de los axiomas (axioma 5) establece que todo rectángulo es medible y que su área es el producto de las longitudes de sus lados. La palabra "rectángulo" se usa qui para referirse a cualquier conjunto congruente[2] a un conjunto de la forma

$$\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq y \leq k\}$$

Siendo $h \geq 0$ y $k \geq 0$. Los números h y k son las longitudes de los lados del rectángulo.Consideremos un segmento o un punto como un caso particular de un rectángulo suponiendo que h o k (o ambos) son cero. A partir del rectángulo podemos construir conjuntos más complicados.

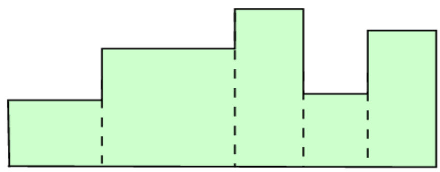


Figura 3.1

El conjunto dibujado en la figura anterior es la reunión de una colección finita de rectángulos con sus bases en el eje x, y se llama región escalonada. Los axiomas implican que cada región escalonada es medible y que su área es la suma de las áreas de los rectángulos componentes.

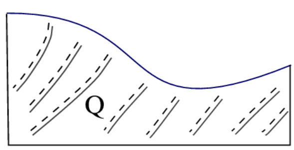


Figura 3.2

La figuras Q es un ejemplo de un conjunto de ordenadas. Su contorno superior es la gráfica de una función no negativa.

El axioma (3.1.1) nos permitirá demostrar que muchos conjuntos de ordenadas son medibles y que sus áreas pueden calcularse aproximando tales conjuntos por regiones escalonadas interiores y exteriores (ver figuras S y T).

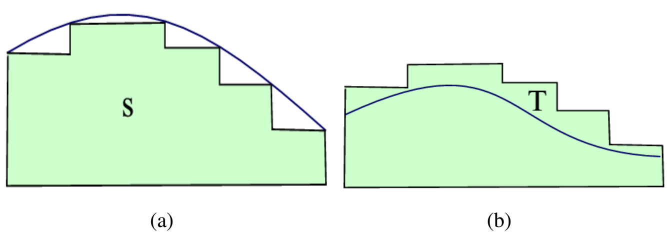


Figura 3.3

[2]La congruencia se usa aquí en el mismo sentido que la geometría euclidiana elemental. Dos conjuntos son congruentes si sus puntos pueden ponerse en correspondencia uno a otro de modo que las distancias se conserven. Esto es, si a dos puntos p y q en un conjunto corresponde p' y q'; en el otro, la distancia de p a q debe ser igual a la de p' a q'; siendo esto cierto para un par p,q cualquiera.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE ÁREA

Supongamos que existe una clase $\mathcal{M}$ de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es $\mathcal{M}$, con las propiedades siguientes:

Propiedades:

Propiedad de no negatividad: Para cada conjunto S de $\mathcal{M}$, se tiene $a(S) \geq 0$.

Propiedad adictiva: Si S y T pertenecen a $\mathcal{M}$, también pertenecen a $\mathcal{M}$, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$

Propiedad de diferencia: Si S y T pertenecen a $\mathcal{M}$ siendo $S \subseteq T$, entonces $T - S$ esta en $\mathcal{M}$, y se tiene

$$a(T - S) = a(T) - a(S)$$

Invarianza por congruencia: Si un conjunto S pertenece a $\mathcal{M}$ y T es congruente a S, también T pertenece a $\mathcal{M}$ y tenemos

$$a(S) = a(T)$$

Elección de escala: Todo rectángulo R pertenece a $\mathcal{M}$, si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces

$$a(R) = hk$$

Propiedad de exhaución: Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T, de modo que

$$S \subseteq Q \subseteq T.$$

Si existe uno y solo un c que satisface las desigualdades

$$a(S) \leq c \leq a(T).$$

Para todas las regiones escalonadas S y T que satisfacen $(S \subseteq Q \subseteq T)$, entonces Q es medible y $a(Q) = c$.

Observaciones:

(i) El axioma (3.1.1) establece que el área de un conjunto plano medible es un número positivo o nulo.

(ii) El axioma (3.1.1) dice que cuando un conjunto está formado por dos regiones (que pueden ser disjuntas), el área de la reunión es la suma de las áreas de las dos partes menos el área de su intersección. En particular si $a(S \cap T) = 0$, entonces $a(S \cup T) = a(S) + a(T)$.

(iii) El axioma (3.1.1) dice que si restamos un conjunto medible S de un conjunto medible T mayor, la parte restante $T - S$, es medible y su área se obtiene por sustracción, $a(T-S)=a(T)-a(S)$. En particular se $T=S$, $a(\phi)=0$, es decir el conjunto vacío es medible y tiene área nula. Como $a(T-S)\geq 0$, $a(T)-a(S)\geq 0$ entonces $a(T)\geq a(S)$ (propiedad de monotonía) para conjuntos S y T en $\mathcal{M}$ tales que $S\subseteq T$.

(iv) El axioma (3.1.1) asigna áreas iguales a los conjuntos que tienen el mismo tamaño y la misma forma.

(v) El axioma (3.1.1) asigna área no nula a ciertos rectángulos.

(vi) El axioma (3.1.1) incorpora el método griego de exhaución y nos permite extender la clase de conjuntos medibles de las regiones escalonadas a regiones más generales.

(vii) El axioma (3.1.1) asigna área cero al segmento de recta.

Tres problemas condujeron al concepto de integral definida, dos de física y uno geométrico.

Cálculo de la distancia por un punto material conocida su velocidad: Dada la función $V(t)$: velocidad instantánea de un punto material que se desplaza con movimiento rectilíneo. ¿Cuál es la distancia recorrida por dicho punto en un intervalo de tiempo desde el instante $t=a$ hasta el instante $f=b$?

Supongamos que $V(t)$ es mayor que cero, para todo t en el intervalo $[a,b]$ y $V(t)$ continua en $[a.b]$. Dividimos el intervalo de tiempo $[a,b]$ en pequeños intervalos de tiempo así:

$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b.$$

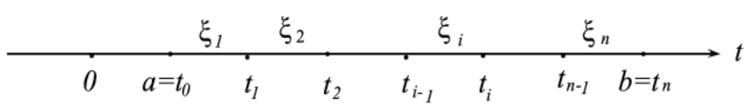


Figura 3.4

Si la longitud de los subintervalos $[t_{i-1},t_i]$ es pequeña, en ellos la velocidad es constante. Sea ξ_i un cierto instante de tiempo correspondiente al i-ésimo intervalo, en este subintervalo $V(\xi_i)=V_i$. Luego la longitud de la trayectoria recorrida por el punto material en el subintervalo es:

$$V_i(t_i-t_{i-1}).$$

Como esto se repite con cada subintervalo podemos calcular la distancia entre $t=a$ y $t=b$ así:

$$V(\xi_1)(t_1-t_0)+V(\xi_2)(t_2-t_1)+\ldots+V(\xi_i)(t_i-t_{i-1})+\cdots+V(\xi_n)(t_n-t_{n-1})$$

$$V(\xi_1)\Delta t_1+\Delta V(\xi_2)\Delta t_2+\ldots+V(\xi_i)\Delta t_i+\cdots+V(\xi_n)\Delta t_n$$

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}V(\xi_i)\Delta t_i. \tag{3.1}$$

Si los subintervalos son cada vez más pequeños la aproximación (3.1) se puede escribir como:

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} V(\xi_i)\Delta t_i.$$

Calculo del trabajo de una fuerza variable: Consideremos un punto material que se mueve a lo largo de una linea recta $\bar{o}x$ bajo la acción de una fuerza $F(x)$, la cual depende continuamente de x y cuya dirección y sentido coincide con la dirección del movimiento. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza cuando su punto de aplicación se desplaza de la posición $x = a$ a la posición $x = b$?

Dividimos el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos de la siguiente manera:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

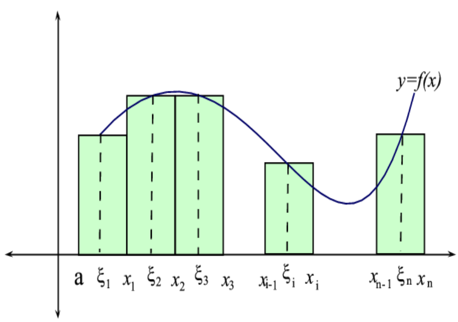
Para $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ pequeño, la valoración de la fuerza es pequeña (pues $F(x)$ es continua). La fuerza en cada subintervalo en $F(\xi_i)$, luego:

$$W_i = F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Es natural definir como valor exacto del trabajo

$$W = \lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Cálculo del área de un trapecio curvilíneo: El área del trapecio curvilíneo es aproximadamente la suma de las áreas de cada uno de los rectángulos:



$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Esa natural definir como valor exacto del área

$$A = \lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta \xi_i$$

Observaciones:

(i) Independientemente del significado concreto de las magnitudes con que se trabaja, el procedimiento aplicado es el mismo.

(ii) Dada la velocidad obtuvimos el espacio recorrido.

(iii) Dada una fuerza obtuvimos el trabajo.

(iv) Obtuvimos el área de un trapecio.

(v) El concepto de integral definida es uno de los más importantes del cálculo integral.

(vi) La integral definida se definirá como el límite de una suma y se interpretará como la medida del área de regiones encerradas en curvas.

3.1.2 SUMAS DE RIEMANN

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Dividamos el intervalo en n partes, de la siguiente manera:

$$x_0 = a, \quad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

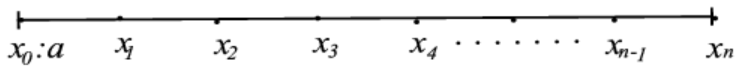


Figura 3.5

De esta manera obtenemos n-subintervalos con sus respectivas longitudes:

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ [x_2,x_3],\ ldots\ [x_{n-1},x_n]$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \Delta x_3 = x_3 - x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

El símbolo Δ, léase "delta". Ahora, en cada subintervalo elijamos un punto que se designará respectivamente como c_1, c_2, ..., c_n cuyo valor respectivo de la función es $f(c_1)$, $f(c_2)$, ..., $f(c_n)$. Lo anterior se puede representar gráficamente así:

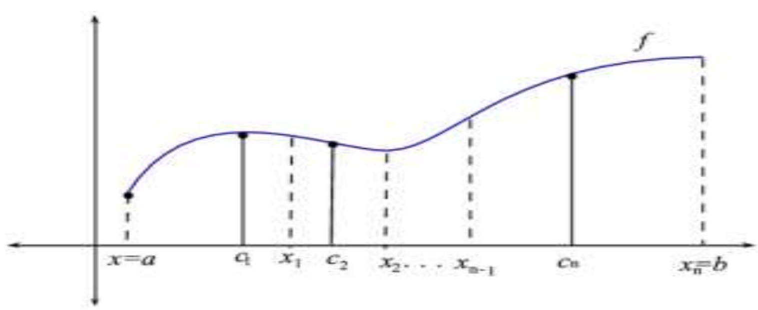


Figura 3.6

Observación: En la gráfica se ha tomado $f \geq 0$. Sin embargo se puede considerar $f \leq 0$. A continuación formamos la suma:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{\infty} f(c_k)\Delta x_k$$

llamada la ***"suma de Riemann"***.

Observaciones:

(i) El matemático alemán Geerg Friedrich Bernhard Riemann es a quien debemos la definición de integral definida.

(ii) La expresión de la derecha es una abreviación de la suma de Riemann y corresponde a la ***"notación sigma"*** vista en cursos anteriores.

(iii) La suma de Riemann depende del modo de dividir el intervalo $[a,b]$ en subintervalos $[x_{k-1},x_k]$ y de la elección de los puntos c_k, $k=1,2,\ldots,n$ en cada uno de los subintervalos. c_k puede ser: uno de los extremos del subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, o el punto medio $\frac{[x_{k-1},x_k]}{2}$, ó cualquier punto extremo.

(iv) En adelante, Δx es la mayor longitud entre $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, etc.$

(v) Note que $\Delta x \to o$ si y solo si $n \to \infty$.

(vi) Si f es una función continua y $f>0$ en $[a,b]$, la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n,$$

corresponde con la suma de las áreas de los rectángulos de base Δx_k y altura $f(c_k)$, tal como lo ilustra la gráfica (3.7):

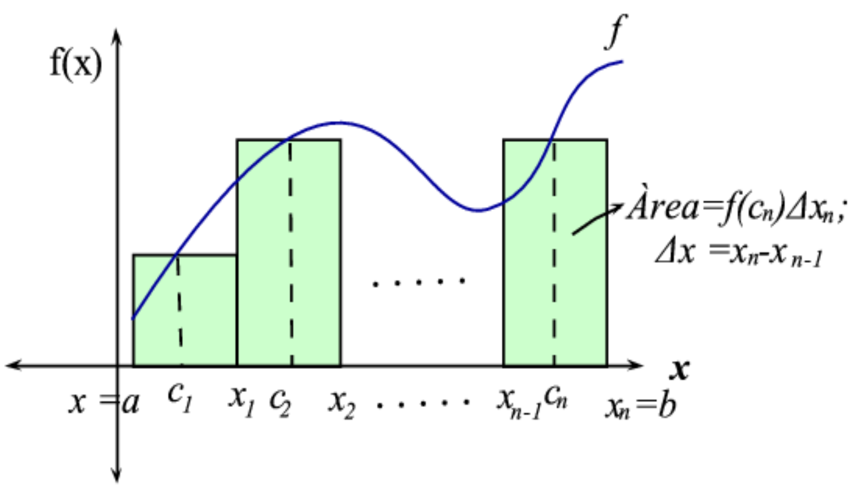


Figura 3.7

Ejemplo 3.1

Hallar la suma de Riemann para la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,b]$.

Solución: Dividimos el intervalo $[0,b]$ en n-subintervalos de longitudes iguales, la cual esta dada por

$$\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}.$$

Donde

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= \frac{b}{n} \\
x_2 &= \frac{2b}{n} \\
x_3 &= \frac{3b}{n} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \frac{(n-1)b}{n} \\
x_n &= \frac{nb}{n} = b.
\end{aligned}$$

y los puntos medios de cada subintervalo son:

$$c_1 = \frac{0+\frac{b}{n}}{2} = \frac{b}{2n} \qquad c_3 = \frac{\frac{2b}{n}+\frac{3b}{n}}{2} = \frac{5b}{2n}$$

$$c_2 = \frac{b}{n} + \frac{2b}{n} = \frac{3b}{2n} \qquad c_n = \frac{\frac{(n-1)b}{n}+\frac{nb}{n}}{2} = \frac{(2n-1)b}{2n}$$

En particular, para cualquier $k = 1,2,3,\ldots,(n-1),n$ se tiene que

$$c_k = \frac{(2k-1)b}{2n}.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la suma de Riemann es:

$$\begin{aligned}
S_n &= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \\
&= \frac{b^3}{4n^3} + \frac{3^2 b^3}{4n^3} + \frac{5^2 b^3}{4n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2 b^3}{4n^3} \\
&= \frac{b^3}{4n^3}\left[1+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2\right] \\
&= \frac{b^3}{4n^3}\left[\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\right] \\
&= \frac{b^3}{4n^3}\left[\frac{4n^3-n}{3}\right] \\
&= \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{12n^2}.
\end{aligned}$$

La representación geométrica se muestra a continuación:

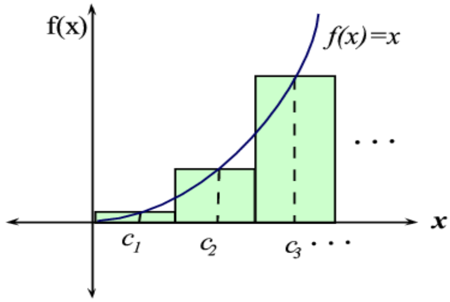


Figura 3.8: Representación geométrica

Observaciones:

(i) $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^3}{12n^2}$.

(ii) Para obtener Sn se ha usado la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Otras formulas son:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} K &= 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{(Progresión aritmética)}\\
\sum_{k=1}^{n} C &= c+c+c+\ldots+c = nc, \quad c: \text{(Constante}\\
\sum_{k=1}^{n} K^2 &= 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

(iii) Como $f(x) = x^2$ para todo x en $[0,b]$, la suma Sn es la suma de las áreas de los rectángulos que tienen como base el segmento $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b}{n}$, y por altura $f(c_k) = c_k^2$. Su gráfica se observa a continuación.

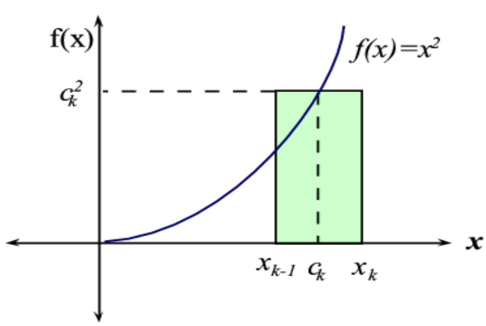


Figura 3.9

El área del rectángulo de la figura es igual a $f(c_k)\Delta x_k$, es una aproximación del área de la región bajo la gráfica de f, por encima de x, y comprendida entre x_{k-1} y x_k.

En consecuencia la suma de Riemann $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^3}{12n^3}$, no es mas que una aproximación del área de la región comprendida entre la curva $f(x) = x^2$, el eje x, y entre 0 y b, como lo ilustra la siguiente figura.

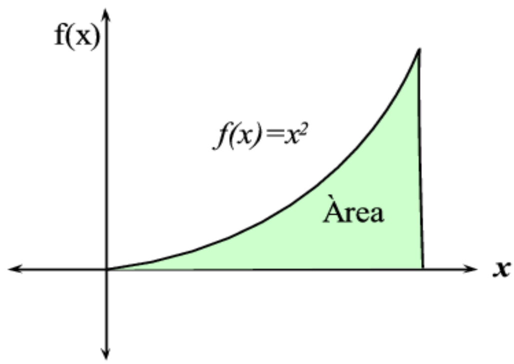


Figura 3.10

Nótese que si Δx se hace cada vez más pequeño, n se hace cada vez mayor, la aproximación Sn del área de la región bajo la curva, es cada vez mejor, pues un rectángulo de base menor, se aproxima más al área bajo la curva que un rectángulo de base mayor, ver la siguiente figura:

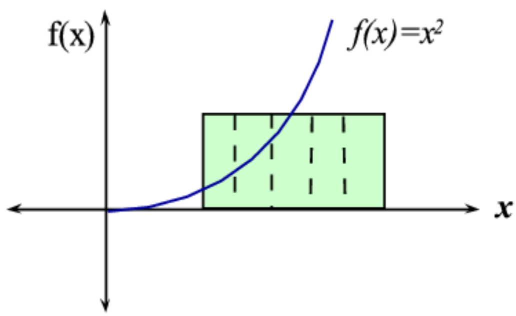


Figura 3.11

Todo el análisis anterior es el que justifica definir el área de la región comprendida entre la curva $f(x) = x^2$, el eje x y entre 0 y b de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{12n^2} \right] = \frac{b^3}{3}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.2

Reproducir el ejemplo anterior, pero esta vez tomando los c_k diferentes del punto medio de los subintervalos. Por ejemplo, se puede elegir c_k como uno de los extremos del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Sugerencia: Unos estudiantes tomen $c_k = c_{k-1}$ y otros $c_k = x_k$. Luego confronten los resultados entres si y con el resultado del ejemplo (3.1). (Ejercicio).

Ejemplo 3.3

Calcular mediante el límite de una suma de Riemann el área de la región comprendida entre las rectas $f(x) = mx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Tomar $m > 0$. ¿Qué pasa si $m < 0$? (Ejercicio)

Ejemplo 3.4

Hacer lo mismo que en el ejemplo (3.3), pero en este caso la región está comprendida entre las gráficas de $y = b$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = a$.

3.2 DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$ y $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ una suma de Riemann de f en $[a,b]$. Si el límite de la suma de Riemann existe cuando $\Delta x \to 0$, decimos que f es integrable en el intervalo $[a,b]$ y al límite lo llamamos integral definida de f en el intervalo $[a,b]$ y lo denominamos así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \tag{3.2}$$

Los números a y b se llaman respectivamente, límite inferior y límite superior de la integral. El intervalo $[a,b]$ se llama intervalo de integración. La función f se llama integrando y la variable x, variable de integración.

Observaciones:

(i) La integral definida es un número, el cual depende solo del integrando y de los límites de integración, pero no depende de la variable de integración. Algunos autores a la variable de integración la llaman "variable muda". Por esta razón se puede escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)\,d\theta$$

(ii) Para la definición de la integral definida no se ha condicionado que el integrando f tome valores positivos o negativos en el intervalo de integración, sin-embargo, si $f > 0$, para todo x en $[a,b]$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ será numéricamente igual a la medida del área A de la región curvilínea comprendida entre la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$, y $x = b$ como lo ilustra la figura:

(iii) El cálculo directo de integrales definidas mediante la definición, presenta serias dificultades por los cálculos laboriosos que hay que realizar, aún con integrales simples como $f(x) = mx$ y $f(x) = x^2$. Sin-embargo no debemos preocuparnos mucho, pues Newton (1642-1729) y Laibniz (1646-1717) descubrieron una fórmula que facilita el cálculo de ciertas integrales definidas mediante una primitiva F del integrando f.

Formula de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{Si} \quad F'(x) = f(x). \tag{3.3}$$

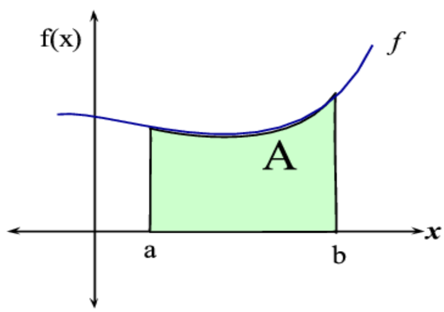


Figura 3.12: $A = \int_a^b f(x)\,dx$

3.3 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema 3.1

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$.

Observaciones:

Al definir la integral definida asumimos que $a < b$, sin embargo, se puede deducir de la definición que:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, en el caso en que $b < a$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{-(a-b)}{n}$$

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$, pues $\Delta x = 0$.

Teorema 3.2

Dados tres números cualesquiera a, b y c son $a < b < c$ se verifica que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{3.4}$$

Siempre que las integrales existan.

Teorema 3.3

Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ y k una constante, entonces:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.5}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \tag{3.6}$$

Teorema 3.4

Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ y $f \leq g$ para todo x en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx \tag{3.7}$$

Teorema 3.5 (Teorema fundamental del cálculo)

Si f es continua en $[a,b]$ y F es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b + c = F(b) - F(a). \tag{3.8}$$

Ejemplo 3.5

Calcular las siguientes integrales utilizando los teoremas conocidos y realizar interpretación gráfica de cada una.

1. $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c\Big|_a^b = \frac{1}{3}b^3.$

2. $\displaystyle\int_a^b mx\,dx = m\int_a^b x\,dx = m\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{m}{2}[b^2 - a^2].$

3. $\displaystyle\int_0^a b\,dx = b\int_0^a dx = b \cdot a.$

4. $\displaystyle\int_2^0 x^2\,dx = -\int_0^2 = -\frac{8}{3}.$

5. $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \int_a^0 x^2\,dx + \int_0^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^0 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$

6. $\displaystyle\int_2^3 (3x^2 - x + 2)\,dx = 3\int_2^3 x^2\,dx - \int_2^3 x\,dx + 2\int_2^3 dx = \frac{37}{2}.$

7. $\displaystyle\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1} - a^{n-1}\right]$, si $n \neq 1$.

8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2(\sqrt{2} - 1).$

9. $\displaystyle\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta = \operatorname{sen}\theta\Big|_0^\pi = 0.$

10. $\displaystyle\int_0^x e^t\,dt = e^t\Big|_0^x = e^x - 1.$

    Nótese que el límite superior es una variable y la función resultante es una función de este límite.

En el ejemplo (3.3), el número (10), lo podemos generalizar de la siguiente manera:

Si F es una función primitiva de f en el intervalo $[a,b]$, entonces

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a)$$

para todo x en $[a,b]$. Derivando los dos miembros de la igualdad anterior obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right], \quad F'(x) = f(x).$$

Luego, la integral de $f(t)$ con límite superior variable es una primitiva de f.

Corolario 3.1

Del teorema fundamental del cálculo: Sea f una función continua en $[a,b]$. Si $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ para todo x en $[a,b]$, entonces $g'(x)=f(x)$.

Por el teorema (3.1) y el corolario (3.1) podemos concluir que toda función continua en $[a,b]$ que toda función continua f tiene primitiva. Interprete geométricamente el corolario (3.1), cuando $f\geq 0$ en el intervalo $[a,b]$.

Ejemplo 3.6

Derivar cada función:

1. Si $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt$, entonces $F'(x)=\ln x$. La integral $\int_1^x \ln t\,dt$ es una primitiva de $\ln x$.
2. $\frac{d}{dx}\left[\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt\right]=-\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt=-\sqrt{1+t^4}.$

3.3.1 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Supongamos que queremos calcular la integral

$$\int_a^b f[g(x)]\,g'(x)\,dx,$$

donde f, g y g' son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, si hacemos el cambio de variable $u=g(x)$, entonces $du=g'(x)dx$ y teniendo en cuenta que si $x=a$, entonces $u=g(u)$ y si $x=b$ entonces $u=g(b)$. Por lo anterior, obtenemos la siguiente fórmula de integración:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du=F[g(b)]-F[g(a)]. \tag{3.9}$$

Ejemplo 3.7

Calcular las siguientes integrales definidas por sustitución o cambio de variable.

1. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

   Solución: Haciendo el siguiente cambio de variable tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u=1+x^2 & \text{Si } x=0, \rightarrow u=1 \\ du=2xdx & \text{Si} x=1, \rightarrow u=2 \end{bmatrix}$$

$$=\ \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{2}-1$$

Nótese que:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{bmatrix} u = 1+x^2 \\ du = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{u}{du} = \sqrt{u}+c = \sqrt{1+x^2}+c = F(x).$$

Aplicando la fórmula de Newton-Leibniz, obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$$

2. $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

Solución: Haciendo el siguiente cambio de variable tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x = \operatorname{sen}\theta & \text{Si } x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \to \theta = \frac{\pi}{4} & \\ \theta = \operatorname{arc\,sen} x & dx = \cos\theta\, d\theta & \text{Si } x = 1, \to \theta = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{3}$. (Ejercicio).

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 dx = \frac{\pi}{2}$ (Ejercicio). Interprete geométricamente el resultado.

3.3.2 FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{3.10}$$

donde u, v, u' y v' son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$.

Ejemplo 3.8

Calcular las siguientes integrales definidas aplicando la fórmula de integración por partes.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx.$

Solución: Haciendo el siguiente cambio de variable tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = x\operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \pi - 1.$$

Ahora:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u=\cos x & dv = xdx \\ du = -\operatorname{sen} xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{sen} x\,dx$$

¡Explicar!

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x}\,dx = \frac{2}{e}$ (Ejercicio).

3. El área de la región limitada por la curva $y = xe^{-x}$, el eje x y las rectas $x = 0$, y $x = 1$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arc\,sen}\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2} - 1$. (Ejercicio).

3.4 EJERCICIOS

Ejercicios 3.1

3.1 Sea $z = \int_x^y \frac{dt}{\ln t}$, $1 < x < y$. Hallar $\frac{dz}{dy}$ y $\frac{dz}{dx}$ (y no depende de x).

3.2 Hallar las derivadas de cada una de las funciones:

a.) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$.

b.) $F(x) = \int_x^1 \ln t\, dt$.

3.3 Calcular las integrales dadas, utilizando la fórmula de Newton-Leibniz.

a.) $\int\limits_a^b x^{-2}\, dx$ Imponga condiciones para a y b.

b.) $\int\limits_{-x}^{x} e^{-t}\, dt$.

c.) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$.

d.) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$.

e.) $\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

3.4 Para resolver los siguientes ejercicios hay que tener en cuenta el teorema fundamental del cálculo, las propiedades fundamentales de la integral y los métodos de integración por sustitución y por partes. Revise estos temas y analice en su mente antes de proceder a resolverlos.

a.) $\int\limits_1^3 (x^2-3x+1)dx$.

b.) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{x\ln x}$.

c.) $\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dt}{t^2-1}$.

d.) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{y^2}{1+y^2}.$

e.) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x\ln x}.$

f.) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta.$

g.) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2 4x+5}.$

h.) $\displaystyle\int_{4}^{3} \frac{dx}{-2+3x-x^2}.$

i.) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

j.) $\displaystyle\int_{2}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{5-4t-t^2}}.$

k.) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\, dt.$

l.) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx.$

m.) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\, dx.$

n.) $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x\, dx.$

ñ.) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos\theta\, d\theta.$

o.) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^{2x}\, dx.$

3.5 Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$ y sean m y M sus valores mínimo y máximo respectivamente en $[a,b]$. Demostrar que:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Suponga que $f \geq 0$ para todo x en $[a,b]$ e interprete la desigualdad anterior geométricamente.

3.6 Justifique las siguientes propiedades de la integral definida:

a.) Si f es una función par, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

b.) Si f es una función impar, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ e interprete geométricamente.

4 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

4.1 ÁREA DE UNA FUNCIÓN ENTRE DOS CURVAS

En el capítulo anterior vimos la estrecha relación que existe entre la integral de Riemann y el área de la región R comprendida entre una función f, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$. De la figura obtenemos que:

$$A(R) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right] = \int_a^b f(x)\,dx \tag{4.1}$$

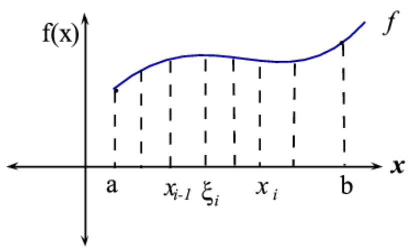


Figura 4.1

Trataremos ahora de calcular el área comprendida entre las curvas f, g y dos rectas $x=a$, $x=b$. Dada la figura:

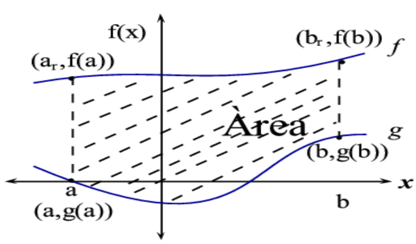


Figura 4.2

Sean f y g funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y $f \geq g$ para todo x en $[a,b]$. Consideremos el área comprendida entre las funciones f, g y las rectas $x=a$ y $x=b$. Tomamos una partición en el intervalo $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de tal manera que el área quede dividida en franjas.

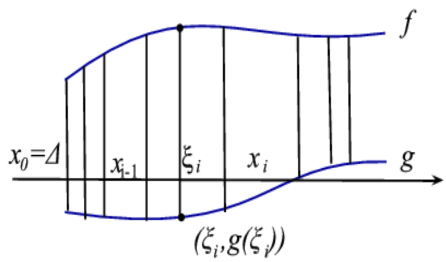


Figura 4.3

El área del i-esimo rectángulo es aproximadamente

$$\Delta A_i = [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i,$$

de tal manera que el área total quedará aproximada por

$$A \approx \sum_{n=1}^{\infty} \Delta A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\, \Delta x_i. \tag{4.2}$$

A medida que los subintervalos de la partición se hacen más pequeños, la sumatoria tiende hacia el área real y entonces tenemos que

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\, \Delta x_i. \tag{4.3}$$

Las sumas anteriores no son más que las sumas de Riemann para la integral de la función $[f(x) - g(x)]$, es decir que

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \tag{4.4}$$

Observaciones:

(i) En lugar de bosquejar todos los rectángulos de la partición, se usa un solo rectángulo llamado *Rectángulo representativo*.

(ii) Si tomamos un rectángulo vertical (de anchura Δx) debemos integrar respecto a x, y si tomamos un rectángulo horizontal (de anchura Δy) debemos integrar respecto a y.

(iii) Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 4.1 (Área de una región entre dos curvas)

Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y $f \geq g$ en el intervalo $[a,b]$, entonces el área de la región comprendida entre las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ejemplo 4.1

Hallar el área de la región comprendida por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x$, $x = -2$ y $x = 1$. La gráfica de la región se muestra al final del ejemplo (Figura 4.4).

Solución: Como se muestra en la figura (4.4), $f \geq g$ para todo x en $[-2, 1]$. El área de un rectángulo representativo es:

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x = [(x^2 + 1) - (-x^2)].$$

Aplicando el teorema (4.1) tenemos que:

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{1} [(x^2 + 1) - (-x^2)]\,dx = \int_{-2}^{1} (2x^2 + 1)\,dx = 9.$$

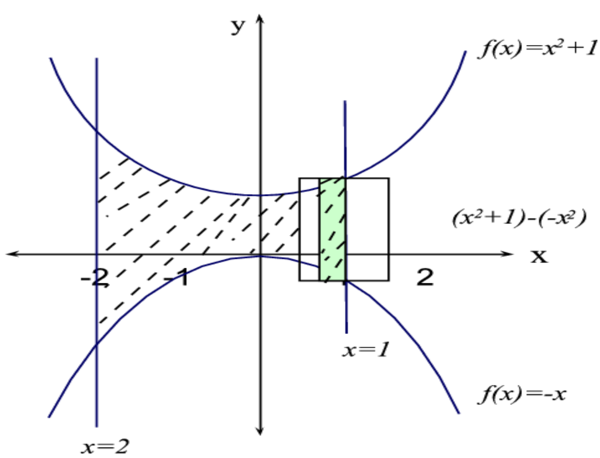


Figura 4.4

Observaciones:

(i) El resultado del teorema (4.1) no depende de las posiciones relativas de f y g con respecto a x. Lo único que se debe tener en cuenta es que la función de "arriba" se le resta la función de "abajo". Sin embargo si se toman al contrario, se obtendría un valor negativo, el cual es igual en valor absoluto al área solicitada.

En el ejemplo (4.1), si se tomaran las funciones en forma contraria tendríamos que

$$\int_{-2}^{1} [(-x^2) - (x^2+1)]\, dx = -9, \quad \text{y el} \quad A = |-9| = 9.$$

(ii) En algunos textos, para hallar el área comprendida entre f y g continuas en $[a,b]$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ se utiliza la expresión:

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \right|,$$

sin tener en cuenta la condición de que f esté por "encima" de g.

(iii) Si $g(x) = 0$, tenemos la gráfica

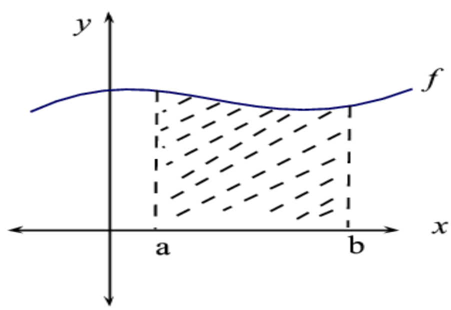


Figura 4.5

En este caso tenemos que $A = \int_a^b (f(x) - 0)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$. Si $f(x) = 0$, la gráfica es

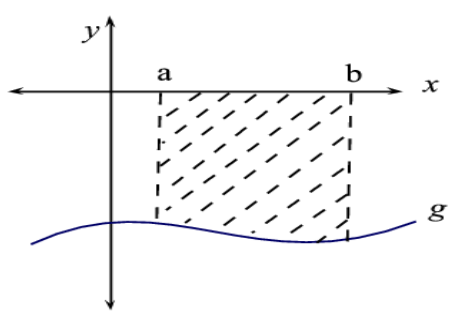


Figura 4.6

y el área es $A = \int_a^b (0 - g(x))\, dx = -\int_a^b g(x)\, dx.$

(iv) En el caso en que las gráficas se corten y se desee calcular el área entre ellas, los límites a y b se deben calcular.

Ejemplo 4.2

Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = 1 - 2x$. Los puntos de intersección se obtienen igualando las ecuaciones

$$4 - x^2 = 1 - 2x \qquad -(x^2 - 2x - 3) = 0 \qquad (x-3)(x+1) = 0$$

Entonces las gráficas se cortan cuando $x = 3$ y $x = -1$. También $f(3) = g(3) = -5$ y $f(-1) = g(-1) = 3$, luego los puntos de intersección son $(3, -5)$ y $(-1, 3)$. Un rectángulo representativo tiene por área

$$A = \int_{-1}^{3} [(4 - x^2) - (1 - 2x)]\, dx = \frac{32}{3}.$$

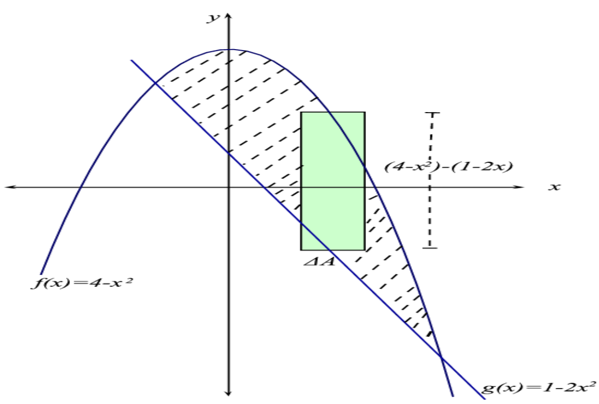


Figura 4.7: Área entre las funciones

Consideremos el caso cuando las curvas se cortan en más de dos puntos.

Ejemplo 4.3

Hallar el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{x^3}{2}$ y $f(x) = 2x$.

Solución: Los puntos de corte se obtienen cuando $\dfrac{x^3}{2} = 2x$, $x^3 = 4x$, ó $x(x-2)(x+2) = 0$. Entonces las gráficas se cortan cuando $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$

luego $f(-2) = g(-2) = -4$; $f(0) = g(0) = 0$ y $f(2) = g(2) = 4$ y los puntos de intersección son $(-2,4)$; $(0,0)$ y $2,4$.

En la figura (4.8) podemos ver que $f \geq g$ en el intervalo $[-2,0]$ y $g \geq f$ en el intervalo $[0,2]$, luego necesitamos dos integrales a saber:

$$A_1 = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx \qquad A_2 = \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]dx$$

La suma nos dará $A = A_1 + A_2$. O sea que

$$A = \int_{-2}^{0} \left(\frac{x^3}{2} - 2x\right)\, dx + \int_{0}^{2} \left(2x - \frac{x^3}{2}\right)\, dx = 2 + 2 = 4.$$

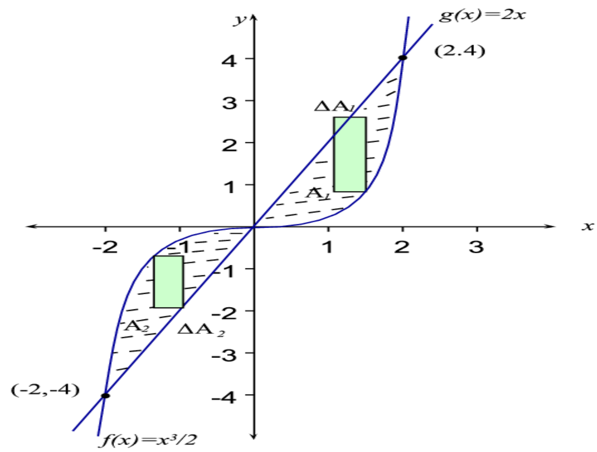


Figura 4.8: La gráfica ilustra la situación

Ejemplo 4.4

Hallar el área acotada o las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2$, $g(x) = \dfrac{4x+22}{5}$ y $h(x) = \dfrac{-5x-11}{2}$.

Solución: Hallaremos los puntos de intersección entre f y g es decir

$$x^3 - 2 = \frac{4x+2}{5}, \quad \text{o} \quad 5x^3 - 4x - 32 = 0, \quad \text{o} \quad (x-2)(5x^2 + 10x + 16) = 0,$$

de donde $x = 2$ y $f(2) = g(2) = 6$, el punto es $(2,6)$. Si igualamos f y g obtenemos

$$x^3 - 2 = \frac{-5x-11}{2} \quad \text{o} \quad 2x^3 + 5x + 7 = 0 \quad \text{o} \quad (x+1)(2x^2 - 2x + 7) = 0$$

de donde $x = -1$ y $f(-1) = h(-1) = -3$ es decir que se cortan en el punto $(-1,-3)$.

Finalmente igualamos h y g, $\dfrac{4x+22}{5}=\dfrac{-5x-11}{2}$, de donde $x=-3$ anula la expresión y $g(-3)=h(-3)=2$ ó sea que g y h se cortan en el punto $(-3,2)$. La gráfica de función se muestra al final del ejemplo (Ver figura 4.9).

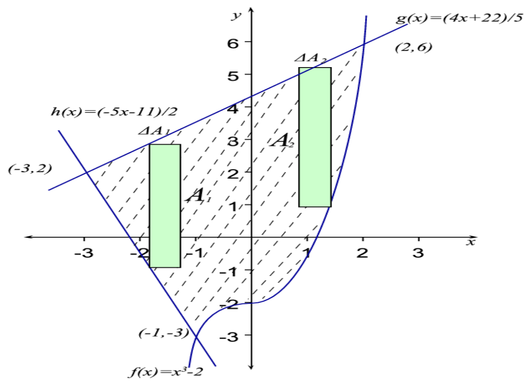


Figura 4.9: Área entre las funciones

El área total es $A=A_1+A_2$. Para A_1 tenemos que

$$\Delta A_1=[g(x)-h(x)]\Delta x=\left[\left(\frac{4}{5}x+\frac{22}{5}\right)-\left(\frac{-5}{2}x-\frac{11}{2}\right)\right]\Delta x,$$

entonces

$$A_1=\int_{-3}^{-1}\left[\left(\frac{4}{5}x+\frac{22}{5}\right)-\left(\frac{-5}{2}x-\frac{11}{2}\right)\right]=\frac{33}{5}.$$

Para A_2 tenemos que

$$\Delta A_2=[g(x)-f(x)]\Delta x=\left[\left(\frac{4}{5}x+\frac{22}{5}\right)-\left(x^3-2\right)\right]\Delta x,$$

es decir que

$$A_2=\int_{-1}^{2}\left[\left(\frac{4}{5}x+\frac{22}{5}\right)-\left(x^3-2\right)\right]dx=\frac{473}{2},$$

luego

$$A=A_1+A_2=\frac{33}{5}+\frac{473}{2}=\frac{122}{4}=\frac{61}{2}.$$

En ciertas ocasiones es conveniente usar rectángulos verticales e integrar respecta a y, es decir que

$$A=\int_{y_1}^{y_2}\underbrace{(\text{Cara derecha-Cara izquierda})}_{\text{En variable } y}\,dy$$

Ejemplo 4.5

Hallar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = x+1$, $y^2 = 2x-2$.

Las ecuaciones se pueden escribir como $f(y) = y^2 - 1$ y $g(y) = \dfrac{y^2+2}{2}$ cuyas gráficas generan el área buscada (la gráfica se puede observar al final del ejemplo).

Los puntos de corte se hallan haciendo

$$f = g, \quad o \quad y^2 - 1 = \frac{y^2+2}{2} \qquad (y-2)(y+2) = 0,$$

es decir que $y = \pm 2$, de donde $f(2) = g(2) = 3$ y $f(-2) = g(-2) = 3$, de esta manera los puntos de corte son $(3,2)$ y $(3,-2)$.

Entonces

$$\Delta A = [g(y) - f(y)]\Delta y = \left[\left(\frac{y^2+2}{2}\right) - (y^2-1)\right]\Delta y$$

y

$$A = \int_{-1}^{2} \left[\left(\frac{y^2+2}{2}\right) - (y^2-1)\right] dy = \int_{-1}^{2} \left[-\frac{1}{2}y^2 + 2\right] dy = \frac{-y^3}{6} + 2y\Big|_{-1}^{2} = \frac{13}{3}.$$

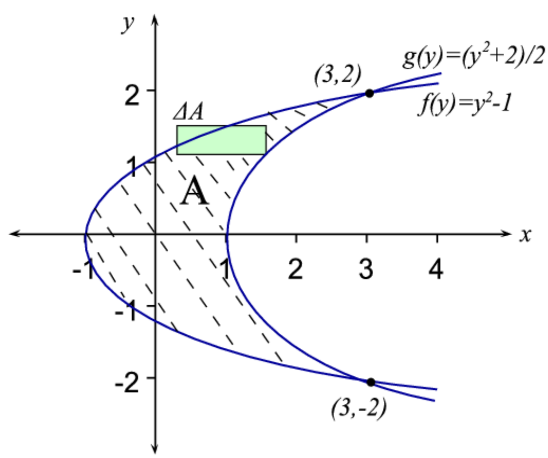


Figura 4.10: Área entre las funciones

4.2 APLICACIONES A LA FÍSICA

Algunos conceptos físicos variables como aceleración, velocidad, trabajo, presión y cantidad de masa se pueden definir con base en la integral.

POSICIÓN Y VELOCIDAD

Si un objeto se mueve con una aceleración $a(t)$ en un tempo t, entonces $V(t) = \int a(t)\,dt$, $x(t) = \int V(t)\,dt$ donde $V(t)$ es la velocidad en un tiempo t y $x(t)$ es la posición en un tiempo t.

Ejemplo 4.6

En $t = 0$, un automóvil lleva una velocidad de $30km/h$. Si el automóvil mantiene una aceleración constante de $6km/h^2$, calcular:

(a.) $V(t) = \int a(t)\,dt = \int 6dt = 6t + c$. Ahora $V_0 = 6(0) + c = 30$, entonces $c = 30$ luego $V(t) = 6t + 30$.

(b.) Como $V(t) = 6t + 30$, entonces $V(2) = 42km/h$.

(c.) $x_t = \int V(t)\,dt = \int (6t + 30)\,dt = 3t^2 + 30t + c$ y como $x(0) = 3(0)^2 + 30(0) + c$, entonces $c = 0$ y $x(t) = 3t^2 + 30t$.

(d.) Entre $t = 1$ y $t = 2$ la distancia recorrida es $x(2) - x(1) = 35$ km.

4.2.2 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA

El trabajo realizado por un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta por acción de una fuerza variable entre los puntos x_1 y x_2 está dado por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx, \tag{4.5}$$

donde W es el trabajo y $F(x)$ es la fuerza en función de x. Un caso especial de fuerza variables es la fuerza elástica, que es la fuerza necesaria para estirar o comprimir un resorte x unidades a partir de su longitud original y esta dada por $F(x) = kx$, donde k es la constante del resorte.

Ejemplo 4.7

Para estirar un resorte de su magnitud natural de $10cm$ a $30cm$, se necesita una fuerza de $10kg$.

(a.) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte $10cm$ a $40cm$.

(b.) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte de una longitud de $20cm$ a $50cm$. Dada la recta coordenada:

Solución:

(a.) De acuerdo a los datos $F(x) = 10kg$ cuando $x = 30cm - 10cm = 20cm$ como $F(x) = kx$, $F(20) = k(20) = 10$ entonces $k = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, luego $F(x) = \frac{1}{2}x$. Para el caso el resorte se ha estirado una distancia $x_2 = 40 - 10 = 30cm$. Partiendo de $x_1 = 0$, entonces el trabajo realizado al estirar el resorte es

$$W = \int_{0}^{30} \frac{1}{2} x\, dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_{0}^{30} = 900 \text{ kgr/cm.}$$

(b.) En esta caso los límites de integración son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 20cm - 10cm = 10cm \\ x_2 &= 50cm - 10cm = 40cm \\ W &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx = \int_{10}^{40} \frac{1}{2} x\, dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_{10}^{40} = 375 \text{ kgr/cm.} \end{aligned}$$

4.2.3 CENTROIDE DE UNA LAMINA PLANA

Sea la región plana acotada por las funciones f y g, $x = x_1$ y x_2 si $f \geq g$ en $[a,b]$ y ρ es la densidad de la región, entonces

(a.) Los momentos respecto a los ejes x e y son:

$$\begin{aligned} Mx &= \frac{\rho}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx \\ My &= \rho \int_{x_1}^{x_2} x\left[f(x) - g(x)\right] dx \end{aligned}$$

(b.) El centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ (centroide) esta dado por:

$$\bar{x} = \frac{My}{m} \qquad \bar{y} = \frac{Mx}{m} \quad \text{donde}$$

$$m = \rho \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\, dx \quad \text{es la masa de la lámina.}$$

4.3 EJERCICIOS

Ejercicios 4.1

4.1 Use la integral definida para calcular el área de los triángulos de vertices dados:

a.) $(1,2)$, $(-2,1)$, $(0,-2)$.

b.) $(3,4)$, $(1,2)$, $(-1,5)$.

4.2 En cada ejercicio dibuje la región acotada por las gráficas de las funciones dadas, muestre un rectángulo representativo horizontal o vertical y encuentre el área de la región.

a.) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=4$.

b.) $y^2=x-1$, $x+y=7$.

c.) $f(x)=\operatorname{sen}(2x)$, $0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$.

d.) $f(x)=x^5+5x-6$, $g(x)=6x-6$.

4.3 Las gráficas de $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ y $g(x)=x$ se cortan en tres puntos. Explique por qué el área de la región comprendida entre ellas no puede calcularse mediante la integral

$$\int_{-1}^{1}(x^{\frac{1}{3}}-x)\,dx.$$

Use simetrías para calcular el área mediante una sola integral.

4.4 La velocidad de una pelota t segundos después de haber sido lanzada es $60-10t\,m/seg$. ¿Cuál es la posición en el tiempo $t=4seg$, si su posición es $20m$ en $t=0$.

4.5 Un tren se desplaza a razón de $\dfrac{60t}{t^2+1}km/h$, después de t horas de haber salido de la estación. ¿Qué distancia ha recorrido después de 4 horas de haber salido de la estación?

4.6 Un resorte tiene una longitud natural de $15cm$. Se requiere una fuerza de $20kg$ para comprimir el resorte hasta $10cm$.¿Cuánto trabajo se hace para estirar el resorte hasta $30cm$?

4.7 Hallar el centroide de la región limitada por las gráficas de $y=(x-1)^2$, $y=0$ y $x=0$.

BIBLIOGRAFÍA

Abreu, J. L., Olivero, M. (1989). Calcula. Grupo Editorial Iberoamericana. México, D.F.

Bell, E., (1985). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica. México, D.F.

Cantoral Uriza, Ricardo; Fafán Márquez, Rosa María, (2004). Desarrollo Conceptual del Cálculo. International Thomson Editores. México, D.F.

Cordero, Francisco; Solís, Miguel., (1995). Las Gráficas de Funciones como una Argumentación del Cálculo- Didáctica. Grupo Editorial Iberoamericano. México, D.F.

Granville, W., (1904). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial UTEHA.

Larson, Roland E. Hostetler, Robert P. Edwards, Bruce H., (1995). Cálculo, volumen 1. Quinta Edición. Editorial McGraw-Hill. México, D.F.

Monsalve, Sergio, (2010). Cálculo con notas Históricas y Contextos Económicos. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.

Piedra Vilchez, Cesar, (2015). Introducción al Cálculo. Editorial Macro. Lima, Perú.

Rubio Perilla, Marcelo. Dueñas Ruiz, Herbert, (2006). Cálculo I. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Stewart, James, (2001). Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. Cuarta Edición. International Thomson Editores. México, D.F.

Stewart, James, (2012). Cálculo. Trascendentes Tempranas. Séptima Edición. Cengage Learing.

Spivak, M., (1980). Calculus. Editorial Reverté.

Swokowski, E. W. (1979). Cálculo con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamericana. México, D.F.

Tom, M. Apóstol, (1973). Calculus, Volumen 1. Editorial Reverté, S.A. España.

Wenzelburger, E. (1993). Didáctica: Cálculo Diferencial. Grupo Editorial Iberoamericano. México, D.F.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción a los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral - una propuesta didáctica. Educación Matemática, Vol. 5, No. 3.

Wenzelburger, E. (1994). Didáctica: Cálculo Integral. Grupo Editorial Iberoamericano. México, D.F.

Cálculo Integral

Una Introducción

Universidad de la Amazonia