

Elementos De Electrodinámica

notas de clase



Jesús H. Ozalora B.

Elementos De Electrodinámica

And Maxwell said:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Make the Light



ISBN: 978-958-5484-94-8



9 789585 484948

*Dedicado a:
Mi esposa María Nelly
Y mis hijos Diego Hernando,
Diana María y Wilmar Alfonso ...*

*Me parecería mejor que empezaras a enseñarles a otros solo después
de que tú mismo haya aprendido algo.*
Albert Einstein

*Lo que llamamos la física, comprende ese grupo de ciencias
naturales cuyos conceptos se fundamentan en la medición y las
medidas y en donde, por lo tanto, sus conceptos y proposiciones se
prestan a ser formulados en ecuaciones matemáticas.*
Albert Einstein

ELEMENTOS DE ELECTRODINÁMICA

NOTAS DE CLASE

© **JESUS HERNANDO OTÁLORA BONILLA**

Docentes, Universidad de la Amazonia
Facultad de Ciencias de la Educación
Programa de Licenciatura en matemáticas y Física

PRIMERA EDICIÓN, 2023

**DIRECTIVOS
UNIVERSIDAD DE LA AMAZONIA**

FABIO BURITICÁ BERMEO
Rector

WILLIAM D. GRIMALDO SARMIENTO
Secretario General

JUAN CARLOS SUÁREZ SALAZAR
Vicerrector de Investigación e Innovación

JAVIER MARTÍNEZ PLAZAS
Vicerrector Académico

YISELA MÉNDEZ ROJAS
Vicerrectora Administrativa

PUBLICADO POR:
Editorial - Universidad de la Amazonia
2023

Diseño y diagramación:
Editorial Uniamazonia, Florencia - Caquetá

Esta obra es publicada por la Editorial - Universidad de la Amazonia
Florencia - Caquetá, 2023

Título de la obra

ELEMENTOS DE ELECTRODINÁMICA - NOTAS DE CLASE

Esta obra deberá ser citada de la siguiente manera:

OTÁLORA BONILLA, J. H. (2023). Elementos de Electrodinámica - Notas de clase. (Primera edición). Editorial Universidad de la Amazonia. (303) pp. Tamaño (16 x 20,7 cm).

Incluye bibliografía.

© Editorial - Universidad de la Amazonia

ISBN Físico: 978-958-5484-94-8

ISBN Digital 978-958-5484-95-5

Autor(es): JESUS HERNANDO OTÁLORA BONILLA

Número y año de edición: Primera edición, 2023.

Palabra claves: Leyes de maxwell, Ondas electromagnéticas, Campo electromagnético

Editor Latex, ilustración y caligrafía:

Diego Hernando Otálora Barrero.

Fotografía portada

Recreación artística de la época, Siglo XVIII, por Diego Hernando Otálora Barrero.

Universidad de la Amazonia

Vicerrectoría de Investigación e Innovación
Editorial Universidad de la Amazonia

Contacto: vrinvestigaciones@udla.edu.co
editorial@uniamazonia.edu.co
Florencia - Caquetá, 2023

Impresión y terminación: Universidad de la Amazonia
Tiraje: 200

Depósito Legal: Biblioteca Nacional de Colombia.

“El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión del (los) autor(es) y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de la Amazonia, ni genera su responsabilidad frente a terceros. El (los) autor(es) asume(n) la responsabilidad por los derechos de autor y conexos contenidos en la obra, así como por la eventual información sensible publicada en ella” Florencia, Caquetá, Colombia.



Prohibida la reproducción total o parcial de este con fines comerciales.
Su utilización se puede realizar con carácter académico, siempre que se cite la fuente.

Acerca del autor



Figura 1: Docente [Jesús Hernando Otálora Bonilla](#)

[Jesús Hernando Otálora Bonilla](#), magister en Enseñanza de la Física de la [Universidad Pedagógica Nacional \(UPN\)](#), especialista en Ciencias Físicas de la [Universidad Nacional de Colombia \(UN\)](#), licenciado en Física de la [Universidad Pedagógica Nacional \(UPN\)](#). Profesor asociado tiempo completo de la [Universidad de la Amazonia \(UA\)](#), Florencia - Caquetá, programa académico de Licenciatura en matemáticas y Física, facultad ciencias de la educación.

Nacido en Florencia - Caquetá, inició su carrera docente en la [Universidad de la Amazonia](#) en 1988, impartiendo las cátedras: *Electricidad y*

Magnetismo, e Historia de la Física. Actualmente dicta: Métodos matemáticos para la Física, Electrodinámica y Física Moderna. Ha depositado sus 34 años de carrera docente para escribir esta serie de 3 libros:

Elementos de electrodinámica (Notas de clase)

Sistemas coordenados curvilíneos ortogonales (Notas de clase)

*Métodos matemáticos para la física: Elementos de análisis vectorial
(Notas de clase)*

Presentación

“Hay quien dice que las teorías de James Clerk Maxwell se encuentran entre las más bellas de la historia de la ciencia. Puede que simplemente sea por la forma que eligió para explicarlas, quizás por la trascendencia que demostraron tener para el desarrollo de la ciencia física posterior o, sobre todo, por que sirvieron de inspiración a nada más y nada menos que a las ideas de Albert Einstein sobre la relatividad.

Pero, probablemente, la belleza de las aportaciones de este hombre pegado a sus creencias resida en el mismísimo objeto de sus investigaciones: la naturaleza íntima de la luz. Maxwell descubrió que la radiación luminosa es una onda y pertenece al espectro electromagnético. Nada más y nada menos”. (Alcalde, Jorge. Arquímedes, el del teorema).

Ese es, precisamente, el espíritu de estas notas de clase: mostrar la belleza y la potencia de las cuatro ecuaciones o leyes de Maxwell. Es muy común que, en los cursos de electromagnetismo o electrodinámica, se muestre al estudiante las leyes de Maxwell e incluso se las haga trabajar con ejercicios y, después pasar a una nueva temática sin señalar para nada su conexión con ellas. ¡Espero haber cumplido en muy buena parte con ese objetivo!

Para su elaboración se escogió el lenguaje vectorial, pues es el que permite reflejar plenamente la potencia y la belleza de la teoría; para escribir las notas de clase he realizado el ejercicio de considerarme hablándole a mis estudiantes en el salón de clase, y así conseguir un lenguaje que me permita un buen acercamiento con el estudiante o con quien llegue a utilizar estas notas; los ejemplos se han desarrollado de forma lo más

minuciosamente posible con el fin de ayudar a su comprensión, acompañándolos de ilustraciones apropiadas y en su mayoría realizadas por el autor, y, por último debo decir que, se suministra una amplia bibliografía pues, siempre he considerado el texto (en físico o electrónico) como la herramienta fundamental en el aprendizaje.

Estas notas de clase tituladas Elementos de electrodinámica, complementadas por las también notas de clase Sistemas coordenados curvilíneos ortogonales, son el producto de mi ejercicio docente en el espacio académico de Electrodinámica de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia, durante varios años. El espacio académico de Electrodinámica, nace de una necesidad surgida de las diferentes reestructuraciones realizadas al plan de estudio de la licenciatura, muchas de ellas con el objetivo de obtener el registro calificado de alta calidad.

También he sido durante varios años el titular de los espacios académicos de Métodos Matemáticos para la Física y Física Moderna. Sin embargo, el espacio académico que más evolucionó con las reformas curriculares fue el de Métodos Matemáticos para la física, evolución que aun no comprendo en su totalidad pero que me sigue preocupando, pues lo dimensiono como una evolución, no muy positiva, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y de la Física, así como en el interés hacia su estudio. Hace treinta y tres años, a mi llegada a la Universidad de la Amazonia (aunque no llegué como titular del espacio académico en mención), el programa oficial del espacio académico Métodos Matemáticos para la Física comprendía temas de análisis vectorial (suma, productos, derivación e integración vectorial), sistemas coordenados y operadores, álgebra lineal (espacios vectoriales, Matrices, problemas de valores propios), ecuaciones diferenciales de la física (Hermite, Legendre, Laguerre) y algunas funciones especiales.

Hoy día, el programa oficial del espacio académico mencionado comprende la parte de análisis vectorial, excluyendo la integración vectorial. En una de las reestructuraciones al plan de estudios de la licenciatura (desafortunadamente no recuerdo el año) se dio la posibilidad de introducir un nuevo espacio en el área de física; el área propuso, entonces, la introducción del espacio académico de Electrodinámica, como com-

plemento y profundización del espacio académico de electromagnetismo, pero fundamentalmente para rescatar temáticas que habían desaparecido de los Métodos Matemáticos para la física. Así, los sistemas coordenados, operadores y la integración vectorial pasaron a ser parte del espacio académico de electrodinámica; las ecuaciones diferenciales pasaron a ser parte del espacio académico de Física Moderna, las matrices y el problema de valores propios quedaron en el espacio original, por lo menos como tema de consulta.

Es cierto que en todo cambio existen circunstancias y hechos que lo podrían explicar o, por lo menos, atenuar. En el caso que se está considerando se puede señalar algunas como, el aumento en la población estudiantil, con el transcurso del tiempo se pasó de siete (7) u ocho (8) a veinte (20) o treinta (30) estudiantes; la edad de los estudiantes, quienes están ingresando cada vez más jóvenes a la universidad; en cada reforma los espacios académicos deben responder a las políticas institucionales y a los fundamentos didácticos y pedagógicos adoptados en el momento; y, algo muy importante, los avances tecnológicos representados, fundamentalmente, en los software etc.

Es cierto que en mi época de estudiante dentro de mi maleta debía viajar todos los días la tabla de logaritmo de Bruño, y si por cualquier razón se olvidaba la tabla, debía tener en la memoria los logaritmos de 2 y 3, por lo menos. Bueno eso fue superado con la aparición de las calculadoras, pero la definición y las propiedades de los logaritmos, por ejemplo, no fueron superados ni olvidados. ¡Hoy día la palabra demostración asusta! Pero basta.

Soy amante de la historia y la filosofía de la ciencia, y fundamentalmente de la física, por ello en los apéndices 5 y 6 he tratado de mostrar lo bello y lo difícil que contiene el desarrollo de la ciencia. También me he preocupado por acompañar estas notas de clase con una amplia bibliografía, que contiene textos de electrodinámica y electromagnetismo, pero también libros y revistas sobre tópicos concernientes al desarrollo de la electrodinámica.

Debo agradecer, obviamente, a la Universidad de la Amazonia por permitirme desarrollar, en estos treinta y tres (33) años mi carrera pro-

fesional, vinculado a la Facultad de Educación por intermedio del programa académico de Licenciatura en Matemáticas y Física. También debo agradecer a todos mis compañeros de trabajo, quienes hicieron de la institución un lugar amigable y agradable. ¡Qué experiencia tan hermosa encontrarse con alguno de ellos en alguno de los pasillos y comentar la situación institucional, o charlar sobre el cotarro político institucional del momento, o simplemente hacer una broma o contar un chiste, o simplemente un chisme!

Pero qué decir de mis estudiantes, quienes durante estos treinta y tres años me permitieron crecer profesionalmente pero también como amigo y persona. Y quienes en última instancia fueron los correctores de las presentes notas de clase.

Aunque, aparentemente, estos Elementos de electrodinámica parecen haber llegado tarde, pues el proyecto de Licenciatura en Matemáticas y Física, construido por cerca de cuarenta (40) años, ha desaparecido, guardo la esperanza que sirvan para la formación de muchos más profesionales de las diversas áreas en la Universidad de la Amazonia.

J.H.O.B
2022

Índice general

ELEMENTOS DE ELECTRODINÁMICA	3
1. LEYES DE MAXWELL. FORMA INTEGRAL Y FORMA DIFERENCIAL	3
1.1. Leyes de Maxwell: forma integral y forma diferencial	3
1.2. Ley de Gauss para el campo eléctrico en forma integral	5
1.3. Ley de Gauss para el campo eléctrico en forma diferencial . . .	7
1.4. De la forma integral a la forma diferencial mediante el teorema de la divergencia de Gauss	8
1.5. Ley de Gauss para el campo magnético en forma integral . . .	10
1.6. Ley de Gauss para el campo magnético en forma diferencial . . .	11
1.7. Ley de Faraday - Lenz en forma integral	12
1.8. Ley de Faraday - Lenz en forma diferencial	16
1.9. Forma integral de la Ley de Ampère - Maxwell	17
1.10. Forma diferencial de la Ley de Ampère - Maxwell	21
2. LEYES DE MAXWELL PARA EL ESPACIO LIBRE. ONDAS ELEC-	

TROMAGNÉTICAS	23
2.1. ¿Qué se considera como espacio libre?	23
2.2. La ecuación de onda electromagnética plana	24
2.3. La relación entre las amplitudes eléctrica y magnética	31
2.4. El espectro electromagnético	34
2.5. Un oscilador mecánico y un oscilador eléctrico	41
2.5.1. El péndulo simple	41
2.5.2. El circuito LC	44
2.6. El vector de Poynting	46
2.7. Intensidad o Irradiancia de una onda electromagnética	50
3. ECUACIONES DE MAXWELL PARA CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS INDEPENDIENTES DEL TIEMPO	55
3.1. Leyes de Maxwell para campos eléctricos y magnéticos estacionarios	55
3.2. Electrostática en el vacío	56
3.3. La ley de coulomb para el campo eléctrico entre cargas eléctricas puntuales	65
3.4. Campo eléctrico producido por un sistema N cargas eléctricas puntuales	69
3.5. Campo eléctrico producido por una distribución continua de carga eléctrica	78
3.6. Potencial eléctrico creado por una carga eléctrica puntual	92

ÍNDICE GENERAL

3.7. El potencial electrostático producido por distribuciones continuas de carga eléctrica	103
4. MAGNETOSTÁTICA	113
4.1. Las leyes de la magnetostática	113
4.2. La fuerza magnética sobre cargas eléctricas en movimiento	116
4.3. Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica	124
4.4. La ley de Ampère	132
4.5. La ley de Biot-Savart	144
4.6. Fuerzas entre corrientes paralelas	155
5. LA ECUACIÓN DE POISSON LA ECUACIÓN DE LAPLACE EL MÉTODO DE IMÁGENES	177
5.1. Las ecuaciones de Laplace y Poisson	177
5.2. El método de imágenes	188
APÉNDICES	217
A. Tres formas de escribir las leyes de Maxwell	217
B. Desarrollo de fourier para el pulso cuadrado	221
C. Desarrollo de fourier para el pulso diente de sierra	229

D. Clasificación de los materiales según sus propiedades eléctricas y los tres vectores eléctricos: $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$	241
D.1. Materiales conductores	241
D.2. materiales dieléctricos	245
D.3. Materiales semiconductores	247
E. Clasificación de los materiales según sus propiedades magnéticas y los tres vectores magnéticos: $\vec{H}, \vec{M}, \vec{B}$	249
E.1. Materiales diamagnéticos	252
E.2. Materiales paramagnéticos	252
E.3. Materiales ferromagnéticos	253
F. Las líneas físicas de fuerza	255
G. ¿Quién ha pedido eso?	265
BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS	271
Bibliografía	271
Referencias	273

Índice de cuadros

1.1. Leyes de Maxwell: forma integral y forma diferencial.	3
2.1. Leyes de Maxwell	24
2.2. Historia de la medida de C en km/s	27
3.1. Ecuaciones de Maxwell para campos estacionarios	56
4.1. Leyes de Maxwell Resumen	113
A.1. Notaciones de las leyes de Maxwell	217

Índice de figuras

1.	Docente Jesús Hernando Otálora Bonilla	
1.1.	Dos configuraciones equivalentes para el cálculo del flujo de campo eléctrico a través de la superficie S	6
1.2.	Figura para comprender el paso de la ley de Gauss para el campo eléctrico en forma integral a la forma diferencial	8
1.3.	Introducción en una bobina de un imán recto donde el galvanómetro muestra la corriente inducida en la bobina producida por el movimiento relativo imán - bobina	13
1.4.	Esquema que muestra el retroceso que sufre una espira al tratar de introducir en ella el imán recto. Eso es lo que propone la ley de Lenz, es decir, el signo negativo en la ley de Faraday - Lenz	13
1.5.	Esquema del circuito con condensador para analizar la ley de Ampere - Maxwell	18
2.1.	Onda electromagnética plana armónica mostrando sus dos componentes: Eléctrica y magnética	28
2.2.	Superficie rectangular para el cálculo del flujo magnético y la circulación magnética	31
2.3.	El espectro electromagnético	34

ÍNDICE DE FIGURAS

2.4. Esquema del circuito utilizado para estudiar la inducción electromagnética utilizado por, Hertz, en el descubrimiento de las ondas electromagnéticas llamadas ondas hertzianas . . .	36
2.5. Dispositivo eléctrico, Klistron, para producir microondas . . .	37
2.6. Dispositivo electrónico, magnetrón, para producir microondas	38
2.7. Primera radiografía mostrando la mano con el anillo de bodas de la esposa de, Wilhem Conrad Röntgen, quien descubrió los rayos X	41
2.8. El péndulo simple	42
3.1. Campo eléctrico de una carga puntual	57
3.2. Campo eléctrico interno y externo del modelo atómico de Thompson	60
3.3. Comportamiento del campo eléctrico producido por el modelo atómico de Thompson	62
3.4. Campo eléctrico producido por una carga eléctrica puntual cuando la carga se encuentra en el origen	66
3.5. Campo eléctrico producido por una carga eléctrica puntual cuando la carga se encuentra por fuera del origen	66
3.6. Campo eléctrico producido por un sistema de N cargas eléctricas puntuales en un punto P	69
3.7. Configuraciones de tres cargas eléctricas puntuales para el ejemplo 3.4.2	72
3.8. Esquema para la solución del ejemplo 3.4.3	75
3.9. Cálculo de la carga eléctrica y el ángulo formado para que el sistema se encuentre en equilibrio	77

ÍNDICE DE FIGURAS

3.10. Distribución lineal de carga eléctrica	79
3.11. Distribución plana de carga eléctrica	83
3.12. Distribución plana de carga eléctrica en coordenadas cilíndricas	86
3.13. Configuración para la solución del ejemplo 3.6.1	95
3.14. El dipolo eléctrico	99
3.15. Configuración para el ejercicio 2 del taller	102
3.16. Anillo circular cargado eléctricamente. Ejemplo 3.7.1	105
3.17. Barra cargada eléctricamente. Ejemplo 3.7.1	107
3.18. Cilindro circular recto cargado eléctricamente. Ejercicio 3 del taller.	111
4.1. Haz de electrones saliendo de una ventana de un tubo acelerador. Ejemplo 4.2.2	118
4.2. Esquema experimental de Thomson. Tubo de rayos catódicos. Ejemplo 4.2.3	122
4.3. La fuerza eléctrica, la fuerza magnética y la velocidad del haz electrónico en el experimento de Thomson. Ejemplo 4.2.3	122
4.4. Desviación del rayo electrónico producido por el campo eléctrico. Ejemplo 4.2.3	123
4.5. Desviación del rayo electrónico producido por el campo magnético. Ejemplo 4.2.3	123
4.6. Espira rectangular conductora parcialmente sumergida en un campo magnético uniforme soportando una masa m . Ejemplo 4.3.1	126

ÍNDICE DE FIGURAS

4.7. Alambre de metal dentro de un campo magnético uniforme y que se desliza sobre dos rieles. Ejemplo 4.3.2	127
4.8. Espira rectangular sumergida en un campo magnético y que puede girar sobre uno de sus lados. Ejemplo 4.3.3	129
4.9. Balanza de corriente o balanza de Ampère	135
4.10. Balanza de corriente o balanza ed Ampère	135
4.11. André Marie Ampère	136
4.12. Alambre recto que conduce una corriente estacionaria i . Ejemplo 4.4.1	136
4.13. ley de la mano derecha para establecer la dirección de un campo magnético producido por una corriente estacionaria. Ejemplo 4.4.1	138
4.14. Sección transversal de un sólido cilíndrico recto no magnético que conlleva una corriente estacionaria i . Ejemplo 4.4.2	139
4.15. Sólido cilíndrico recto no magnético que conlleva una corriente estacionaria i con coordenadas cilíndricas. Ejemplo 4.4.2	139
4.16. Comportamiento del campo magnético producido por un sólido cilíndrico recto no magnético que conlleva una corriente estacionaria i . Ejemplo 4.4.2	142
4.17. Solenoide cilíndrico conduciendo una corriente i . Ejemplo 4.4.3	142
4.18. Elemento infinitesimal de longitud de corriente que produce un campo magnético en el punt P	145
4.19. Alambre recto que conlleva una corriente estacionaria i y que produce un campo magnético \vec{B} . Ejemplo 4.5.1	146

ÍNDICE DE FIGURAS

4.20. Espira circular por la que circula una corriente estacionaria i y que produce un campo magnético \vec{B} en el punto P . Ejemplo 4.5.2	149
4.21. Bobinas de Helmholtz	152
4.22. Bobinas de Helmholtz para el ejemplo 4.5.3	153
4.23. Conductores eléctricos infinitamente largos que conllevan corrientes eléctricas estacionaria.	156
4.24. Cargas eléctricas puntuales moviéndose paralelamente. Ejemplo 4.6.1	158
4.25. Medición de la constante de un resorte mediante corrientes eléctricas estacionarias. Ejemplo 4.6.3	162
4.26. Barras rectilíneas que conducen corrientes eléctricas estacionarias y que se encuentran en equilibrio. Ejemplo 4.6.2	164
4.27. Espectrómetro de masa. Ejercicio 3	167
4.28. Conductor semicircular soportando una corriente eléctrica estacionaria. Ejercicio 7	169
4.29. Espira rectangular de alambre soportando una corriente eléctrica estacionaria i . Ejercicio 8	170
4.30. Alambre recto de longitud L que conduce una corriente estacionaria i . Ejercicio 11	171
4.31. Semi arco y dos conductores rectos para calcular el campo magnético \vec{B} en el punto O . Ejercicio 12	171
4.32. Conductor cilíndrico hueco. Ejercicio 13	172
4.33. Configuración de cuatro alambres de cobre conductores. Ejercicio 14	173
4.34. Cañón electromagnético. Ejercicio 15	173

ÍNDICE DE FIGURAS

4.35. Dos configuraciones de cuatro conductores para el cálculo del flujo magnético para cada una de las trayectorias mostradas. Ejercicio 16	174
5.1. Placas conductoras paralelas a potenciales 0 y V_0 . Ejemplo 5.1.1	182
5.2. Planos conductores aislados con potenciales 0 y V_0 . Ejemplo 5.1.2	186
5.3. Carga eléctrica Q y plano conductor conectado a tierra. Ejemplo 5.2.1	190
5.4. Planos semi infinitos en ángulo de 90° y una carga puntual Q . Ejemplo 5.2.2	191
5.5. Configuración equivalente al sistema mostrado en la figura 5.3. Ejemplo 5.2.1	192
5.6. Configuración equivalente al sistema mostrado en la figura 5.4	195
5.7. Configuración para el cálculo del potencial eléctrico debido a una carga eléctrica inicial y la carga imagen.	196
5.8. Configuración para el cálculo del potencial eléctrico producido por la carga eléctrica inicial y las tres cargas. Ejemplo 5.2.2	197
5.9. Fuerza eléctrica ejercida sobre la carga eléctrica inicial por las tres cargas. Ejemplo 5.2.2	197
5.10. Ubicación de los vectores para el cálculo del campo eléctrico creado en la posición de la carga inicial por las tres cargas . Ejemplo 5.2.2	200
5.11. Carga eléctrica lineal infinita y plano conductor colocado en potencial 0 . Ejemplo 5.2.3	203

ÍNDICE DE FIGURAS

5.12. Configuración equivalente a la mostrada en la figura 5.11 .	204
5.13. Vectores necesarios para el cálculo del campo eléctrico producido en el punto P por la configuración del ejemplo 5.2.3	205
5.14. Cálculo del campo eléctrico creado por la configuración del ejemplo 5.2.3 en el punto $(0, y, z)$	208
5.15. Configuración para el ejercicio 4	212
5.16. Configuración para el ejercicio 5	212
5.17. Configuración equivalente a la mostrada en la figura 5.16 .	213
B.1. Pulso cuadrado y su desarrollo en serie de Fourier para $n = 1$	225
B.2. Pulso cuadrado y su desarrollo en serie de Fourier para $n = 2$	226
B.3. Pulso cuadrado y su desarrollo en serie de Fourier para $n = 3$	227
B.4. Pulso cuadrado y su desarrollo en serie de Fourier para $N = 5$	228
C.1. Sintetizador de Fourier. Laboratorio de física Universidad de la Amazonia	235
C.2. Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 1$	236
C.3. Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 2$	237
C.4. Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 3$	238
C.5. Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 5$	239

ÍNDICE DE FIGURAS

C.6. Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 7$	240
E.1. Curva de histéresis de un material ferromagnético	254
F.1. Dibujos realizados por Faraday de las líneas de fuerza obtenidas con limadura de hierro.	258
F.2. Visualización de las líneas de fuerza obtenidas mediante descargas eléctricas en cepillos	259
F.3. Vórtices cartesianos de éter	260
F.4. Dibujo de las líneas de fuerza alrededor de un imán publicado por Faraday en 1831	261
F.5. Líneas de fuerza producidas por <i>a</i>) Cargas iguales de signo contrario. <i>b</i>) Cargas iguales de igual signo. <i>c</i>) Cargas de diferente valor y signo contrario	261
F.6. Hans Cristian Oersted realizando una demostración de su experimento	262
F.7. Un experimento aparentemente sencillo	262
F.8. Faraday pronunciando una de sus conferencias juveniles de navidad en la Royal Institution en 1856	263
G.1. Modelo mecánico utilizado por Maxwell para la formulación de su teoría electromagnética	268

ELEMENTOS DE ELECTRODINÁMICA

Capítulo 1

LEYES DE MAXWELL. FORMA INTEGRAL Y FORMA DIFERENCIAL

1.1. Leyes de Maxwell: forma integral y forma diferencial.

Cuadro 1.1: Leyes de Maxwell: forma integral y forma diferencial.

Nombre	Forma integral	Forma diferencial
Ley de Gauss para \vec{E}	$\oint \vec{E} \circ d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\nabla \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss para \vec{B}	$\oint \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\nabla \circ \vec{B} = 0$
Ley de Faraday - Lenz	$\oint \vec{E} \circ d\vec{r} = -\frac{d \oint \vec{B} \circ d\vec{S}}{dt}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$
Ley de Ampère - Maxwell	$\oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d \oint \vec{E} \circ d\vec{S}}{dt}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$

Cada una de las ecuaciones de Maxwell, ya sea en su forma integral o en su forma diferencial, representa una generalización de alguna observación experimental: la primera de ella es una ley equivalente a la ley de Coulomb, establecida por [Charles-Agustín de Coulomb](#) (1736-1806) en 1785 a través de su trabajo experimental con su balanza de torsión; de hecho la ley de Gauss para el campo eléctrico puede deducirse de la ley de Coulomb o ésta puede deducirse de la ley de Gauss. La segunda ecuación expresa el hecho de la no existencia de los monopolos magnéticos, al menos en el nivel macroscópico. Es decir, nos dice que siempre que partimos un imán cada uno de los trozos tiene sus respectivos polos magnéticos norte-sur. Lo anterior también significa que las líneas de campo magnético son cerradas, que salen por el polo norte y entran por el polo sur; diferente situación se presenta con las líneas de campo eléctrico, las cuales son abiertas y con ello se significa que se puede tener una carga eléctrica positiva sin la presencia de una carga eléctrica negativa.

La tercera ecuación, conocida como ley de inducción de Faraday-Lenz, es la expresión matemática de las observaciones realizadas en 1831 por Michael Faraday, cuando logra mostrar experimentalmente que un campo magnético puede inducir una corriente eléctrica en un conductor; dicha búsqueda dura alrededor de doce (12) años desde cuando en 1820 Hans Christian Oersted observó que un campo eléctrico producía un campo magnético alrededor del conductor. Con la ley de inducción se logra obtener una de las tantas simetrías que guarda la naturaleza. La cuarta de las ecuaciones es la generalización que James Clerk Maxwell (1831-1879) hace a la ley de Ampère en 1865 cuando publica su *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, en el cual sienta las bases del electromagnetismo considerado la segunda unificación de las fuerzas de la naturaleza, siendo considerada como la primera unificación la realizada por Newton cuando logra unificar la mecánica celeste con la mecánica terrestre. De hecho, la ley de Ampère es la expresión matemática para las observaciones realizadas por Oersted en 1820. El término agregado por Maxwell a la ley de Ampère se conoce con el nombre de *corriente de desplazamiento* y se hace necesario para explicar la continuidad en un circuito que contenga un condensador y para preservar así principios fundamentales como el de la conservación de la carga eléctrica o ecuación de continuidad. El hecho de que las ecuaciones de Maxwell representen una generalización de observaciones experimentales hacen que ellas no puedan ser deducidas

teóricamente, lo que las coloca como principios o leyes fundamentales de la naturaleza, y junto con la ecuación que describe la fuerza electromagnética explican todas las interacciones de tipo electromagnéticas, es decir, el *Electromagnetismo*.

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (1.1)$$

1.2. Ley de Gauss para el campo eléctrico en forma integral

$$\overbrace{\oint \vec{E} \circ d\vec{S}}^{\text{Integral de superficie}} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.2)$$

\leftarrow Carga neta encerrada en S
 \leftarrow Permitividad eléctrica del vacío

Campo eléctrico \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow Elemento diferencial de superficie
 Producto escalar

La integral de superficie, llamada también integral de flujo, mide la cantidad de campo eléctrico que pasa a través de una superficie S dentro de la cual se encuentra encerrada una carga eléctrica neta q ; es decir, el flujo eléctrico se escribe como:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{S} \quad (1.3)$$

Como la carga eléctrica es tanto positiva como negativa, entonces se entiende como carga eléctrica neta la carga que queda después de hacer el balanceo de la carga. Considere que dentro de una superficie S se encuentran encerradas cargas eléctricas de $3\mu\text{C}$, $-5\mu\text{C}$, $-8\mu\text{C}$ y $2\mu\text{C}$, entonces la carga eléctrica neta encerrada en S es de $-8\mu\text{C}$. (Figura 1.1).

Otra forma de interpretarse el resultado de la integral de flujo, es considerando que el flujo eléctrico que producen las cargas eléctricas po-

sitivas es positivo (es decir saliendo de la superficie S) mientras que el flujo eléctrico producido por las cargas eléctricas negativas es negativo (es decir entrando a la superficie S), y por lo tanto el flujo eléctrico medido por la integral de superficie constituye el flujo eléctrico neto que atraviesa la superficie S , es decir, la suma algebraica del flujo entrante y el flujo saliente.

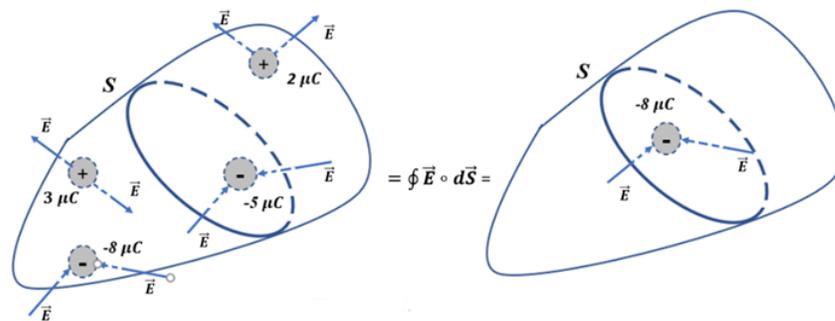


Figura 1.1: Dos configuraciones equivalentes para el cálculo del flujo de campo eléctrico a través de la superficie S

Por lo anterior la *Ley de Gauss para el campo eléctrico* establece que:

El flujo de campo eléctrico a través de la superficie (cerrada o abierta) S es igual a la carga eléctrica encerrada en ella dividida por la constante de permitividad eléctrica del material del cual está constituida la superficie.

1.3. Ley de Gauss para el campo eléctrico en forma diferencial

$$\nabla \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4)$$

Divergencia
 Operador Nabla → ∇ ← Densidad de carga ρ
 Producto escalar → \circ ← Permitividad eléctrica del vacío ϵ_0
 Campo eléctrico → \vec{E}

Si se calcula la integral de superficie de la ley de Gauss para el campo eléctrico sobre una superficie infinitesimal se obtiene la *Divergencia del campo eléctrico*; es decir que:

$$\nabla \circ \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \circ d\vec{S}}{\Delta V} \quad (1.5)$$

Por lo que se puede decir que la ley de Gauss para el campo eléctrico en su forma diferencial nos dice que el flujo de campo eléctrico en un punto del espacio limitado por una superficie que encierra un volumen infinitesimal se encuentra determinado por la densidad de carga eléctrica contenida en dicho volumen infinitesimal.

Como la densidad de carga eléctrica contenida en dicho punto puede ser positiva o negativa, entonces así mismo la divergencia del campo eléctrico puede ser tanto positiva como negativa. Se ha acordado que una divergencia positiva sale desde la carga eléctrica existente en dicho punto, es decir que se considera las cargas eléctricas positivas como fuentes de campo eléctrico. Por el contrario, si la carga eléctrica existente en dicho punto es negativa, ésta se asemeja a un sumidero y por lo tanto el campo eléctrico entra hacia la carga.

Resulta interesante resaltar la conexión entre las integrales de superficie y el operador divergencia la cual se encuentra reflejada en sus denominaciones: flujo y divergencia. Ello es bueno tenerlo de presente pues

estas operaciones y denominaciones son válidas para cualquier fluido y no solo para el campo eléctrico.

1.4. De la forma de la ley de Gauss para el campo eléctrico a su forma diferencial vía el teorema de la divergencia de Gauss

Considérese una carga eléctrica distribuida en un pequeño volumen V' la cual se encuentra encerrada en una superficie S que delimita un volumen V (ver figura 1.2) y calcúlese el flujo eléctrico a través de la superficie S .

$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

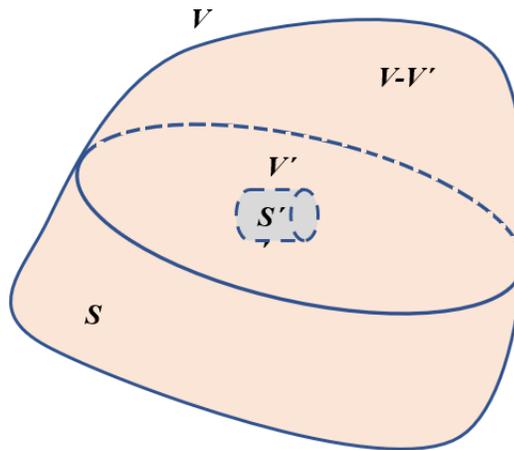


Figura 1.2: Figura para comprender el paso de la ley de Gauss para el campo eléctrico en forma integral a la forma diferencial

Defínase la densidad volumétrica de carga como

$$\rho = \frac{dq}{dV'} \quad (1.7)$$

Por lo que la ley de Gauss para el campo eléctrico puede escribirse como

$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{V'} \rho dV' \quad (1.8)$$

Utilizando el teorema de la divergencia de Gauss

$$\oint_V \nabla \circ \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{V'} \rho dV' \quad (1.9)$$

Puesto que en el volumen $V - V'$ no existe carga eléctrica, entonces podemos expandir la integral del lado derecho a todo el volumen V , con lo que

$$\oint_V \nabla \circ \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \oint \rho dV' + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{V-V'} \rho d(V - V')$$

$$\oint_V \nabla \circ \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_V \rho dV$$

$$\oint_V \left(\nabla \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) dV = 0$$

$$\boxed{\nabla \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.10)$$

1.5. Ley de Gauss para el campo magnético en forma integral

$$\overbrace{\oint \vec{B} \circ d\vec{S}}^{\text{Integral de superficie}} = 0 \quad (1.11)$$

Campo magnético
Elemento diferencial de superficie

Producto escalar

La integral de superficie, llamada también integral de flujo, mide la cantidad de campo magnético que pasa a través de una superficie S dentro de la cual se encuentra encerrado un imán con sus respectivos polos Norte-Sur; el flujo magnético se escribe como:

$$\phi_B = \oint \vec{B} \circ d\vec{S} \quad (1.12)$$

Que el flujo magnético a través de la superficie cerrada S sea cero, como lo establece la *ley de Gauss para el campo magnético*, significa que todo el flujo magnético que sale a través de la superficie S (por definición producido por el polo magnético norte del imán) vuelve a ingresar a través de la superficie S debido a la presencia del polo magnético sur del imán.

Por lo anterior la Ley de Gauss para el campo magnético establece que:

El flujo de campo magnético saliente de la superficie S , y producido por el polo magnético norte del imán es igual al flujo magnético entrante a la superficie S , producido por el polo magnético sur del imán, dando un flujo magnético neto cero a través de la superficie S .

De lo anterior se pueden inferir dos consecuencias:

1. La primera es que los dos polos magnéticos de un imán tienen

la misma carga magnética (si admitimos que la acción magnética se debe a lo que se llama carga magnética, en analogía a la carga eléctrica)

- La segunda es que las líneas de fuerza del campo magnético son líneas cerradas, que nacen (por definición) en el polo magnético norte del imán y entran al imán por el polo magnético sur. Dicho de otra forma, la presencia de uno de los polos magnéticos implica necesariamente la presencia del otro polo magnético; Siempre que se parte un imán se producen dos imanes con sus respectivos polos norte-sur, por lo menos si permanecemos en el nivel clásico.

1.6. Ley de Gauss para el campo magnético en forma diferencial

$$\begin{array}{c}
 \text{Divergencia} \\
 \text{Operador nabla} \longrightarrow \overbrace{\nabla \circ \vec{B}} = 0 \\
 \text{Producto escalar} \longleftarrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \longleftarrow \text{Campo magnético}
 \end{array}
 \tag{1.13}$$

Si se calcula la integral de superficie de la ley de Gauss para el campo magnético sobre una superficie infinitesimal se obtiene la **Divergencia del campo magnético**; es decir que:

$$\nabla \circ \vec{B} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} \circ d\vec{S}}{\Delta V}
 \tag{1.14}$$

Por lo que se puede decir que la ley de Gauss para el campo magnético en su forma diferencial nos dice que el flujo de campo magnético en un punto del espacio limitado por una superficie que encierra un volumen infinitesimal es cero (0). Igual que para la ley de Gauss del campo eléctrico, resulta interesante resaltar la conexión entre las integrales de superficie y el operador divergencia la cual se encuentra reflejada en sus

denominaciones: flujo y divergencia. Ello es bueno tenerlo presente pues estas operaciones y denominaciones son válidas para cualquier fluido y no solo para el campo magnético. Se puede ver que el paso de la forma integral de la ley de Gauss para el campo magnético a su forma diferencial es inmediato, mediante la aplicación del teorema de la divergencia de Gauss.

$$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0 \quad (1.15)$$

Cambiando la integral de superficie por la integral de volumen de la divergencia del campo magnético, se obtiene:

$$\oint \nabla \circ \vec{B} dV = 0$$

$$\boxed{\nabla \circ \vec{B} = 0} \quad (1.16)$$

1.7. Ley de Faraday - Lenz en forma integral

$$\overbrace{\oint \vec{E} \circ d\vec{r}}^{\text{Integral de línea}} = - \frac{d}{dt} \overbrace{\oint \vec{B} \circ d\vec{S}}^{\text{Integral de superficie}} \quad (1.17)$$

Campo eléctrico
Elemento diferencial de superficie

Elemento diferencial del línea
Producto escalar

Derivada temporal
Campo magnético

En las figuras 1.3 y 1.4, se muestran los esquemas de dos experimentos sencillos que se pueden realizar en el laboratorio, en ellos se muestra que cuando el imán se mueve respecto a la bobina (o la espira) se produce en ésta una corriente eléctrica, detectada en el galvanómetro G , cuya dirección depende de si el imán se acerca o se aleja de la bobina. La corriente

establecida en el embobinado se llama corriente inducida y como toda corriente eléctrica se debe a un voltaje, entonces, al voltaje que produce la corriente inducida en la bobina (o la espira) se le llama **Fuerza electromotriz inducida (FEM)**, aludiendo al hecho que dicho voltaje no se debe a una diferencia de potencial entre dos puntos, como en el caso de una batería o de una pila.

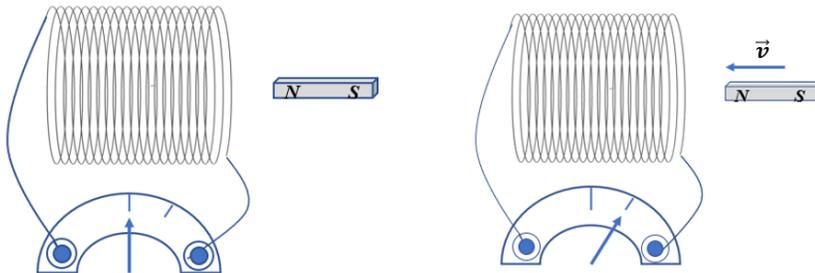


Figura 1.3: Introducción en una bobina de un imán recto donde el galvanómetro muestra la corriente inducida en la bobina producida por el movimiento relativo imán - bobina

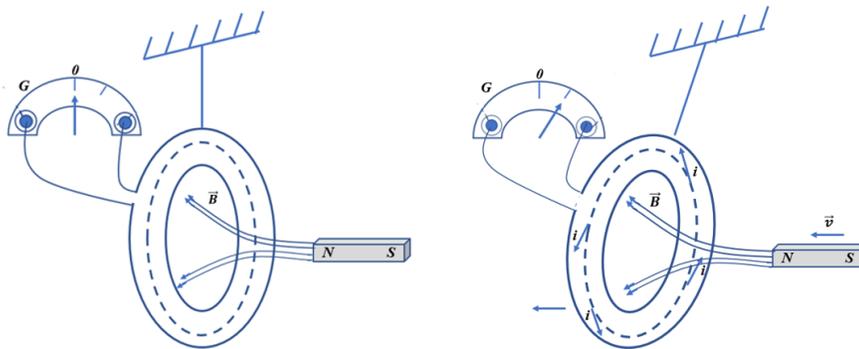


Figura 1.4: Esquema que muestra el retroceso que sufre una espira al tratar de introducir en ella el imán recto. Eso es lo que propone la ley de Lenz, es decir, el signo negativo en la ley de Faraday - Lenz

Como el movimiento del imán produce una variación del flujo de campo magnético que atraviesa el área transversal de la bobina, es dicha variación la causa de la FEM inducida y ello es lo que precisamente establece la ley de Faraday):

$$FEM = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1.18)$$

Siempre que varía el flujo magnético que fluye a través del área transversal de un circuito cerrado se origina en el circuito una FEM inducida la cual establece una corriente eléctrica inducida en el circuito; el valor de la FEM inducida es igual a la variación temporal del flujo magnético.

En la figura 1.4 se muestra que al tratar de introducir el imán en la espira ésta retrocede, retroceso que indica la oposición que hace la corriente creada en la espira para evitar la variación del flujo magnético; si se pudiera minimizar la fricción entre la bobina y la mesa sucedería algo similar. Vale aclarar que el tratar de retirar el imán, ésta se va hacia el imán y la corriente invierte su dirección. Los mismos efectos se dan con el polo sur del imán, pero invertidos.

El retroceso desde o hacia el imán por parte de la espira (o de la bobina) representa la ley de Lenz y está representada por el signo menos en la ecuación que expresa la ley.

La corriente inducida en el circuito crea a su vez un campo magnético alrededor de la espira (o en la bobina, similar al campo magnético de un imán recto) que se opone al cambio del campo magnético del imán que atraviesa la espira (o la bobina).

La existencia de la corriente eléctrica inducida alrededor de la espira implica la existencia de un campo eléctrico que acelera los electrones dentro de la espira. Por su carácter vectorial dicho campo debe ser tangente en cada punto a una trayectoria circular dentro de la espira. La circulación de dicho campo eléctrico, es decir, la integral de línea del campo eléctrico alrededor de la trayectoria circular tiene unidades de voltaje (voltios),

por lo que se puede decir que la FEM inducida está definida por dicha circulación, es decir:

$$FEM = \oint \vec{E} \circ d\vec{r} \quad (1.19)$$

Si recordamos que el flujo magnético está dado por

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \circ d\vec{S} \quad (1.20)$$

Entonces se puede escribir la ley de Faraday-Lenz como

$$\oint \vec{E} \circ d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \circ d\vec{S} \quad (1.21)$$

Vale la pena resaltar que:

1. Para la existencia del campo eléctrico inducido no necesariamente debe haber una espira de alambre.
2. La integral de línea es independiente de la geometría de la trayectoria; ésta no necesariamente debe ser circular.
3. El campo eléctrico inducido no es un campo conservativo, pues su integral de línea calculada para una trayectoria cerrada no es cero sino igual a la rapidez con que el flujo magnético, a través de ella, cambia.
4. Lo expresado en 1,2 y 3 refuerzan la diferencia entre una FEM inducida y una diferencia de potencial que se establece, por ejemplo, entre los bornes de una batería o de una pila.
5. La ley de Faraday-Lenz es una de las leyes de mayor impacto práctico, pues con ella se explican los transformadores e inductores componentes de los circuitos electrónicos de la radio y la televisión, los generadores de corriente AC que surten de energía a la mayoría

del mundo, las corrientes parásitas o de Foucault, el teléfono, el micrófono, los aceleradores de partículas como el Betatrón etc.

6. La FEM inducida por la variación del flujo magnético, puede producirse por movimiento relativo imán - espira, o por deformación o rotación de la espira.

1.8. Ley de Faraday -Lenz en forma diferencial

Rotacional del campo eléctrico

$$\overbrace{\nabla \times \vec{E}} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \left. \begin{array}{l} \text{Derivada temporal del campo} \\ \text{magnético} \end{array} \right\} \quad (1.22)$$

La forma diferencial, o forma puntual, de la ley de Faraday- Lenz muestra de una forma explícita la relación existente entre el campo eléctrico y el campo magnético en cualquier punto del espacio y expresa claramente el hecho de que un campo magnético que varía en el tiempo produce un campo eléctrico. Dicha consideración es fundamental tenerla presente para la comprensión de la propagación de una onda electromagnética.

Su obtención se realiza de forma sencilla aplicando el teorema del rotacional de Stokes a la forma integral de la ley de Faraday-Lenz. Recordemos que el teorema del rotacional de Stokes establece que

$$\int_C \vec{A} \circ d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \circ \hat{n} dS \quad (1.23)$$

Reemplazando la integral de línea por una integral de superficie calculada sobre la superficie que encierra la curva C , se obtiene:

$$\oint (\nabla \times \vec{E}) \circ d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \oint \vec{B} \circ d\vec{S}$$

$$\oint (\nabla \times \vec{E}) \circ d\vec{S} = - \oint \frac{d\vec{B}}{dt} \circ d\vec{S}$$

$$\oint \left[(\nabla \times \vec{E}) + \frac{d\vec{B}}{dt} \right] \circ d\vec{S} = 0$$

$$(\nabla \times \vec{E}) + \frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{0}$$

$$\boxed{\nabla \times E = - \frac{d\vec{B}}{dt}} \tag{1.24}$$

1.9. Forma integral de la Ley de Ampère - Maxwell

$$\underbrace{\oint \vec{B} \circ d\vec{r}}_{\text{Integral de línea}} = \mu_0 i + \underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{\text{Permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío}} \underbrace{\frac{d \oint \vec{E} \circ d\vec{S}}{dt}}_{\text{Integral de superficie}} \tag{1.25}$$

Campo magnético — \vec{B}
 Elemento diferencial de línea — $d\vec{r}$
 Corriente eléctrica de conducción — i
 Permutividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío — $\epsilon_0 \mu_0$
 Integral de superficie — $\oint \vec{E} \circ d\vec{S}$
 Producto escalar — \circ
 Derivada temporal — $\frac{d}{dt}$

Como se dijo anteriormente, la cuarta de las ecuaciones o leyes de Maxwell es una generalización de la ley de Ampère hecha por Maxwell. La ley de Ampère establece que una corriente eléctrica estacionaria en un conductor produce un campo magnético alrededor del conductor, observación realizada con anterioridad por Oersted.

$$\oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \mu_0 i \quad (1.26)$$

Pero si se analiza un circuito eléctrico que contenga un condensador además de la fuente de voltaje, figura 1.5, no es posible explicar la continuidad del circuito desde el momento en que se conecta la fuente hasta el momento en que el condensador alcanza su máxima carga, así como tampoco el por qué el circuito deja de funcionar en ese instante.

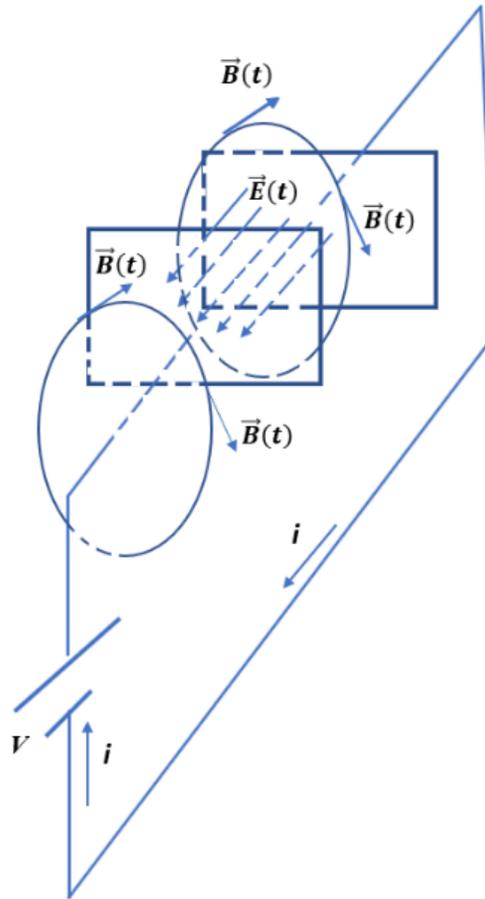


Figura 1.5: Esquema del circuito con condensador para analizar la ley de Ampere - Maxwell

Maxwell se dio cuenta que, así como un campo magnético producía un campo eléctrico tal como lo establece la ley de Faraday-Lenz, similarmente un campo eléctrico produciría un campo magnético.

Y es que, si prescindimos del primer término del lado derecho de la cuarta ley de Maxwell obtenemos la relación simétrica de la relación expresada en la tercera de las leyes de Maxwell.

$$\oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \circ d\vec{S} \quad (1.27)$$

Si aplicamos esta relación al condensador del circuito anterior, vemos que al conectarse la fuente de voltaje el condensador comienza a cargarse adquiriendo carga eléctrica de signo contrario en cada una de sus placas lo que conlleva al establecimiento de un campo eléctrico variable, entre sus placas, cuyo valor varía desde cero (0) hasta un valor máximo cuando el condensador adquiere su máxima carga, con lo que a través de cualquier superficie abierta dentro del condensador se establece un flujo de campo eléctrico, creando un campo magnético rotante alrededor del campo eléctrico, en situación similar a lo que sucede en los conductores que completan el circuito. Obviamente el flujo de campo eléctrico deja de ser variable una vez que el campo eléctrico alcance su valor máximo y así el circuito se interrumpe.

Obviamente, el principio de conservación de la carga eléctrica, o su equivalente la ecuación de continuidad, queda salvada.

El término

$$\epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \circ d\vec{S} \quad (1.28)$$

tiene las siguientes unidades en el sistema internacional:

$$\left[\epsilon_0 \oint \vec{E} \circ d\vec{S} \right]_I = \left[\left(\frac{C^2}{Nm^2} \frac{Nm^2}{C} \right) \right]$$

$$\boxed{\left[\epsilon_0 \oint \vec{E} \circ d\vec{S} \right]_I = C}$$

Es decir que

$$\epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \circ d\vec{S} \equiv \frac{dQ}{dt} \quad (1.29)$$

$$\epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \circ d\vec{S} \equiv i \quad (1.30)$$

Maxwell llamó a este término *corriente de desplazamiento* señalando con ello que es una corriente eléctrica que no necesita de conductor alguno, con lo que la cuarta ley de Maxwell puede escribirse como

$$\oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \mu_0 (i_C + i_D) \quad (1.31)$$

La deducción de la corriente de desplazamiento (así como de la corriente de polarización, la cual se tratará más adelante) por parte de Maxwell conlleva una de las tantas situaciones curiosas que se presentan dentro de la historia de las ciencias.

Para obviar el problema de la acción a distancia, el cual mortificó enormemente a Newton, los físicos, matemáticos y filósofos de los siglos XVIII-VIII utilizaron el concepto de vórtice (o remolino) para explicar acciones como la gravitatoria.

Maxwell no fue la excepción y para el desarrollo de su teoría electromagnética utilizó un sistema de vórtices hexagonales (similar a un panel) los cuales rotaban y por ende se comprimían y se sometían a una presión; un modelo netamente mecánico.

Curiosamente la teoría electromagnética de Maxwell resultó incompatible con las transformadas galileanas, pues no eran invariantes bajo ellas.

Dicha situación llevó a una revisión de los conceptos de espacio y tiempo, es decir de la mecánica de Newton, revisión que hoy en día conocemos como *Teoría Especial de la Relatividad*.

1.10. Forma diferencial de la Ley de Ampère - Maxwell

$$\overbrace{\nabla \times \vec{B}}^{\text{Rotacional}} = \underbrace{\mu_0 \vec{J}}_{\substack{\text{Campo magnético} \\ \text{Permeabilidad magnética}}} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}}_{\substack{\text{Corriente de desplazamiento} \\ \text{Permitividad eléctrica} \\ \text{Densidad de corriente}}} \quad (1.32)$$

La forma diferencial, o puntual, de la ley de Ampère-Maxwell se obtiene mediante el teorema del rotacional de Stokes.

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{r} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} \quad (1.33)$$

Sea \vec{J} la densidad de corriente, tal que:

$$i = \oint_S \vec{J} \circ d\vec{S} \quad (1.34)$$

$$\oint_S (\nabla \times \vec{B}) \circ d\vec{S} = \mu_0 \oint_S \vec{J} \circ d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S}$$

$$\oint_S (\nabla \times \vec{B}) \circ d\vec{S} = \mu_0 \left(\oint_S \vec{J} \circ d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} \right)$$

$$\oint_S (\nabla \times \vec{B}) \circ d\vec{S} = \mu_0 \oint_S \left(\vec{J} \circ d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \circ d\vec{S}) \right)$$

$$\oint_S (\nabla \times \vec{B}) \circ d\vec{S} = \mu_0 \oint_S \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \circ d\vec{S}$$

$$\oint_S (\nabla \times \vec{B}) \circ d\vec{S} - \oint_S \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \circ d\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \left(\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \circ d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (1.35)$$

Capítulo 2

LEYES DE MAXWELL PARA EL ESPACIO LIBRE. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

2.1. ¿Qué se considera como espacio libre?

Se considera espacio libre a todo medio homogéneo e isotrópico, donde además no existan cargas eléctricas como tampoco corrientes eléctricas. Dicho espacio libre puede entonces caracterizarse por:

$$\rho = 0 \quad \vec{j} = 0 \quad \mu = \text{Constante} \quad \epsilon = \text{Constante}$$

Siendo ρ la densidad de carga eléctrica, \vec{j} la densidad de corriente, μ la permeabilidad magnética y ϵ la permitividad eléctrica.

Puede verse que el espacio vacío puede considerarse como un espacio libre y por tanto:

$$\mu = \mu_0 \quad \epsilon = \epsilon_0$$

Por tanto las ecuaciones o leyes de Maxwell, tanto en su forma integral como en su forma diferencial, para el espacio libre toman la forma que se muestra en el siguiente cuadro.

Cuadro 2.1: Leyes de Maxwell

Nombre	Forma integral	Forma diferencial
Ley de Gauss para \vec{E}	$\oint \vec{E} \circ d\vec{S} = 0$	$\nabla \circ \vec{E} = 0$
Ley de Gauss para \vec{B}	$\oint \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\nabla \circ \vec{B} = 0$
Ley de Faraday - Lenz	$\oint \vec{E} \circ d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \circ d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$
Ley de Ampère -Maxwell	$\oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \circ d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$

2.2. La ecuación de onda electromagnética plana

Aplicando el rotacional a, por ejemplo, la tercera ecuación o ley de Maxwell en su forma diferencial, se obtiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2.1)$$

Pero, el Laplaciano para un campo vectorial está definido como el gradiente de la divergencia del campo vectorial menos el rotacional del rotacional del campo vectorial. Es decir:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla (\nabla \circ \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (2.2)$$

Por tanto:

$$\nabla \left(\nabla \circ \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E} = - \frac{d \left(\nabla \times \vec{B} \right)}{dt}$$

Según la primera y la cuarta de las ecuaciones o leyes de Maxwell:

$$\nabla \left(\nabla \circ \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E} = - \frac{d \left(\nabla \times \vec{B} \right)}{dt} \quad (2.3)$$

Según la primera y la cuarta de las ecuaciones o leyes de Maxwell:

$$-\nabla^2 \vec{E} = - \frac{d}{dt} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \quad (2.4)$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = 0} \quad (2.5)$$

Similar ecuación se obtiene para el campo magnético, si aplicamos el rotacional a la cuarta ecuación o ley de Maxwell:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = 0} \quad (2.6)$$

Una onda mecánica unidimensional (la producida en una cuerda, por ejemplo), obedece la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

Una onda mecánica bidimensional (las ondas en el agua, por ejemplo) obedece la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{dy^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{dt^2} \quad (2.8)$$

Una onda mecánica tridimensional (las ondas sonoras, por ejemplo) obedece la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{dy^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{dz^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{dt^2} \quad (2.9)$$

Ecuaciones que pueden escribirse como:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad (2.10)$$

Siendo φ la función de onda y v la velocidad de propagación de la onda. Comparando las ecuaciones obtenidas para el campo eléctrico y el campo magnético con la ecuación de una onda mecánica, se observa que dichas ecuaciones describen ecuaciones de onda para \vec{E} y \vec{B} con $v = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$.

Puesto que

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m} \approx 12,6 \times 10^{-7} \text{H/m}$$

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{F/m} \approx 8,854187817 \times 10^{-12} \text{F/m}$$

y que

$$\frac{H}{m} = \frac{Vsg}{Am} \quad (2.11)$$

$$\frac{F}{m} = \frac{Asg}{Vm} \quad (2.12)$$

Por lo que

$$[\mu_0\epsilon_0]_{S.I} = \text{sg}^2/\text{m}^2$$

Por tanto

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} \approx 299'392,117,84 \text{ m/sg}$$

En la tabla 2.2 se muestran algunas de las mediciones experimentales de la velocidad de la luz, las cuales se encuentran cercanas al valor de $3 \times 10^8 \text{ m/sg}$, el valor aceptado hoy en día para la velocidad de la luz.

< 1638	Galileo, señales con linternas	no concluyente
< 1667	Accademia del Cimento, señales con linternas	no concluyente
1675	Romer y Huygens, lunas de Júpiter	220000
1729	James Bradley, aberración de la luz	301000
1849	Hippolyte Fizeau, rueda dentada	315000
1862	Léon Foucault, espejo en rotación	298000 ± 500
1907	Rosa y Dorsey, Constantes electromagnéticas	299710 ± 30
1926	Albert A. Michelson, espejo en rotación	299796 ± 4
1950	Essen y Gordon-Smith, cavidad resonante	299792,5 ± 3,0
1958	K.D. Froome, radio interferometría	299792,50 ± 0,10
1972	Evenson y otros, interferometría láser	199792,4562 ± 0,0011
1983	17° CGMP, definición del metro	299792,458 (Exacta)

Cuadro 2.2: Historia de la medida de C en km/s

Por lo tanto, la luz se considera como una onda con dos planos de oscilación, o, si se quiere con dos grados de libertad, mutuamente, acoplados: uno para el campo eléctrico y el otro para el campo magnético. Es decir, la luz es una onda electromagnética. Figura 2.1.

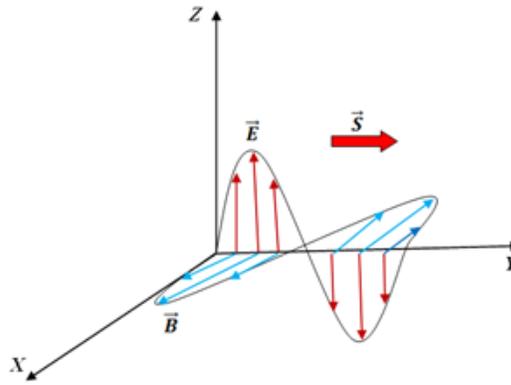


Figura 2.1: Onda electromagnética plana armónica mostrando sus dos componentes: Eléctrica y magnética

Al igual que para las ondas mecánicas, las ecuaciones diferenciales para la magnitud del campo eléctrico y la magnitud del campo magnético admiten las soluciones armónicas, es decir soluciones senoidales.

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad (2.13)$$

$$B_z = B_0 \sin(kx - \omega t) \quad (2.14)$$

En el caso de las ondas planas, en el cual el campo eléctrico oscila en el plano $(x - y)$, y el campo magnético oscila en el plano $(x - z)$. Siendo así, la onda se propaga en la dirección x positiva; dicha dirección de propagación se encuentra definida por el llamado vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.15)$$

Cualquier solución no armónica puede resolverse mediante soluciones armónicas, tal como lo establece la teoría de Fourier:

Desarrollo en serie de Fourier de una función periódica.

Si $f(t)$ es una función periódica, con período T , entonces su desarrollo en serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right] \quad (2.16)$$

Donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt$$

Con las siguientes propiedades:

1. Si la función $f(t)$ es impar, es decir si $f(-t) = -f(t)$, entonces los coeficientes a_0 y a_n son cero.
2. Si la función $f(t)$ es par, es decir si $f(-t) = f(t)$, entonces los coeficientes b_n son cero.

Al igual que para las ondas mecánicas se define k , el número de onda, como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.17)$$

k , puede interpretarse como una frecuencia espacial la cual mide el corrimiento de fase de la onda por unidad de longitud en la dirección de propagación de la onda, y sus unidades son:

$$[k]_I = m^{-1} \quad (2.18)$$

Así mismo ω es la frecuencia angular de la onda y está dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.19)$$

Es decir que ω el corrimiento de fase de la onda por unidad de tiempo, y sus unidades son:

$$[\omega]_I = \text{sg}^{-1} \quad (2.20)$$

Por lo que:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \quad (2.21)$$

Y, puesto que

$$\lambda = cT \quad (2.22)$$

Entonces

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = c} \quad (2.23)$$

Que es otra forma de obtención de la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas.

2.3. La relación entre las amplitudes eléctrica y magnética

Las amplitudes de las ondas eléctrica (E_0) y magnética (B_0), guardan una relación simple pero fundamental:

$$E_0 = cB_0 \quad (2.24)$$

Puesto que la constante de proporcionalidad es la velocidad de la luz, la cual no es pequeña, se entiende el por qué una onda electromagnética es más sensible a las interacciones eléctricas que a las magnéticas.

Para ver dicha relación, calculemos el flujo magnético a través de la superficie limitada por un rectángulo $a - b - c - d - a$, y la circulación del campo eléctrico alrededor de la curva definida por el rectángulo mencionado:

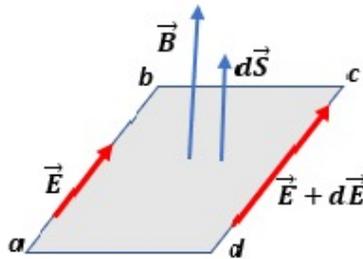


Figura 2.2: Superficie rectangular para el cálculo del flujo magnético y la circulación magnética

$$\int_S \vec{B} \circ d\vec{S} = \int_S \vec{B} \circ \hat{k} dS \quad (2.25)$$

$$\int_S \vec{B} \circ d\vec{S} = \int_S B dS$$

$$\int_S \vec{B} \circ d\vec{S} = B \int_S dS$$

$$\boxed{\int_S \vec{B} \circ d\vec{S} = B dx dy} \quad (2.26)$$

De otra parte:

$$\int_C \vec{E} \circ d\vec{r} = \int_a^b \vec{E} \circ d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \circ d\vec{r} + \int_c^d \vec{E} \circ d\vec{r} + \int_e^f \vec{E} \circ d\vec{r} \quad (2.27)$$

Puesto que para las trayectorias $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ y $\mathbf{d} - \mathbf{e}$ el campo eléctrico y el elemento de línea son perpendiculares, entonces las integrales respectivas son cero. Por tanto:

$$\int_C \vec{E} \circ d\vec{r} = \int_a^b E dr + \int_c^d E dr \quad (2.28)$$

$$\int_C \vec{E} \circ d\vec{r} = E \int_0^{-dy} dr + (E + dE) \int_{-dy}^0 dr \quad (2.29)$$

$$\int_C \vec{E} \circ d\vec{r} = -E dy + E dy + dE dy \quad (2.30)$$

$$\int_C \vec{E} \circ d\vec{r} = dE dy \quad (2.31)$$

Utilizando la ley de Faraday-Lenz:

$$\int \vec{E} \circ d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \circ d\vec{S} \quad (2.32)$$

Se tiene:

$$dE dy = -\frac{d(B dx dy)}{dt} \quad (2.33)$$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt} \quad (2.34)$$

Pero:

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$B_z = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

Por lo que:

$$\frac{dE_y}{dx} = kE_0 \cos(kx - \omega t) \quad (2.35)$$

$$-\frac{dB_z}{dt} = \omega B_0 \cos(kx - \omega t) \quad (2.36)$$

Entonces:

$$kE_0 = \omega B_0 \quad (2.37)$$

$$E_0 = \frac{\omega}{k} B_0 \quad (2.38)$$

Pero:

$$\frac{\omega}{k} = c$$

Luego:

$$E_0 = cB_0 \tag{2.39}$$

2.4. El espectro electromagnético

Con la publicación de su obra titulada *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* en 1865, en la cual sienta las bases de la teoría electromagnética con el establecimiento de sus famosas y fundamentales leyes (o ecuaciones), James Clerk Maxwell, físico escocés (1831- 1879), predice la existencia de las ondas electromagnéticas.

Pero es en 1887 cuando el físico alemán *Heinrich Rudolf Hertz* (1857-1894) obtiene en su laboratorio de la universidad de Karlsruhe las primeras ondas electromagnéticas, hoy en día conocidas como ondas de radio u ondas hertzianas.

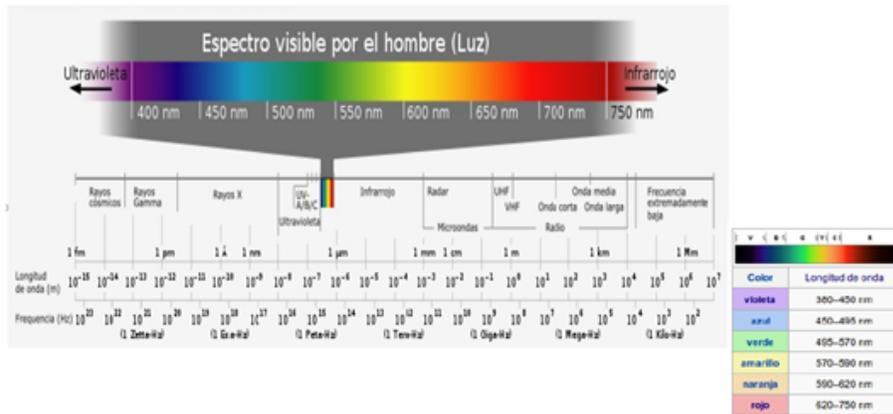


Figura 2.3: El espectro electromagnético

Si bien es cierto que en la vida diaria estamos acostumbrados a llamar luz a la radiación (natural o artificial) que nos permite ver los objetos (la región visible), lo cierto es que dicha radiación corresponde a una pequeña región, la más pequeña, por cierto, de la clasificación que se ha hecho de las ondas electromagnéticas y que hoy día se llama *espectro electromagnético* figura 2.3. Es decir, toda onda electromagnética es luz y por tanto la luz visible es una onda electromagnética. Dicho espectro se ha establecido clasificando las ondas electromagnéticas, ya sea por su frecuencia, longitud de onda o por su contenido energético. Dos observaciones son necesarias hacer con respecto al espectro electromagnético; la primera es que las diferentes regiones del espectro no tienen fronteras definidas entre ellas, sino que dichas fronteras se traslapan. Ello significa que se puede tener una onda electromagnética de rayos X y una onda electromagnética de rayos ultravioleta con las mismas características (frecuencia, longitud de onda o contenido energético) y en primera instancia no podemos decidir cuál es cuál. Para ello, se debe recurrir a su forma de producción, a sus efectos sobre la materia, a su forma de detección, etc. Lo segundo para observar en el espectro, es la variación inversa que tienen las escalas de frecuencia y longitud de onda; mientras que la una crece de izquierda a derecha, la otra lo hace en dirección contraria. Ello se debe, obviamente, a la relación

$$\lambda = c/f \quad (2.40)$$

Por ello, es que se dice con frecuencia que las ondas electromagnéticas de alta frecuencia son ondas de corta longitud de onda, y, las ondas de longitud de onda larga son ondas de baja frecuencia. El contenido energético de una onda electromagnética, según la física cuántica es

$$E = hf \quad (2.41)$$

También debe decirse que las ondas de alta frecuencia son más energéticas.

Las regiones del espectro electromagnético son:

Ondas de radio

Son ondas electromagnéticas con frecuencias entre **una giga Hertz** 10^9 hertz y 10^4 hertz, es decir, una longitud de onda comprendida entre los $10^{-1}m$ y 10^4m .

Se utilizan fundamentalmente en las comunicaciones y como tales son administradas por los gobiernos, pues a cada país le es asignado un rango de frecuencia para sus respectivas comunicaciones, y cada gobierno administra dicho rango para expedir las correspondientes licencias a sus emisoras, estaciones televisivas y a cualquier otra forma de comunicación que utilice. Por ello, muchas veces se acostumbra referirse a esta región del espectro electromagnético como **el espectro electromagnético político**.

Se reconocen algunas regiones dentro de las ondas de radio, y que hoy en día son muy conocidas. **Las ondas de radio de media onda** ($300Khz - 3Mhz$) utilizadas fundamentalmente en la radiodifusión, **las de onda corta** $3Mhz - 30Mhz$ utilizadas por radioaficionados y la radio internacional; **las VHF (Very High Frequency)** ($30Mhz - 300Mhz$) utilizadas en la televisión, radiodifusión en FM, banda aérea, satélites, comunicaciones entre buques y control de tráfico marítimo, y **las UHF (Ultra High Frequency)** ($300MHz - 3GHz$) utilizadas en la televisión nacional e internacional, la telefonía móvil, radios de uso no profesional o radiotransmisores de uso personal e identificación de productos.

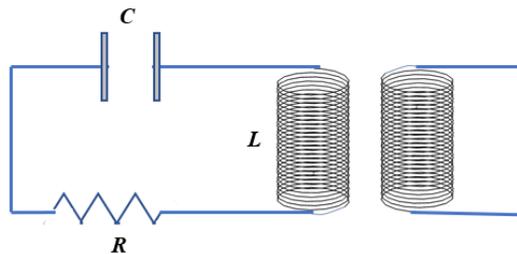


Figura 2.4: Esquema del circuito utilizado para estudiar la inducción electromagnética utilizado por, Hertz, en el descubrimiento de las ondas electromagnéticas llamadas ondas hertzianas

Las ondas de radio se producen fundamental por los llamados osciladores eléctricos, de los cuales dos son muy conocidos: El dipolo eléctrico, el cual es la disposición de dos cargas eléctricas puntuales, de diferente signo, separadas una pequeña distancia; esta disposición puede oscilar y así emitir ondas de radio. El otro oscilador eléctrico lo constituye el circuito R-L-C, en el cual un condensador y una inductancia, figura 2.4, se cargan y descargan produciendo con ello oscilaciones que pueden ser inducidas en una segunda inductancia. Vea más adelante un oscilador mecánico y un oscilador eléctrico”.

De hecho, hoy día, se sabe de la existencia de fuentes naturales de ondas de radio, como lo son, entre otros, los púlsares.

Microondas

Son ondas electromagnéticas con frecuencias que van desde los 10^9 Hz (una giga Hertz) hasta 10^{11} Hz , es decir una longitud de onda comprendida entre 10^{-3} m hasta los 10^{-1} m .



Klistron

Figura 2.5: Dispositivo eléctrico, Klistron, para producir microondas

Las microondas se generan en tubos de electrones especiales como el *klistrón*, figura 2.5 o el *magnetron*, figura 2.6. El primero es una válvula de vacío en la cual las microondas se producen mediante la modulación de la velocidad de electrones. El segundo es un dispositivo que transforma la energía eléctrica en energía electromagnética en forma de microondas.



Figura 2.6: Dispositivo electrónico, magnetron, para producir microondas

Las microondas se utilizan en la localización y navegación por radar, en telefonía celular, televisión y acceso a internet por cable, radioastronomía y su uso por la cual son más conocidas es el de la cocción y calentamiento de alimentos en los hornos microondas.

Infrarrojo

Ondas electromagnéticas con frecuencias comprendidas entre 10^{11}hz y 10^{14}hz , y por tanto una longitud de onda que va desde 10^{-3}m hasta los 10^{-6}m , ($1 \mu\text{m}$).

La radiación infrarroja es emitida por los cuerpos debido a su temperatura, por lo cual suele llamársele también radiación térmica. Su producción se debe fundamentalmente a transiciones electrónicas en las moléculas.

Se acostumbra dividir la región de radiación infrarroja en tres regiones: la región del infrarrojo cercano, (longitud de onda entre los **800nm** y los **2500nm**); recibe el nombre de cercano por limitar con la región del visible, y se observa en algunos cuerpos astronómicos como las llamadas estrellas frías. La región del infrarrojo medio (longitud de onda entre los 5 y los $40\mu m$); en este rango es que emiten los cuerpos sometidos a las temperaturas naturales terrestres, y por tanto esta radiación es la que nos define lo que llamamos comúnmente *sensación térmica* o simplemente *calor*. La región del infrarrojo lejano (longitud de onda entre los **40** y los $400\mu m$); emitida por cuerpos que se encuentran solo pocos grados por encima del cero absoluto.

Visible

Es la región más pequeña del espectro electromagnético, con longitudes de onda del orden de los *nanómetros* y frecuencias del orden de los **Tera Hertz**. Sin embargo, es la región del espectro electromagnético más importante para nosotros los humanos, pues esta radiación es la detectada directamente por nuestros ojos. Se produce por transiciones electrónicas en los átomos y su uso fundamental es en la iluminación, pero también se utiliza en el LASER y de todos es conocido su importancia en los procesos biológicos que sustentan la vida.

Acostumbramos a llamar luz blanca a la radiación del espectro visible, pero desde 1667, cuando Newton presentó ante la Royal Society su experimento de la descomposición de la luz solar, sabemos que la radiación visible se encuentra compuesta por seis (6) colores, a saber:

1. *Violeta* (380 – 440nm, 790 – 680Thz).
2. *Azul* (440 – 485nm, 680 – 620Thz).
3. *Verde* (500 – 565nm, 600 – 530Thz).
4. *Amarillo* (565 – 590nm, 530 – 510Thz).
5. *Naranja* (590 – 625nm, 510 – 480Thz).

6. Rojo (625 – 740nm, 480 – 405Thz).

Ultravioleta

Radiación producida por descargas eléctricas en gases y en el sol. Su rango de longitud de onda se encuentra entre los **10nm** y los **400nm**.

Es la radiación electromagnética no visible más cercana, y de mayor frecuencia, a la región visible. De ahí su nombre: Más allá del violeta.

Dependiendo de la afectación que producen en los seres humanos, los rayos ultravioletas suelen clasificarse en rayos UV-A, UV-B y UV-C, siendo la radiación UV-A la que en mayor cantidad llega a la tierra; las radiaciones UV-B y UV-C son absorbidas por el ozono de la atmósfera, protección altamente afectada por el uso de los fluoro carbonos en los aerosoles. De todos es bien conocido las consecuencias de una exposición prolongada a la luz solar.

Rayos X

Se producen fundamentalmente por desaceleración de electrones, pero también pueden producirse por transiciones de los electrones más fuerte ligados en el material que sirve como pantalla desaceleradora. Su longitud de onda se encuentra entre los **0,01nm** y los **10nm**. Su aplicación más conocida es en medicina, para la toma de radiografías. La primera de ellas es la imagen de la mano de la esposa de *Wilhelm Conrad Röntgen*, su descubridor, mostrando los huesos de la mano y la sortija de matrimonio.

Rayos gamma, γ

Es la radiación electromagnética de origen nuclear, pues se produce en procesos de desintegración radiactiva de átomos pesados, así como

también en procesos de carácter cuántico como lo es el proceso denominado **aniquilación de pares**. Además, es la radiación electromagnética más penetrante y de menor longitud de onda, menos de 1pm . En 1903 Ernest Rutherford la bautiza como radiación Gamma (γ) para diferenciarla de las otras dos radiaciones de origen nuclear descubiertas por él, la radiación beta (β) y la radiación alfa (α).

La exposición a la radiación gamma es fuertemente nociva para la salud.



Figura 2.7: Primera radiografía mostrando la mano con el anillo de bodas de la esposa de, Wilhem Conrad Röntgen, quien descubrió los rayos X

2.5. Un oscilador mecánico y un oscilador eléctrico

2.5.1. El péndulo simple

Se considera como péndulo simple a una masa que oscila suspendida de una cuerda inextensible y cuyas oscilaciones son periódicas e independientes de la masa suspendida para oscilaciones de poca amplitud. Según

la figura 2.8 y utilizando la segunda ley de Newton (o ley de movimiento), se tiene:

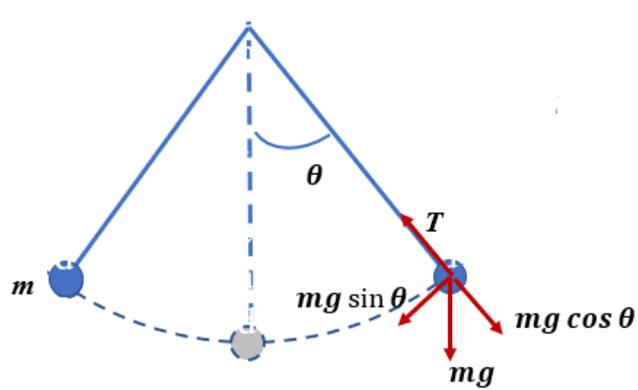


Figura 2.8: El péndulo simple

$$F = ma \quad (2.42)$$

$$ma = mg \sin \theta \quad (2.43)$$

Pero:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (2.44)$$

$$v = r\dot{\theta} \quad (2.45)$$

Donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular, y $r = L$ para el péndulo en consideración. Por tanto:

$$a = \frac{d(L\dot{\theta})}{dt} \quad (2.46)$$

$$a = L\alpha \quad (2.47)$$

Donde α es la aceleración angular, y:

$$\alpha = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \quad (2.48)$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.49)$$

Por lo que la segunda ley de Newton para el péndulo simple, después de simplificar la masa, queda como:

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = g \sin \theta \quad (2.50)$$

Para oscilaciones de poca amplitud, es decir para $\theta \ll 1$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (2.51)$$

La cual es una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes, que admite como solución:

$$\theta = Ae^{\gamma t} \quad (2.52)$$

Y cuya ecuación característica es:

$$\gamma^2 - \frac{g}{L} = 0 \quad (2.53)$$

De donde:

$$\gamma = \pm\sqrt{g/L} \quad (2.54)$$

Obviamente $\sqrt{g/L}$ tiene como unidades sg^{-1} , y como corresponde a la solución angular del péndulo no es más que la frecuencia angular de oscilación del péndulo, y, por tanto:

$$w = \sqrt{g/L} \quad (2.55)$$

Por tanto, la solución para el péndulo es:

$$\boxed{\theta = Ae^{\pm wt}} \quad (2.56)$$

Lo cual significa que la ecuación del péndulo tiene dos soluciones diferentes y reales, por lo que:

$$\theta = Ae^{wt} + Ae^{-wt} \quad (2.57)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler, se tiene:

$$\theta = A \cos wt + iA \sin wt + A \cos wt - iA \sin wt \quad (2.58)$$

Si hacemos $\theta_0 = 2A$, entonces:

$$\boxed{\theta = \theta_0 \cos wt} \quad (2.59)$$

2.5.2. El circuito LC

Considérese que en el circuito de la figura 2.4, que contiene una capacitancia (C) y una inductancia (L), una vez que el condensador se llena se

elimina la fuente de voltaje (V) que alimenta el circuito. Bajo esta condición, el condensador comienza a descargarse a través de la inductancia, la cual comienza a almacenar energía magnética y la que a su vez, cuando se llena comienza a descargarse a través del capacitor. Este ciclo se repetirá una y otra vez, generando en el circuito una corriente eléctrica oscilante.

Calculando el voltaje total en el circuito se tiene que, para cualquier instante de tiempo t , se tiene:

$$V_L + V_C = 0 \quad (2.60)$$

$$V_L = -L \frac{di}{dt} \quad (2.61)$$

$$V_C = \frac{Q}{C} \quad (2.62)$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.63)$$

Ya que

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (2.64)$$

Por lo que:

$$-L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad (2.65)$$

Multiplicando por menos y derivando con respecto a t , se tiene:

$$\frac{d^2i}{dt^2} - \frac{1}{LC} i = 0 \quad (2.66)$$

La cual es una ecuación diferencial de las mismas características que la ecuación diferencial del péndulo simple, por lo que admite una solución de la forma:

$$i = i_0 \cos \omega t \quad (2.67)$$

Donde

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} [\omega^2]_{S.I} &= \frac{1}{\text{Henrio} - \text{Coulomb} - \text{Voltios}^{-1}} \\ &= \frac{1}{VA^{-1}SgCV^{-1}} \\ &= sg^{-2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

2.6. El vector de Poynting

Partiendo de la ley de Ampère-Maxwell, se puede aproximar el significado del vector de Poynting:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (2.70)$$

Haciendo el producto punto con el campo eléctrico:

$$\vec{E} \circ (\nabla \times \vec{B}) = \vec{E} \circ \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \quad (2.71)$$

$$\vec{E} \circ (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{E} \circ \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (2.72)$$

Aplicando la identidad vectorial:

$$\vec{A} \circ \nabla \times \vec{C} = -\nabla \circ (\vec{A} \times \vec{C}) + \vec{C} \circ \nabla \times \vec{A} \quad (2.73)$$

$$-\nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{B} \circ \nabla \times \vec{E} = \mu_0 \vec{E} \circ \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.74)$$

Utilizando la ley de Faraday-Lenz en el segundo término del lado izquierdo, se tiene

$$-\nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \vec{E} \circ \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.75)$$

Aplicando la identidad vectorial:

$$\vec{A} \circ \nabla \times \vec{C} = -\nabla \circ (\vec{A} \times \vec{C}) + \vec{C} \circ \nabla \times \vec{A} \quad (2.76)$$

$$-\nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{B} \circ \nabla \times \vec{E} = \mu_0 \vec{E} \circ \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.77)$$

Utilizando la ley de Faraday-Lenz en el segundo término del lado izquierdo, se tiene

$$\begin{aligned} -\nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \mu_0 \epsilon_0 -\nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$-\nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.79)$$

Pero:

$$\vec{B} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \circ \vec{B} \right)$$

$$\vec{E} \circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{E} \right)$$

Por lo que:

$$-\nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \circ \vec{B} \right) + \mu_0 \vec{E} \circ \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{E} \right) \quad (2.80)$$

Integrando sobre un volumen V :

$$\begin{aligned} - \oint_V \nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) dV &= \oint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \circ \vec{B} \right) dV + \mu_0 \oint_V \vec{E} \circ \vec{J} dV \\ &+ \mu_0 \epsilon_0 \oint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{E} \right) dV \end{aligned} \quad (2.81)$$

Por el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} - \oint_V \nabla \circ (\vec{E} \times \vec{B}) d\vec{S} &= \oint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B^2 \right) dV + \mu_0 \oint_V \vec{E} \circ \vec{J} dV \\ &+ \mu_0 \epsilon_0 \oint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} E^2 \right) dV \end{aligned} \quad (2.82)$$

Pero la densidad de energía eléctrica almacenada en un campo eléctrico y la densidad de energía magnética almacenada en un campo magnético, están dadas por:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\begin{aligned} - \oint_S \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \circ d\vec{S} &= \oint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV + \oint_V \vec{E} \circ \vec{J} dV \\ &+ \oint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \right) dV \end{aligned} \quad (2.83)$$

Como el término del centro del lado derecho de la ecuación representa la potencia disipada en el volumen V debido a la corriente eléctrica \vec{J} , o potencia óhmica, entonces el lado derecho de la ecuación puede interpretarse como la energía que entra al volumen V , y por tanto el lado derecho de la ecuación se interpreta como la energía que sale del volumen V , es decir la energía que lleva la onda electromagnética.

El vector,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (2.84)$$

es por tanto el vector que representa el flujo de energía que lleva la onda electromagnética, y se llama **vector de Poynting**. Obsérvese que el vector de Poynting también determina la dirección de propagación de la onda electromagnética.

2.7. Intensidad o Irradiancia de una onda electromagnética

Para una onda plana la magnitud del vector de Poyting es:

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB \quad (2.85)$$

O bien

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \quad S = \frac{c}{\mu_0} B^2 \quad (2.86)$$

Es fácil comprobar que S tiene unidades de $watt/m^2$. Por tanto S corresponde a la energía por unidad de tiempo y unidad de área transportada por la onda. Puesto que el campo eléctrico o el campo magnético son periódicos, dicho valor es instantáneo, por lo que se define la intensidad o irradiancia, (I), de una onda electromagnética como el valor promedio de S . Es decir:

$$I = \bar{S}$$

Por tanto:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \quad (2.87)$$

Pero:

$$\overline{\sin^2 x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad (2.88)$$

Por lo que:

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \quad (2.89)$$

Taller

1. La longitud de onda de los rayos X más energéticos producidos cuando los electrones acelerados a 18GeV en el Acelerador Lineal de Stanford golpean contra un blanco sólido es de $0,067\text{fm}$. ¿Cuál es la frecuencia de estos rayos X ?
2.
 - a) Una onda de radio de **VLF (very low frequency, frecuencia muy baja)** tiene una frecuencia de solo 30Hz ¿Cuál es su longitud de onda?
 - b) Calcule la longitud de onda de la radio Uniamazonia $98,1\text{Hz}$.
3. ¿Qué inductancia se requiere en un capacitor de 17pF para construir un oscilador capaz de generar ondas electromagnéticas de 550nm (es decir, visibles)?
4. Cierta onda electromagnética plana tiene un campo eléctrico máximo de $321\mu\text{V/m}$. Halle el campo magnético máximo.
5. El campo eléctrico asociado con una onda electromagnética plana está dado por $E_x = 0, E_y = 0, E_z = E_0 \sin k(x - ct)$, donde: $E_0 = 2,34 \times 10^{-4}\text{V/m}$ y $k = 9,72 \times 10^6\text{m}^{-1}$.
 - a) Escriba expresiones para las componentes del campo magnético de la onda.
 - b) Determine la longitud de onda de la onda.
6. Los láseres vidrio-neodimio que operan en la actualidad pueden proporcionar una potencia de 100TW en impulsos de $1,0\text{ns}$ con una longitud de onda de $0,26\mu\text{m}$. ¿Cuánta energía está contenida en un solo impulso?
7. El campo eléctrico máximo a una distancia de $11,2\text{m}$ de una fuente de luz puntual es de $1,96\text{V/m}$. Calcule:
 - a) El valor máximo del campo magnético.
 - b) La intensidad.
 - c) La potencia útil de la fuente.

8. La luz del sol incide en la tierra, justo afuera de su atmósfera, con una intensidad de $1,38 \text{ kW/m}^2$. Calcule:

- a) E_m .
b) B_m de la luz solar

suponiendo que sea una onda plana.

9. a) Demuestre que, en una onda electromagnética viajera plana, la intensidad promedio, es decir, la velocidad promedio de transporte de energía por unidad de área, está dada por

$$\bar{S} = \frac{cB_m^2}{2\mu_0}$$

- b) ¿Cuál es la intensidad promedio de una onda electromagnética que viaja en un plano si B_m , el valor máximo de su componente del campo magnético, es de $1,0 \times 10^{-4} \text{ T}$ ($= 1,0 \text{ gauss}$)?
10. a) Encuentre la longitud de onda y la frecuencia de un fotón de $1,0 \text{ keV}$.
b) Determine el momento de un fotón de $12,0 \text{ MeV}$.
11. ¿Cuál es la energía que tiene un fotón si su momento es igual al de un electrón de 3 MeV ?
12. Una luz monocromática de longitud de onda de $3,00 \text{ \AA}$ incide normalmente en una superficie de 4 cm^2 de área. Si la intensidad de la luz es de $15 \times 10^{-2} \text{ watt/m}^2$, determine la razón a la cual los fotones golpean la superficie.

Capítulo 3

ECUACIONES DE MAXWELL PARA CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS INDEPENDIENTES DEL TIEMPO

LA ELECTROSTÁTICA

3.1. Leyes de Maxwell para campos eléctricos y magnéticos estacionarios

Si los campos eléctrico y magnético permanecen constantes en el tiempo, entonces las ecuaciones de Maxwell toman la siguiente forma:

Cuadro 3.1: Ecuaciones de Maxwell para campos estacionarios

Nombre	Forma Integral	Forma Diferencial
Ley de Gauss para \vec{E}	$\oint \vec{E} \circ d\vec{S} = q/\epsilon_0$	$\nabla \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss para \vec{B}	$\oint \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\nabla \circ \vec{B} = 0$
Ley de Faraday - Lenz	$\oint \vec{E} \circ d\vec{r} = 0$	$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$
Ley de Ampère - Maxwell	$\oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \mu_0 i$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Lo que conlleva a que los campos eléctrico y magnético se independicen entre sí, y se permita su estudio por separado, constituyéndose, por tanto, las teorías físicas de la *electrostática* y la *magnetostática*.

$$\left. \begin{array}{l} \oint \vec{E} \circ d\vec{S} = q/\epsilon_0 \quad \nabla \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \oint \vec{E} \circ d\vec{r} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \end{array} \right\} \text{ELECTROSTÁTICA} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \oint \vec{B} \circ d\vec{S} = 0 \quad \nabla \circ \vec{B} = 0 \\ \oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \mu_0 i \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right\} \text{MAGNETOSTÁTICA} \quad (3.2)$$

3.2. Electrostática en el vacío

Como se puede observar en las páginas anteriores, cuando las leyes de Maxwell se aplican a campos eléctricos y magnéticos estacionarios, es decir independientes del tiempo, los dos campos se independizan dando lugar a dos campos de estudio bien diferenciados: *la electrostática* o el estudio de los campos eléctricos que no varían en el tiempo, y *la magnetostática* o el estudio de los campos magnéticos que no varían en el

tiempo.

En el caso de la electrostática se puede observar que los campos eléctricos objeto de estudio son campos irrotacionales, $(\nabla \times \vec{E} = \vec{0})$, con divergencia dada por $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, y que puede determinarse o encontrarse mediante la ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q/\epsilon_0 \quad (3.3)$$

Ejemplo

Calcular el campo eléctrico producido por una carga eléctrica puntual q , en reposo, a una distancia r de ella. *La equivalencia de la ley de Gauss para el campo eléctrico y la ley de Coulomb para el campo eléctrico.*

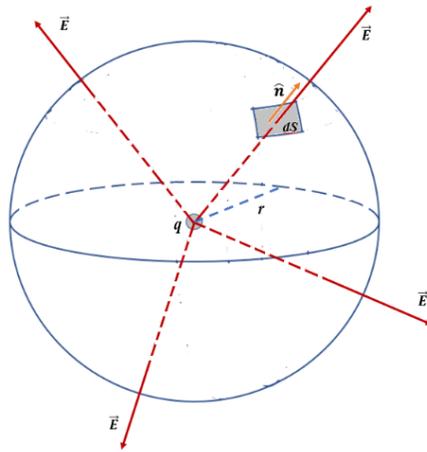


Figura 3.1: Campo eléctrico de una carga puntual

Solución Como la carga eléctrica es puntual se puede trazar una esfera de radio r centrada en la carga. Figura 3.1.

Se pueden hacer dos consideraciones que no necesitan mayor justificación:

1. El campo eléctrico creado por la carga eléctrica tiene dirección radial, ya sea hacia o desde la carga.
2. Sobre la superficie de una esfera de radio r la magnitud del campo eléctrico se mantiene constante; es decir que la magnitud del campo eléctrico sobre la superficie de una esfera de radio r no depende ni de θ ni de ϕ , y por lo tanto la magnitud del campo eléctrico depende solamente de la distancia a la carga, es decir de r , $E = E(r)$. Se dice que el problema tiene simetría esférica.

Por tanto:

$$\oint \vec{E} \circ d\vec{S} = q/\epsilon_0 \quad (3.4)$$

$$\oint \vec{E} \circ \hat{n}dS = q/\epsilon_0 \quad (3.5)$$

Por tanto:

$$\oint E dS = q/\epsilon_0 \quad (3.6)$$

$$E \oint dS = q/\epsilon_0 \quad (3.7)$$

$$E(4\pi r^2) = q/\epsilon_0 \quad (3.8)$$

Por lo que:

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi r^2}} \quad (3.9)$$

Que no es más que la ley de Coulomb para el campo eléctrico, la cual escrita vectorialmente es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (3.10)$$

El rotacional de dicho campo en coordenadas esféricas y atendiendo a la simetría esférica del problema, es:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (E_\phi \sin \theta)}{d\theta} \frac{\partial E_\theta}{d\phi} \right) \hat{r} \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad (3.12)$$

Por su parte, la divergencia del campo eléctrico producido por una carga eléctrica puntual es:

$$\nabla \circ \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \quad (3.13)$$

$$\nabla \circ \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) \right] \quad (3.14)$$

Por lo que:

$$\nabla \circ \vec{E} = 0 \text{ si } r \neq 0 \quad \nabla \circ \vec{E} \rightarrow \infty \text{ si } r = 0 \quad (3.15)$$

Lo que significa que, por ser una carga eléctrica puntual, tiene densidad de carga infinita cuando el radio es cero y densidad cero para un radio diferente de cero. Lo que es completamente compatible con la expresión diferencial de la ley de Gauss para el campo eléctrico. Si asumimos que la carga eléctrica puntual es negativa, su divergencia también es negativa y podemos afirmar que el campo converge hacia la carga; por el contrario, si asumimos que la carga eléctrica puntual es positiva, su divergencia también es positiva y se puede decir que el campo diverge desde la carga. Figura 3.1.

Ejemplo

Campo eléctrico producido por una distribución esférica de carga eléctrica de radio R y carga eléctrica Q . *El modelo atómico de Thompson.*

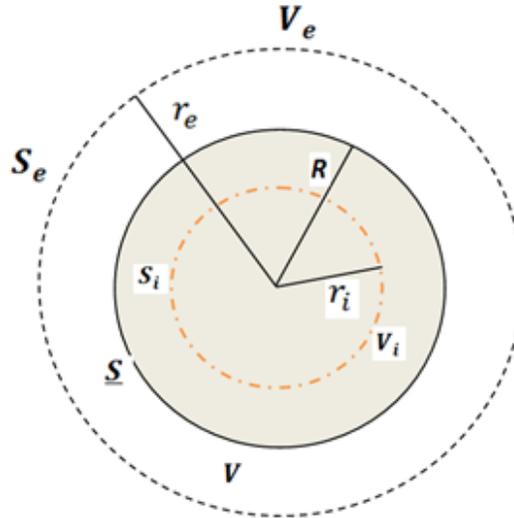


Figura 3.2: Campo eléctrico interno y externo del modelo atómico de Thompson

Solución El cálculo del campo eléctrico producido por la distribución esférica de carga eléctrica, requiere que se obtenga el campo eléctrico para la región interna de la distribución esférica ($r_i < R$) y el campo eléctrico para la región externa de dicha distribución de carga eléctrica ($r_e > R$). Dichos campos deben coincidir en la frontera de las regiones, que no es más que la superficie de la distribución esférica de carga eléctrica ($r = R$), pues la situación debe tener una solución continua, es decir, $E_{r_i} = E_{r_e}$ para $r_i = r_e = R$. Figura 3.2.

Campo eléctrico para $r_i < R$. Para aplicar la ley de Gauss para el campo eléctrico se debe poder calcular dos cosas:

1. El producto punto $d\vec{E} \circ d\vec{S}$. Teniendo en cuenta nuevamente la simetría esférica del problema, sabemos que \vec{E} y $d\vec{S}$ tiene dirección radial y, por tanto: $\vec{E} \circ d\vec{S} = E ds$.
2. La carga eléctrica contenida en la esfera de radio r_i . La densidad volumétrica de carga eléctrica es $\sigma = \frac{Q}{V}$, multiplicada por el volumen de la esfera de radio r_i da la carga contenida en el volumen V_i .

$$q_i = \sigma V_i \quad (3.16)$$

$$q_i = \frac{Q}{4/3\pi R^3} \left(\frac{4}{3}\pi r_i^3 \right) \quad (3.17)$$

$$q_i = \frac{Q}{R^3} (r_i^3) \quad (3.18)$$

Considerando la ley de Gauss para el campo eléctrico sobre la esfera de radio r_i , se tiene:

$$\oint \vec{E}_i \circ d\vec{S}_i = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad (3.19)$$

$$E_i S_i = \frac{Q}{\epsilon_0 R^3} (r_i^3) \quad (3.20)$$

$$E_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r_i \quad (3.21)$$

Puesto que $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ es constante y $0 < r_i < R$, el campo eléctrico al interior de la distribución esférica de carga eléctrica de radio R varía de forma lineal, $y = mx$, desde el centro de la esfera hasta la superficie de la misma. Figura 3.3

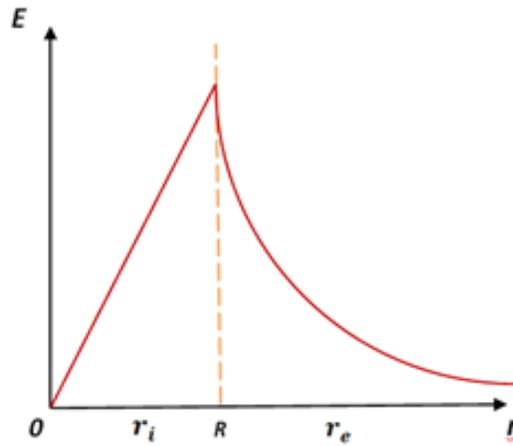


Figura 3.3: Comportamiento del campo eléctrico producido por el modelo atómico de Thompson

Campo eléctrico para $r_e > R$. Obviamente, aquí sigue siendo válida la simetría esférica del problema, pero la carga eléctrica contenida en la esfera de radio r_e es Q , puesto que, en la región comprendida entre r_e y r_∞ no existe carga alguna; es decir que $q_e = Q$.

Por tanto:

$$\oint_{S_e} \vec{E}_e \circ d\vec{S}_e = \frac{q_e}{\epsilon_0} \quad (3.22)$$

$$E_e S_e = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.23)$$

$$E_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_e^2} \quad (3.24)$$

Se observa que, el campo externo a la distribución esférica de carga eléctrica varía según la ley de Coulomb, lo que permite afirmar que una distribución esférica de carga eléctrica actúa hacia el exterior de ella como si fuera una carga puntual de carga eléctrica Q colocada en el centro de la esfera. (Igual afirmación puede hacerse sobre una distribución esférica de masa). Por ello es posible aplicar la ley de Coulomb a un sistema de dos esferas cargadas eléctricamente. (Igualmente, por ello, es posible aplicar la ley de gravitación universal de Newton a un sistema tierra - luna, consideradas ambas como esferas).

Puesto que $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ es constante y $0 < r_e < \infty$, se ve que el campo eléctrico al exterior de una distribución esférica de carga eléctrica varía con el inverso del cuadrado de la distancia; es decir, una variación de la forma $y = k/x^2$.

Sin embargo, para la situación que se está tratando puede verse que $E_i = E_e$ para $r_i = r_e = R$, y por lo tanto la variación del campo eléctrico para una distribución esférica de carga eléctrica es tal como se muestra en la figura 3.3.

Como puede verse, el campo eléctrico producido por la distribución esférica de carga eléctrica no es lo suficientemente fuerte para producir desviaciones de 180° en las partículas alfa (α), tal como lo encontró Rutherford en su famoso experimento de la lámina de oro con el que estableció su modelo planetario del átomo.

¿Cómo se comporta un electrón insertado en la distribución esférica

de carga eléctrica a una distancia r_i del centro de la esfera?

Puesto que

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (3.25)$$

y

$$\vec{E}_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r_i \hat{r}_i \quad (3.26)$$

Entonces

$$\vec{F} = -\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} r_i \hat{r}_i \quad (3.27)$$

La cual es una fuerza que obedece la ley de *Hooke*, es decir de la forma $\vec{F} = -kx$, puesto que $\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ es constante.

Por tanto, un electrón insertado en la distribución esférica oscilará con frecuencia

$$w = \frac{k}{m} \quad (3.28)$$

$$w = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3} \quad (3.29)$$

Frecuencia que es la misma para cualquier distancia desde el centro de la distribución esférica en que se encuentre el electrón. Es decir, que en el modelo atómico de *Thompson* para el átomo de hidrógeno el electrón oscila con una única frecuencia, lo que significa que el modelo atómico de Thompson para el átomo de hidrógeno no puede explicar las series espectrales del hidrógeno, aquellas “*rayas brillantes*” emitidas por el hidrógeno al ser sometido a la acción de una llama. Conocidas desde los años sesenta del siglo XIX gracias a los trabajos espectroscópicos de *Kirchhoff*

y *Bunsen* y para las cuales en 1885 el matemático y físico *Johann Jakob Balmer (1825-1898)*, “profesor de matemáticas de una escuela de chicas de Basilea que también daba, de vez en cuando, clases en la universidad local” (**Sánchez Ron**), establece matemáticamente la fórmula para la serie que hoy en día lleva su nombre, *la serie de Balmer*.

$$\lambda = B \left(\frac{m}{m^2 - n^2} \right) \quad B = 364,56 \text{ nm} \quad n, m \text{ enteros} \quad n > m \quad (3.30)$$

3.3. La ley de coulomb para el campo eléctrico entre cargas eléctricas puntuales

Cuando se estudió la equivalencia entre la ley de Gauss y la ley de Coulomb para el campo eléctrico, se estableció que la ley de Coulomb para el campo eléctrico producido por una carga puntual q es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (3.31)$$

donde r es la distancia desde la carga eléctrica q hasta el punto P donde se quiere encontrar el campo eléctrico, y \hat{r} es el vector unitario que señala la dirección desde la carga eléctrica hacia el punto en cuestión. [Figura 3.4](#)

Puesto que

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.32)$$

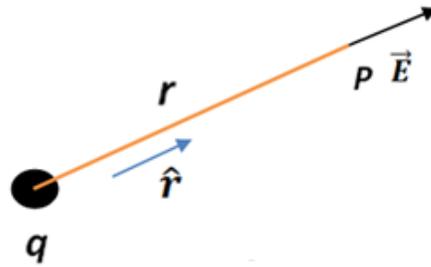


Figura 3.4: Campo eléctrico producido por una carga eléctrica puntual cuando la carga se encuentra en el origen

Entonces el campo eléctrico producido por una carga eléctrica puntual, puede también escribirse como

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (3.33)$$

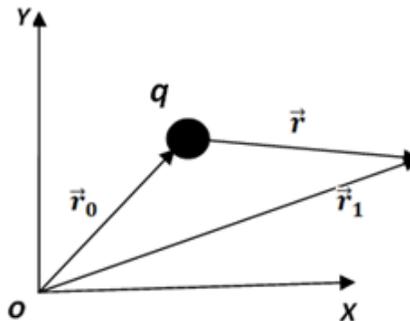


Figura 3.5: Campo eléctrico producido por una carga eléctrica puntual cuando la carga se encuentra por fuera del origen

Si se considera el campo eléctrico creado por una carga eléctrica puntual desde un marco de referencia cuyo origen no coincida con la carga eléctrica (ver figura 3.5), entonces:

$$\vec{r} + \vec{r}_0 = \vec{r}_1 \quad (3.34)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \quad (3.35)$$

El campo eléctrico queda, por tanto, como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^2} \hat{r} \quad (3.36)$$

Pero

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} \quad (3.37)$$

Por lo que

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^3} \quad (3.38)$$

Si en el punto donde se calcula el campo eléctrico se coloca una carga eléctrica Q , y se mide la fuerza sobre ella debida a la carga eléctrica q entonces, dicha fuerza viene dada por:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (3.39)$$

Por lo que la fuerza eléctrica entre dos cargas eléctricas puntuales queda expresada como:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \quad (3.40)$$

La expresión anterior es la ley de Coulomb para la fuerza eléctrica entre dos cargas eléctricas puntuales, la cual tiene las siguientes características:

1. La fuerza eléctrica que Q ejerce sobre la carga eléctrica q es de igual magnitud y de dirección opuesta a la fuerza ejercida por la carga eléctrica q sobre la carga eléctrica Q . Es decir:

$$|\vec{F}_{Qq}| = |\vec{F}_{qQ}| \quad (3.41)$$

$$\vec{F}_{Qq} = -\vec{F}_{qQ} \quad (3.42)$$

2. Las dos fuerzas se encuentran sobre la línea de acción, es decir, sobre la línea que une a las dos cargas.
3. Las fuerzas pueden ser de atracción si las cargas eléctricas son de signo contrario o de repulsión si las cargas eléctricas son del mismo signo.

En el caso del sistema de referencia cuyo origen no coincide con la carga q , la fuerza eléctrica entre las cargas eléctricas queda determinada por:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^3} \quad (3.43)$$

En cuanto a las unidades para el campo eléctrico, desde la definición de la fuerza eléctrica como el producto del campo eléctrico por la carga, se obtiene que las unidades de campo eléctrico son:

$$\boxed{[E]_I = \frac{N}{C}} \quad (3.44)$$

3.4. Campo eléctrico producido por un sistema N cargas eléctricas puntuales

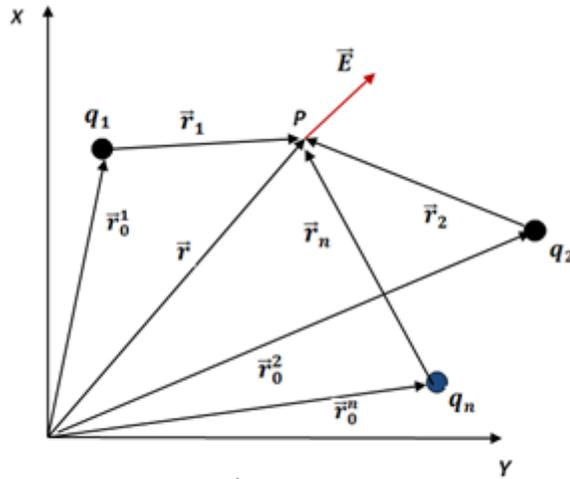


Figura 3.6: Campo eléctrico producido por un sistema de N cargas eléctricas puntuales en un punto P

El campo eléctrico producido en algún punto P del espacio por una distribución de N cargas eléctricas, es la suma de los campos eléctricos producidos por cada una de las N cargas eléctricas. Figura 3.6.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots + \vec{E}_n \quad (3.45)$$

Donde \vec{E}_1 es el campo eléctrico producido por la carga 1 , r la distancia desde el origen hasta el punto donde se está calculando el campo eléctrico, r_1 la distancia desde la carga q_1 hasta el punto donde se está calculando el campo eléctrico, r_0^1 la distancia desde el origen a la carga q_1 , y así sucesivamente.

De tal forma que

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \vec{r} - \vec{r}_0^1 \\
\vec{r}_2 &= \vec{r} - \vec{r}_0^2 \\
\vec{r}_3 &= \vec{r} - \vec{r}_0^3 \\
&\vdots \\
\vec{r}_n &= \vec{r} - \vec{r}_0^n
\end{aligned}
\tag{3.46}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico \vec{E} producido por las N cargas eléctricas puntuales en el punto P viene dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 (\vec{r} - \vec{r}_0^1)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 (\vec{r} - \vec{r}_0^2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 (\vec{r} - \vec{r}_0^3)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^3|^3} + \\
&\dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3}
\end{aligned}
\tag{3.47}$$

Que se puede escribir como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3}
\tag{3.48}$$

De hecho, si se coloca una carga eléctrica Q en el punto P , la fuerza eléctrica sobre ella producida por las otras N cargas es:

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3}
\tag{3.49}$$

Ejemplo

Cargas puntuales $Q_1 = 5\mu\text{C}$ y $Q_2 = -4\mu\text{C}$ están localizadas en $(3, 2, 1)$ y $(-4, 0, 6)$, respectivamente. Determine la fuerza sobre Q_1 .

Si se coloca la carga Q_1 en la posición \vec{r}_1 , entonces:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^3}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2 [(3, 2, 1) - (-4, 0, 6)]}{|(3, 2, 1) - (-4, 0, 6)|^3}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2 (7, 2, -5)}{|(7, 2, -5)|^3}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2 (7, 2, -5)}{\left(\sqrt{(7)^2 + (2)^2 + (-5)^2}\right)^3}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(5 \times 10^{-6}\text{C}) (-4 \times 10^{-6}\text{C}) (7, 2, -5)}{(\sqrt{78})^3}$$

Si las distancias r_0 y r_1 están dadas en metros, entonces la fuerza está expresada en Newton, como puede comprobarse fácilmente.

Se puede notar que la fuerza anterior también puede escribirse como:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(5 \times 10^{-6}\text{C}) (-4 \times 10^{-6}\text{C}) (7, 2, -5)}{(\sqrt{78})^2 (\sqrt{78})}$$

Donde:

$$\frac{(7, 2, -5)}{(\sqrt{78})} = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} = \hat{r} \quad (3.50)$$

Por lo que:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(5 \times 10^{-6}\text{C})(-4 \times 10^{-6}\text{C})}{(\sqrt{78})^2} \hat{r}$$

Que es la forma más familiar de la ley de Coulomb para la fuerza eléctrica.

Ejemplo

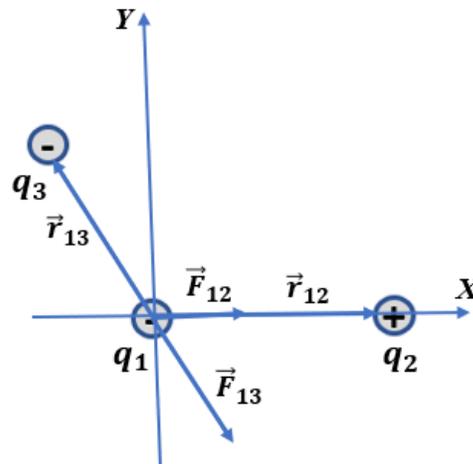


Figura 3.7: Configuraciones de tres cargas eléctricas puntuales para el ejemplo 3.4.2

La **figura 3.7** muestra tres partículas cargadas eléctricamente, mantenidas en su lugar por fuerzas no mostradas. ¿Qué fuerza electrostática, debido a las otras dos cargas, actúa sobre q_1 , si $q_1 = -1,2\mu\text{C}$, $q_2 = 3,7\mu\text{C}$, $q_3 = -2,3\mu\text{C}$, $r_{12} = 15\text{cm}$, $r_{13} = 10\text{cm}$ y $\theta = 32^\circ$?

Puesto que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3}$$

Entonces:

$$\vec{F} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3}$$

$$\vec{F} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2 (\vec{r} - \vec{r}_0^2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|^3} + \frac{q_3 (\vec{r} - \vec{r}_0^3)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^3|^3} \right)$$

De acuerdo a la figura 3.4.2.1, se tiene que:

$$\vec{r} = (0,0) \quad \vec{r}_0^2 = (15,0) \quad \vec{r}_0^3 = (10 \sin 32^\circ, 10 \cos 32^\circ, 0)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^2| = 15 \quad |\vec{r} - \vec{r}_0^3| = 10$$

Por lo que:

$$\vec{F} = \frac{-1,2 \times 10^{-6} \text{C}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3,7 \times 10^{-6} \text{C} [(0,0) - (15,0)]}{15^3} + \frac{-2,3 \times 10^{-6} \text{C} [(0,0) - (10 \sin 32^\circ, 10 \cos 32^\circ)]}{10^3} \right)$$

$$\vec{F} = \frac{-1,2 \times 10^{-6} \text{C}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3,7 \times 10^{-6} \text{C} [(15,0)]}{15^3} + \frac{-2,3 \times 10^{-6} \text{C} [(10 \sin 32^\circ, 10 \cos 32^\circ)]}{10^3} \right)$$

$$\vec{F} = \frac{(1,2 \times 10^{-6})(3,7 \times 10^{-6}C^2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{15^2} \hat{i} + \frac{(1,2 \times 10^{-6})(3,7 \times 10^{-6})C^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{0}{15^3} \hat{j}$$

$$+ \frac{(1,2 \times 10^{-6})(2,3 \times 10^{-6})C^2 \sin 32^\circ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{10^2} \hat{i} - \frac{(1,2 \times 10^{-6})(2,3 \times 10^{-6})C^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos 32^\circ}{10^2} \hat{j} \text{ Newton}$$

Esto significa que la fuerza sobre la carga q_1 ejercida por las otras dos cargas, tiene como componentes:

$$\vec{F}_x = \frac{(1,2 \times 10^{-6})(3,7 \times 10^{-6}C^2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{15^2} + \frac{(1,2 \times 10^{-6})(2,3 \times 10^{-6})C^2 \sin 32^\circ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{10^2}$$

$$\vec{F}_y = - \frac{(1,2 \times 10^{-6})(2,3 \times 10^{-6})C^2 \cos 32^\circ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{10^2}$$

Se puede observar que el resultado obtenido puede derivarse mediante la descomposición de las fuerzas \vec{F}_{12} y \vec{F}_{13} en sus componentes y después realizar la sumatoria en la dirección X y en la dirección Y , como es usual.

Ejemplo

Cargas puntuales $5nC$ y $-2nC$ están localizadas en $(2, 0, 4)$ y $(-3, 0, 5)$, respectivamente. Encuentre el campo eléctrico \vec{E} en el punto $(1, -3, 7)$. Si en dicho punto se coloca una tercera carga eléctrica de $1nC$, ¿Qué fuerza electrostática se ejerce sobre ella?. **Ver figura 3.8**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3}$$

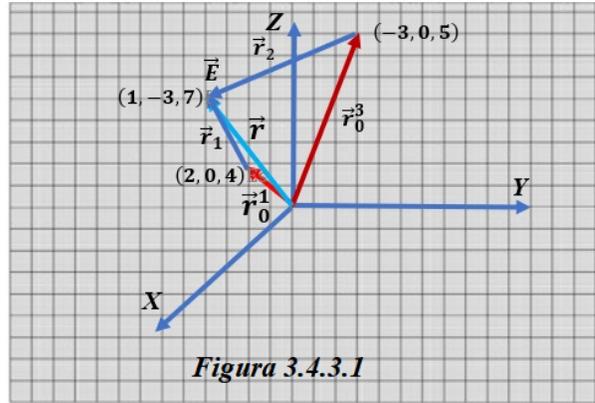


Figura 3.8: Esquema para la solución del ejemplo 3.4.3

Entonces:

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3}$$

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 (\vec{r} - \vec{r}_0^1)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|^3} + \frac{q_2 (\vec{r} - \vec{r}_0^2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|^3} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{5 \times 10^{-9} \text{C} [(1, -3, 7) - (2, 0, 4)]}{|(1, -3, 7) - (2, 0, 4)|^3} + \frac{-2 \times 10^{-9} \text{C} [(1, -3, 7) - (-3, 0, 5)]}{|(1, -3, 7) - (-3, 0, 5)|^3} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{5 \times 10^{-9} \text{C} (-1, -3, 3)}{|(-1, -3, 3)|^3} + \frac{-2 \times 10^{-9} \text{C} (-2, -3, 2)}{|(-2, -3, 2)|^3} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{5 \times 10^{-9} \text{C} (-1, -3, 3)}{(\sqrt{19})^3} + \frac{-2 \times 10^{-9} \text{C} (4, 6, -4)}{(\sqrt{17})^3} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{10^{-9}C}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(-5, -15, 15)}{(\sqrt{19})^3} + \frac{(4, 6, -4)}{(\sqrt{17})^3} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{10^{-9}C}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\sqrt{17})^3 (-5, -15, 15) + (\sqrt{19})^3 (4, 6, -4)}{(\sqrt{19})^3 (\sqrt{17})^3} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{10^{-9}C}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\sqrt{17})^3 (-5, -15, 15) + (\sqrt{19})^3 (4, 6, -4)}{(\sqrt{323})^3} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{10^{-9}C}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(-19, 18, -554, 47, -720, 01)}{(\sqrt{323})^3} \right)$$

Nuevamente si las posiciones están dadas en metros, el campo eléctrico estará medido en metros, el campo eléctrico estará medido en *Newton/C*.

La fuerza ejercida sobre la carga de $1nC$, se obtiene multiplicando el campo eléctrico por la carga; es decir:

$$\vec{F} = \frac{10^{-18}C}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(-19, 18, -554, 47, -771, 01)}{(\sqrt{323})^3} \right) \text{ Newton}$$

Nuevamente, esta fuerza puede escribirse como:

$$\vec{F} = \frac{10^{-18}C}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{323})^2} \hat{r}$$

Taller

1. Cargas eléctricas puntuales de $30nC$, $-20nC$ y $10nC$ están localizadas en los puntos $(-1, 0, 2)$ y $(1, 5, -1)$, respectivamente.
 - a) Determine la fuerza eléctrica sobre una carga eléctrica puntual de $1nC$ en el punto $(1, -3, 7)$.
 - b) Encuentre el campo eléctrico en el punto $(1, -3, 7)$.
2. Dos cargas eléctricas puntuales de igual masa m y carga Q , están suspendidas de un punto común por dos hilos de masa despreciable y longitud L .
 - a) Mostrar que la carga Q está dada por:

$$Q^2 = 16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^2 \alpha \tan \alpha$$

Donde α es el ángulo formado por cada hilo con la vertical.
(Sugerencia: Considere el sistema en equilibrio).

- b) Muestre que si α es muy pequeño, entonces

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 mgl^2}} \quad (3.51)$$

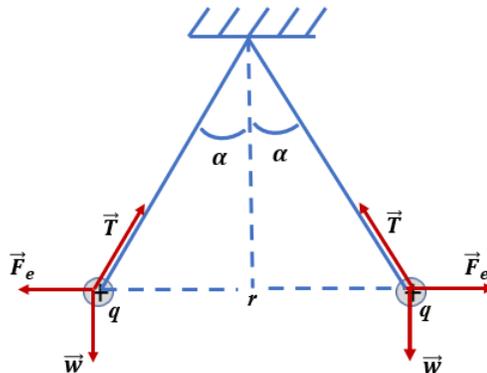


Figura 3.9: Cálculo de la carga eléctrica y el ángulo formado para que el sistema se encuentre en equilibrio

3. Cargas puntuales de $5nC$ y $2nC$ están localizadas en $(2, 0, 4)$ y $(-3, 0, 5)$, respectivamente. Encuentre el campo eléctrico \vec{E} en el punto $(1, -3, 7)$. Si en dicho punto se coloca una tercera carga eléctrica de $1nC$, ¿Qué fuerza electrostática se ejerce sobre ella?

3.5. Campo eléctrico producido por una distribución continua de carga eléctrica

Para un sistema de N cargas eléctricas puntuales se dijo que el campo eléctrico producido en algún punto P del espacio, estaba dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3}$$

Si se considera que el número de cargas eléctricas es infinito ($n \rightarrow \infty$), entonces se debe considerar un elemento infinitesimal de carga eléctrica (dq) para que actúe como una carga eléctrica puntual. Por tanto:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{dq (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3} \quad (3.52)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{\rho_i di (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3} \quad (3.53)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_i \frac{\rho_i di (\vec{r} - \vec{r}_0^1)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|^3} \quad (3.54)$$

Donde $i \equiv L, S \text{ o } V$, y por tanto $\rho_i \equiv \rho_L, \rho_S, \text{ o } \rho_v$ ya sea que se trate con una distribución lineal, una distribución superficial, o una distribución volumétrica de carga eléctrica, y $d_i \equiv d_i, d_s \text{ o } d_v$, es decir, un elemento diferencial de línea, de superficie o de volumen.

$$\rho_l = \frac{dq}{dl} \quad (3.55)$$

En la integral, el vector \vec{r} es el vector que posiciona el punto donde se quiere hallar el campo eléctrico y, por tanto, r es la distancia, desde la distribución continua de carga eléctrica, hasta el punto donde se quiere calcular el campo eléctrico. El vector \vec{r}_1 es el vector que se direcciona desde el elemento diferencial de carga eléctrica hasta el punto donde se está calculando el campo eléctrico. Ver figura 3.10 por ejemplo.

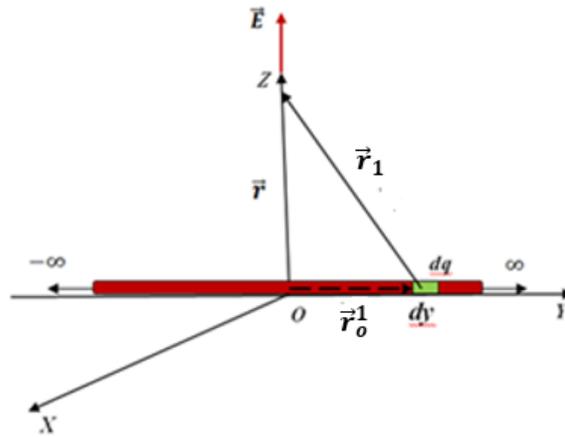


Figura 3.10: Distribución lineal de carga eléctrica

Obsérvese que, si consideramos que $\vec{r} - \vec{r}_0^1 = R$, entonces la integral para el campo eléctrico se puede escribir como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\alpha dL}{R^2} \hat{R} \quad \text{Para una distribución lineal de carga} \quad (3.56)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dS}{R^2} \hat{R} \quad \text{Para una distribución superficial de carga} \quad (3.57)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\phi dV}{R^2} \hat{R} \quad \text{Para una distribución volumétrica de carga} \quad (3.58)$$

Ejemplo

Campo eléctrico creado por una distribución lineal infinita de carga eléctrica, a una distancia z , y con densidad lineal de carga eléctrica λ . (Coordenadas rectangulares)

Según la figura 3.10

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r}_0^1 = y\hat{j} \quad \vec{r} - \vec{r}_0^1 = z\hat{k} - y\hat{j} \quad (3.59)$$

Por tanto:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_L dL (\vec{r} - \vec{r}_0^1)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|^3} \quad (3.60)$$

Por comodidad y para no confundir la coordenada ρ con la densidad lineal de carga ρ_L , se tomará $\rho_L = \lambda$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dy (z\hat{k} - y\hat{j})}{|z\hat{k} - y\hat{j}|^3} \quad (3.61)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{|z\hat{k} - y\hat{j}|^3} \hat{k} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y dy}{|z\hat{k} - y\hat{j}|^3} \hat{j} \quad (3.62)$$

La segunda integral se reescribe como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydy}{|z\hat{k} - y\hat{j}|^3} \hat{j} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydy}{(z^2 - y^2)^{3/2}} \hat{j} \quad (3.63)$$

Utilizando el cambio de variable $z^2 + y^2 = U$, se tiene que $dU = 2ydy$, y, por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydy}{|z\hat{k} - y\hat{j}|^3} \hat{j} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U^{-3/2} dU \hat{j} \quad (3.64)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydy}{|z\hat{k} - y\hat{j}|^3} \hat{j} = \left[U^{-1/2} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{j} \quad (3.65)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydy}{|z\hat{k} - y\hat{j}|^3} \hat{j} = \left[- (z^2 + y^2)^{-1/2} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{j} = 0 \hat{j} \quad (3.66)$$

Lo que significa que el campo eléctrico creado por la distribución lineal infinita de carga con densidad de carga eléctrica λ , no tiene componente horizontal.

La primera integral puede ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{zdy}{(z + y)^{3/2}} \hat{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(z^2 + y^2)} \frac{z}{(z^2 + y^2)^{1/2}} \hat{k} \quad (3.67)$$

Obviamente:

$$\frac{z}{(z^2 + y^2)^{1/2}} = \cos \theta \quad (3.68)$$

Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{(z-y)^{3/2}} \hat{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(z^2+y^2)} \cos \theta \hat{k} \quad (3.69)$$

Pero:

$$y = z \tan \theta \quad dy = z \sec^2 \theta d\theta \quad (3.70)$$

Luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{(z-y)^{3/2}} \hat{k} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{z \sec^2 \theta \cos \theta}{z^2 \tan^2 \theta + z^2} d\theta \hat{k} \quad (3.71)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{(z-y)^{3/2}} \hat{k} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{z \sec^2 \theta \cos \theta}{z^2 (\tan^2 \theta + 1)} d\theta \hat{k} \quad (3.72)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{(z-y)^{3/2}} \hat{k} = \frac{1}{z} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \hat{k} \quad (3.73)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{(z-y)^{3/2}} \hat{k} = \frac{1}{z} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{k} \quad (3.74)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{(z-y)^{3/2}} \hat{k} = \frac{2}{z} \hat{k} \quad (3.75)$$

Por lo que:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \hat{k} \quad (3.76)$$

Ejemplo

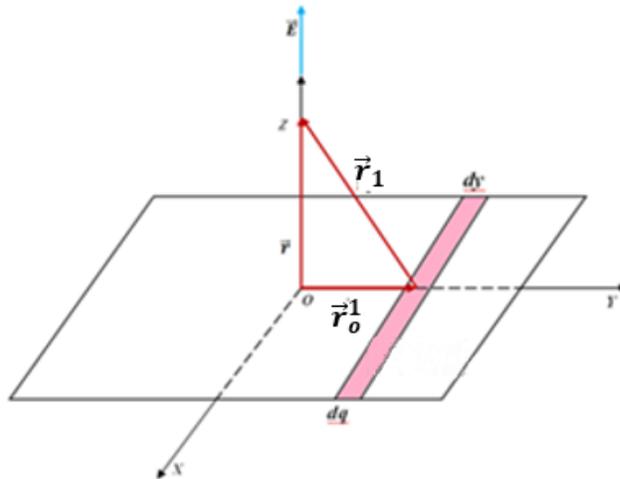


Figura 3.11: Distribución plana de carga eléctrica

Campo eléctrico creado por una distribución plana infinita de carga eléctrica con densidad ρ_s , utilizando coordenadas rectangulares.

El elemento diferencial de carga eléctrica está constituido por una tira infinita de carga eléctrica y de ancho dy , con lo cual se puede aprovechar el resultado encontrado para la línea infinita de carga eléctrica, ver **Figura 3.11**

$$d\vec{E} = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \hat{r}_1 \quad (3.77)$$

La densidad superficial de carga eléctrica la denotaremos como $\rho_s = \sigma$, y, además:

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r}_0^1 = y\hat{j} \quad \vec{r} - \vec{r}_0^1 = z\hat{k} - y\hat{j} \quad (3.78)$$

$$d\lambda = \frac{dq}{L} \quad d\lambda = \frac{\sigma dS}{L} \quad d\lambda = \frac{\sigma L dy}{L} \quad d\lambda = \sigma dy \quad (3.79)$$

Por tanto:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma dy (z\hat{k} - y\hat{j})}{|z\hat{k} - y\hat{j}|^2} \quad (3.80)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{z^2 + y^2} \hat{k} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dy}{z^2 + y^2} \hat{j} \right) \quad (3.81)$$

De la primera integral se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{z^2 + y^2} = \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + \frac{y^2}{z^2}} \quad (3.82)$$

Haciendo $y/z = \tan \theta$ se tiene que $y = z \tan \theta$, y por lo tanto $dy = z \sec^2 \theta d\theta$, luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{z^2 + y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (3.83)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{z^2 + y^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (3.84)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy}{z^2 + y^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \quad (3.85)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{zdy}{z^2 + y^2} = [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (3.86)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{zdy}{z^2 + y^2} = \pi \quad (3.87)$$

En cuanto a la segunda integral, tenemos que haciendo $U = z^2 + y^2$, $dU = 2ydy$, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydy}{z^2 + y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{dU}{U} \quad (3.88)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydy}{z^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln [z^2 + y^2]_{y=-\infty}^{y=\infty} \quad (3.89)$$

Esta es una integral impropia y para verificar su convergencia o no, se utiliza el siguiente criterio

Criterio. Si $f(x)$ es una función continua para todos los valores de x, y c es cualquier número real, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^c f(x)dx$$

Si los dos límites existen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln [z^2 + y^2]_{y=-\infty}^{y=\infty} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln [z^2 + y^2]_{y=a}^{y=0} \\ &+ \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln [z^2 + y^2]_{y=0}^{y=\infty} \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\frac{1}{2} \ln [z^2 + y^2]_{y=-\infty}^{y=\infty} = \frac{1}{2} \ln [z^2] - \frac{1}{2} \ln [z^2 + \infty] + \frac{1}{2} \ln [z^2 + \infty] - \frac{1}{2} \ln [z^2] \quad (3.91)$$

$$\frac{1}{2} \ln [z^2 + y^2]_{y=-\infty}^{y=\infty} = 0 \quad (3.92)$$

Por tanto:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad (3.93)$$

Ejemplo

Campo eléctrico creado por una distribución plana infinita de carga eléctrica con densidad ρ_s , utilizando coordenadas cilíndricas. **Figura 3.12**

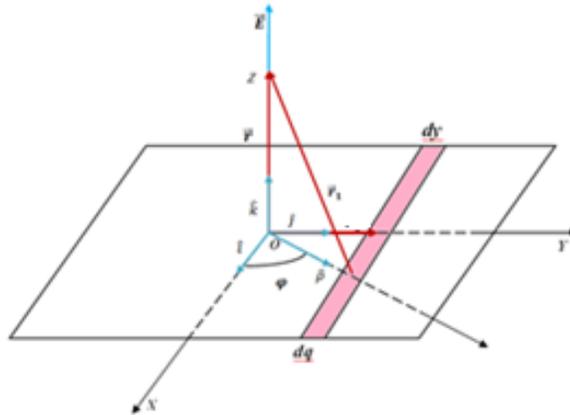


Figura 3.12: Distribución plana de carga eléctrica en coordenadas cilíndricas

Sea $dQ = \sigma dS$, donde $\sigma = \rho_s$. Entonces la ley de Coulomb para el campo eléctrico creado por el elemento de carga dQ es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS (\vec{r} - \vec{r}_0^1)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|^3} \quad (3.94)$$

Donde:

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r}_0^1 = \rho\hat{\rho} \quad \vec{r}_1 = z\hat{k} - \rho\hat{\rho} \quad dS = \rho d\rho d\varphi$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \rho d\rho d\varphi (z\hat{k} - \rho\hat{\rho})}{(z^2 - \rho^2)^{3/2}} \quad (3.95)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_S \frac{z\rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{k} - \int_S \frac{\rho^2 d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{\rho} \right) \quad (3.96)$$

En cuanto a la primera integral tenemos:

$$\int_S \frac{z\rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = z \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (3.97)$$

$$\int_S \frac{z\rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = 2\pi z \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (3.98)$$

Haciendo el cambio de variable $U = z^2 + \rho^2$, $dU = 2\rho d\rho$ se tiene que:

$$\int_S \frac{z\rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = \pi z \int U^{-3/2} dU \quad (3.99)$$

$$\int_S \frac{z\rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = -2\pi z \left[(z^2 + \rho^2)^{-1/2} \right]_0^\infty \quad (3.100)$$

Aplicando el siguiente criterio para las integrales impropias, se tiene:

Criterio.

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x)dx$$

Si este límite existe

$$-2\pi z \left[(z^2 + \rho^2)^{-1/2} \right]_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} -2\pi z \left[(z^2 + \rho^2)^{-1/2} \right]_0^b \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} -2\pi z \left[(z^2 + \rho^2)^{-1/2} \right]_0^{\infty} &= \lim_{b \rightarrow \infty} -2\pi z (z^2 + b^2)^{-1/2} \\ &\quad - \lim_{b \rightarrow 0} -2\pi z (z^2 + 0)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$-2\pi z \left[(z^2 + \rho^2)^{-1/2} \right]_0^{\infty} = \left(0 - \frac{1}{z} \right) 2\pi z \quad (3.103)$$

$$-2\pi z \left[(z^2 + \rho^2)^{-1/2} \right]_0^{\infty} = 2\pi \quad (3.104)$$

Por lo que:

$$\int_s \frac{z \rho d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = 2\pi \quad (3.105)$$

En cuanto a la segunda integral existe el inconveniente de $\hat{\rho}$ el cual no es un vector constante, pues depende de φ . Pero sabemos que:

$$\hat{\rho} = \hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi \quad (3.106)$$

Donde \hat{i} y \hat{j} si son vectores constantes, es decir, no dependen ni de ρ ni de φ . Por tanto:

$$\int_S \frac{\rho^2 d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{\rho} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} (\hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi) \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\rho^2 d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{\rho} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{i} \\ &+ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{j} \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\rho^2 d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{\rho} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 d\rho [\sin \varphi]_0^{2\pi}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{i} \\ &+ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 d\rho [-\cos \varphi]_0^{2\pi}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{j} \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\int_S \frac{\rho^2 d\rho d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{\rho} = 0 \quad (3.110)$$

Luego:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} (2\pi\hat{k} + 0\hat{\rho}) \quad (3.111)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad (3.112)$$

Taller

1. Hallar, utilizando la ley de Gauss, el campo eléctrico producido por:
 - a) Una carga lineal infinita y con densidad de carga eléctrica lineal λ .
 - b) Un plano infinito cargado eléctricamente con densidad de carga superficial ρ .
 - c) Una distribución superficial de carga eléctrica cilíndrica de radio r , longitud infinita y de densidad constante ρ .
 - d) Un disco cargado eléctricamente, a una distancia r de su centro y sobre su eje central.

2. Hallar, utilizando la ley de Coulomb, el campo eléctrico producido por:
 - a) Un anillo cargado eléctricamente, a una distancia r de su centro y sobre su eje central.
 - b) Un disco cargado eléctricamente, a una distancia r de su centro y sobre su eje central.
 - c) Por una esfera maciza cargada eléctricamente con densidad de carga volumétrica σ .

3. Sobre una capa esférica de radio r , se tiene una distribución superficial de carga eléctrica uniforme :

$$\sigma = 1\text{C}/\text{cm}^2 \quad (3.113)$$

Calcular:

- a) La carga total en la capa semiesférica.
- b) El campo eléctrico en el centro de la capa semiesférica.

3.6. Potencial eléctrico creado por una carga eléctrica puntual

Puesto que el campo electrostático creado por una carga eléctrica puntual es irrotacional, ($\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$), lo que lo hace un campo conservativo, se le puede asociar un campo escalar, (V), el cual será su potencial, de tal forma que:

$$-\nabla V = \vec{E} \quad (3.114)$$

$$-\left(\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) = \vec{E} \quad (3.115)$$

Recordando que el campo electrostático creado por una carga puntual tiene simetría esférica, es decir no depende de θ ni de ϕ , entonces el potencial asociado a él debe tener la misma simetría, con lo que:

$$-r \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^2} \hat{r} \quad (3.116)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \quad (3.117)$$

Entonces:

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr \quad (3.118)$$

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^r \quad (3.119)$$

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right] \quad (3.120)$$

V representa la diferencia de potencial entre los puntos r y r_0 , es decir:

$$V = V_r - V_0 \quad (3.121)$$

Si a V_0 se le asigna el valor de cero (0), entonces podemos hablar del potencial electrostático en el punto r .

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.122)$$

El campo escalar V , se llama el potencial electrostático creado por una carga eléctrica puntual, y sus unidades son;

$$[V]_{MKS} = \frac{Nm^2 C}{C^2 m} \quad (3.123)$$

$$[V]_{MKS} = \frac{Joules}{C} = Voltio \quad (3.124)$$

Nótese que el potencial electrostático tiene unidades de energía por unidad de carga eléctrica, por lo que se puede definir la energía potencial electrostática como la energía necesaria para llevar una carga eléctrica q_0 desde el punto r_0 , donde se ha tomado el potencial electrostático como cero (0), hasta el punto r como:

$$U_E = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.125)$$

La energía potencial electrostática y la fuerza electrostática producida por una carga eléctrica puntual cumplen la misma relación que hay

entre el campo electrostático creado por una carga eléctrica puntual y el potencial electrostático, es decir:

$$-\nabla U_E = \vec{F} \quad (3.126)$$

Si el potencial electrostático se calcula desde un marco de referencia cuyo origen no coincide con la carga q , entonces se tiene:

$$\vec{r} + \vec{r}_0 = \vec{r}_1 \quad (3.127)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \quad (3.128)$$

El potencial electrostático queda, por tanto, como:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} \quad (3.129)$$

El potencial electrostático producido por una distribución de n cargas puntuales es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n \quad (3.130)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_0^3|} \\ + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.131)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.132)$$

Donde, nuevamente, \vec{r} es el vector que va desde el origen al punto donde se está calculando el potencial y \vec{r}_0^n es el vector que va desde el origen hasta la carga n .

Ejemplo

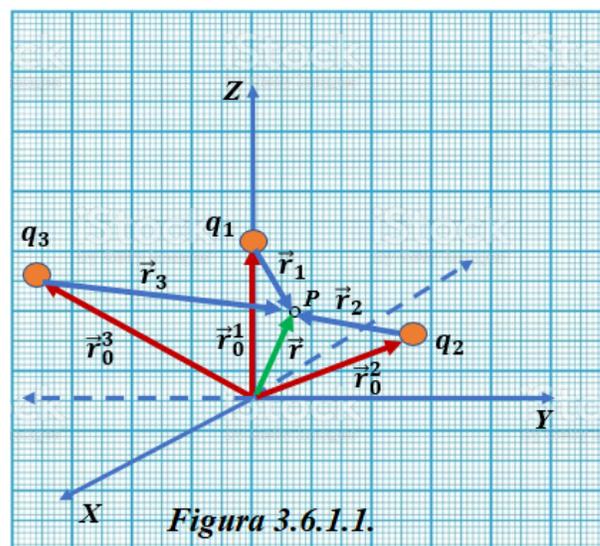


Figura 3.13: Configuración para la solución del ejemplo 3.6.1

Tres cargas puntuales $q_1 = 1\text{mC}$, $q_2 = -2\text{mC}$ y $q_3 = 3\text{mC}$ están, respectivamente, localizadas en los puntos $(0,0,4)$, $(-2,5,1)$ y $(3,-4,6)$.

1. Encontrar el potencial eléctrico en el punto $P(-1,1,2)$.
2. Calcular la diferencia de potencial V_{PQ} si el punto Q es $(1,2,3)$. Ver figura 3.13.

Solución

1.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.133)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|} + \frac{q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_0^3|} \right) \quad (3.134)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1mC}{|(-1, 1, 2) - (0, 0, 4)|} - \frac{2mC}{|(-1, 1, 2) - (-2, 5, 1)|} + \frac{3mC}{|(-1, 1, 2) - (3, -4, 6)|} \right) \quad (3.135)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1mC}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}} - \frac{2mC}{\sqrt{(1^2 + (-4)^2 + 1^2)}} + \frac{3mC}{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-4)^2}} \right) \quad (3.136)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1mC}{\sqrt{6}} - \frac{2mC}{\sqrt{18}} + \frac{3mC}{\sqrt{57}} \right) \quad (3.137)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(0,334 \times 10^{-3} \frac{C}{m} \right) \quad (3.138)$$

Teniendo en cuenta que:

$$[\epsilon_0]_{S.I} = \frac{C^2}{Nm^2} \quad (3.139)$$

Se tiene que:

$$\boxed{V = \frac{0,334 \times 10^{-3}}{4\pi\epsilon_0} \text{ Voltios}} \quad (3.140)$$

2. El potencial en el punto Q es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.141)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|} + \frac{q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_0^3|} \right) \quad (3.142)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1mC}{|(1,2,3) - (0,0,4)|} - \frac{2mC}{|(1,2,3) - (-2,5,1)|} + \frac{3mC}{|(1,2,3) - (3,-4,6)|} \right) \quad (3.143)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1mC}{\sqrt{1^2 - 2^2 - (-1)^2}} - \frac{2mC}{\sqrt{(3^2 - (-3)^2 - 2^2)}} + \frac{3mC}{\sqrt{(-2)^2 - 6^2 - (-3)^2}} \right) \quad (3.144)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1mC}{\sqrt{6}} - \frac{2mC}{\sqrt{22}} + \frac{3mC}{\sqrt{49}} \right) \quad (3.145)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(0,41 \times 10^{-3} \frac{C}{m} \right) \quad (3.146)$$

$$V = \frac{0,41 \times 10^{-3}}{4\pi\epsilon_0} \text{ Voltios} \quad (3.147)$$

Por tanto:

$$V_{PQ} = \frac{0,334 \times 10^{-3}}{4\pi\epsilon_0} \text{ Voltios} - \frac{0,41 \times 10^{-3}}{4\pi\epsilon_0} \text{ Voltios} \quad (3.148)$$

$$V = \frac{0,076 \times 10^{-3}}{4\pi\epsilon_0} \text{ Voltios} \quad (3.149)$$

Obsérvese que:

$$V_{PQ} = -V_{QP} \quad (3.150)$$

Lo que significa que, si una partícula viaja desde P a Q , la partícula pasa de un punto de mayor voltaje a uno de menor voltaje y por tanto pierde energía, lo que es lo mismo que decir que el campo eléctrico establecido entre los puntos realiza trabajo sobre la partícula, en caso contrario, un agente externo tiene que hacer el trabajo sobre la partícula.

Si la partícula es un electrón y la diferencia de potencial es de **1 Voltio**, se define la energía ganada (o perdida) por el electrón como **1 electrón voltio (1eV)**.

$$1eV = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Joules} \quad (3.151)$$

Ejemplo

1. Muestre que el potencial eléctrico creado por un dipolo eléctrico en un punto P a una distancia r de su centro viene dada por: **Figura 3.14**

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (3.152)$$

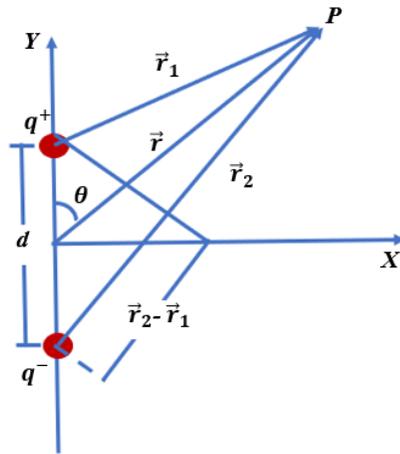


Figura 3.14: El dipolo eléctrico

2. Halle el campo eléctrico creado por el dipolo eléctrico en el punto P .

El potencial eléctrico de un dipolo, está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^2 \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.153)$$

Puesto que se conocen los vectores de posición de cada una de las cargas:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^2 \frac{q_n}{r_n} \quad (3.154)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) \quad (3.155)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) \quad (3.156)$$

Si $r_2 - r_1$ es muy pequeño, es decir si $d \ll r$ entonces se pueden asumir las siguientes aproximaciones:

$$\cos \theta = \frac{r_2 - r_1}{d} \quad (3.157)$$

$$r_2 - r_1 = d \cos \theta \quad (3.158)$$

$$r_2 r_1 = r^2 \quad (3.159)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cos \theta}{r^2} \right) \quad (3.160)$$

Puesto que la magnitud del momento dipolar se define como $p = qd$, en donde d es la distancia que separa las cargas, entonces:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p \cos \theta}{r^2} \right) \quad (3.161)$$

Para hallar el campo eléctrico del dipolo basta con calcular el gradiente del potencial eléctrico, el cual es independiente de φ :

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (3.162)$$

Como el gradiente en coordenadas esféricas viene dado por:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \quad (3.163)$$

$$\nabla V = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) \hat{\theta} \quad (3.164)$$

Por lo que:

$$\nabla V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{2 \cos \theta}{r^3} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(-\frac{\sin \theta}{r^2} \right) \hat{\theta} \right] \quad (3.165)$$

$$\nabla V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [-2 \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}] \quad (3.166)$$

Por tanto:

$$\vec{E} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}] \quad (3.167)$$

Un dipolo eléctrico está constituido por dos cargas eléctricas iguales, q , pero de signo contrario, separadas por una distancia d pequeña respecto al punto donde se considere su potencial eléctrico. Su momento dipolar inducido, \vec{p} , se define como el vector que se direcciona desde la carga positiva a la carga negativa, y tiene como magnitud el producto entre el valor de la carga eléctrica y la distancia que las separa.

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (3.168)$$

Un dipolo eléctrico que oscila es una fuente de ondas electromagnéticas, y pueden retransmitirlas, como sucede con las antenas de radio, y también son importantes en el calentamiento de alimentos en el horno microondas.

En algunos materiales, como el agua, sus moléculas son dipolos naturales, pero en otros los dipolos pueden ser inducidos por medio de campos magnéticos.

Taller

1. Dos protones en el núcleo de un átomo de U^{238} están a $6,0\text{fm}$ el uno del otro. ¿Cuál es la energía potencial, asociada a la fuerza eléctrica que actúa entre estas dos partículas?
2. Si se asume que en el sistema de cargas puntuales de la **figura 3.13**, las distancias entre las cargas son iguales y valen $d = 12\text{cm}$, y que $q_1 = +q$, $q_2 = -4q$ y $q_3 = +2q$, donde $q = 150\text{nC}$ ¿Cuál es la energía potencial del sistema?
3. Dos superficies conductoras planas y paralelas separadas $1,0\text{cm}$ entre sí, tienen una diferencia de potencial de $10,3\text{kV}$. Un electrón es proyectado directamente de una placa hacia la otra. ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón si llega al reposo justo en la superficie de la segunda placa?
4. La diferencia de potencial eléctrico entre puntos de descarga durante una tormenta eléctrica es de $1,23 \times 10^9\text{V}$. ¿Cuál es la magnitud del cambio en la energía potencial eléctrica de un electrón que se mueva entre estos puntos? Dé su respuesta en
 - a) Joules.
 - b) electrón-voltios.
5. Tres cargas eléctricas están en reposo tal como se muestra en la **figura 3.15 Taller**. Determine el valor de la distancia x para que la energía potencial eléctrica del sistema sea cero.

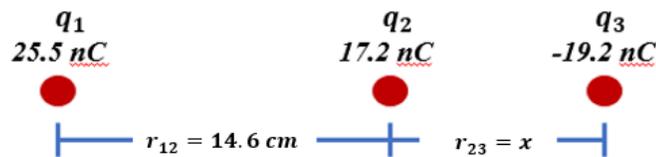


Figura 3.15: Configuración para el ejercicio 2 del taller

6. Dos placas conductoras paralelas y grandes, están separadas por 12cm y portan cargas iguales pero opuestas sobre las superficies que están encaradas. Un electrón situado a medio camino entre las dos placas experimenta una fuerza de $3,90 \times 10^{15}\text{N}$.
- Calcule el campo eléctrico en la posición del electrón.
 - ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?
7. El radio de un núcleo de oro es de $7,0 \times 10^{-15}\text{m}$ y el número atómico Z es 79 .
- ¿Cuál es el potencial eléctrico en la superficie del núcleo?
 - Calcule el gradiente radial del potencial, en V/m , en la superficie del núcleo.
8. En el modelo atómico de Rutherford el potencial eléctrico a una distancia r del centro del átomo está dado por

$$V = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right)$$

Muestre que el campo eléctrico en este modelo a una distancia r del centro viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^3} \right) \hat{r} \quad (3.169)$$

3.7. El potencial electrostático producido por distribuciones continuas de carga eléctrica

Para un sistema de N cargas eléctricas puntuales se dijo que el potencial electrostático producido en algún punto del espacio, estaba dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.170)$$

Si se considera que el número de cargas eléctricas es infinito ($n \rightarrow \infty$), entonces se debe considerar un elemento infinitesimal de carga eléctrica (dq) para que actúe como una carga eléctrica puntual. Por tanto:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_i di}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.171)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_i di}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.172)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_i \frac{\rho_i di}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (3.173)$$

O simplemente:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_i \frac{\rho_i di}{r} \quad (3.174)$$

Donde $i \equiv L, S, \text{ o } V$, y por tanto $\rho_i \equiv \rho_L, \rho_S, \text{ o } \rho_V$ ya sea que se trate con una distribución lineal, una distribución superficial, o una distribución volumétrica de carga eléctrica, y $d_i \equiv d_L, d_S, \text{ o } d_V$, es decir, un elemento diferencial de línea, de superficie o de volumen.

$$\rho_i = \frac{dq}{di} \quad (3.175)$$

Es decir:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_L dL}{r} \quad (3.176)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S dS}{r} \quad (3.177)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V dV}{r} \quad (3.178)$$

Ejemplo

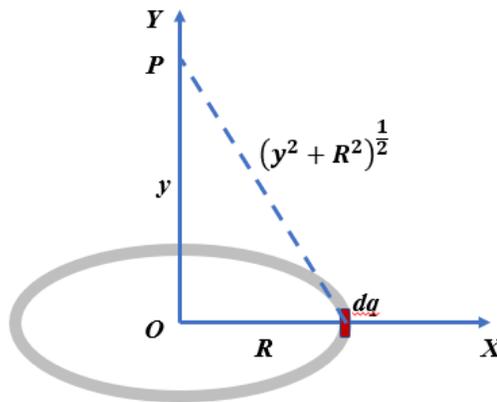


Figura 3.16: Anillo circular cargado eléctricamente. Ejemplo 3.7.1

Un anillo circular delgado de radio R tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente. Determinar el potencial eléctrico en un punto P sobre el eje del anillo a una distancia y , de su centro. **Figura 3.16.**

El potencial eléctrico producido por una distribución continua de carga está dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_i \frac{\rho_i di}{r} \quad (3.179)$$

siendo ρ_i y di la densidad de carga y el elemento diferencial correspondiente. En este caso se tiene una densidad superficial de carga eléctrica $\rho_i = \rho$ y un elemento diferencial de superficie dS ; por tanto:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_i \frac{\rho dS}{r} \quad (3.180)$$

La distancia de cualquier elemento de superficie o, si se quiere, de cualquier elemento diferencial de carga dq , hasta el punto donde se quiere determinar el potencial es:

$$r = (y^2 + R^2)^{1/2} \quad (3.181)$$

Luego:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho dS}{(y^2 + R^2)^{1/2}} \quad (3.182)$$

$$V = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + R^2)^{1/2}} \int_S dS \quad (3.183)$$

$$V = \frac{\rho S}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + R^2)^{1/2}} \quad (3.184)$$

Pero $\rho S = Q$, por lo que:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + R^2)^{1/2}} \quad (3.185)$$

Si el anillo estuviera construido con un hilo cargado eléctricamente, entonces:

$$\rho = \lambda \quad (3.186)$$

$$S = L \quad (3.187)$$

Y por tanto:

$$V = \frac{\lambda R}{2\pi\epsilon_0 (y^2 + R^2)^{1/2}} \quad (3.188)$$

Ejemplo

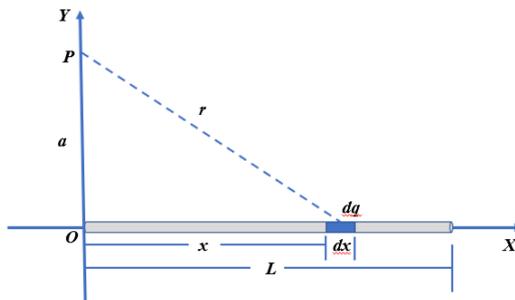


Figura 3.17: Barra cargada eléctricamente. Ejemplo 3.7.1

Una barra de longitud L ubicada a lo largo del eje x tiene una carga total Q y una densidad de carga lineal uniforme λ . Encontrar el potencial eléctrico en un punto P ubicado sobre el eje y , a una distancia a , del origen. **Figura 3.17.**

El potencial eléctrico está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_i \frac{\rho_i di}{r} \quad (3.189)$$

Como es una distribución lineal de carga eléctrica $\rho_i = \lambda$ y $d\mathbf{i} = dx$, por lo que:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \lambda = \text{cte.} \quad (3.190)$$

Para realizar la integral se reescribe como:

$$\int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int_0^L \frac{dx}{a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} \quad (3.191)$$

Haciendo la sustitución $\tan \theta = \frac{x}{a}$, se tiene:

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta \quad (3.192)$$

Por lo que:

$$\int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \int_0^L \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta} \quad (3.193)$$

$$\int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int_0^L \sec \theta d\theta \quad (3.194)$$

$$\int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |\sec \theta + \tan \theta|_0^L \quad (3.195)$$

$$\int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right|_0^L \quad (3.196)$$

$$\int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \frac{1}{a} \left| \sqrt{a^2 + x^2} + x \right|_0^L \quad (3.197)$$

$$\int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \frac{1}{a} \left| \sqrt{a^2 + L^2} + L \right|_0^L - \ln \frac{1}{a} |a| \quad (3.198)$$

$$\int_L \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left(\frac{\frac{1}{a} \left| \sqrt{a^2 + L^2} + L \right|}{\frac{1}{a} |a|} \right) \quad (3.199)$$

Por lo que:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\left| \sqrt{a^2 + L^2} + L \right|}{|a|} \quad (3.200)$$

Taller

1. Hallar el potencial eléctrico producido por:
 - a) Una carga lineal infinita con densidad de carga eléctrica lineal λ .
 - b) Un plano infinito cargado eléctricamente con densidad de carga superficial ρ .
 - c) Un anillo cargado eléctricamente, a una distancia r de su centro y sobre su eje central.
 - d) Un disco cargado eléctricamente, a una distancia r de su centro y sobre su eje central.

2. Hallar, por medio del gradiente, el campo eléctrico producido por:
 - a) Una carga lineal infinita con densidad de carga eléctrica lineal λ .
 - b) Un plano infinito cargado eléctricamente con densidad de carga superficial ρ .
 - c) Un anillo cargado eléctricamente, a una distancia r de su centro y sobre su eje central.
 - d) Un disco cargado eléctricamente, a una distancia r de su centro y sobre su eje central.

3. Encontrar el potencial eléctrico creado por un cilindro infinito cargado positivamente. **Figura 3.18. Taller.**

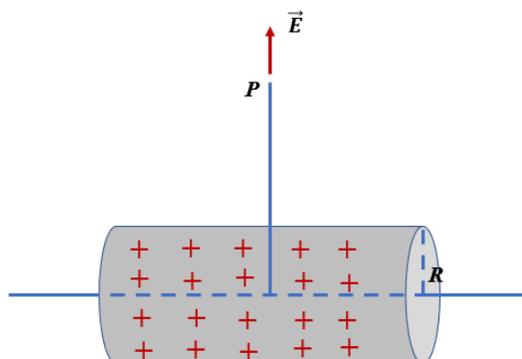


Figura 3.18: Cilindro circular recto cargado eléctricamente. Ejercicio 3 del taller.

Capítulo 4

MAGNETOSTÁTICA

4.1. Las leyes de la magnetostática

Al inicio del [capítulo 3](#) se señaló que las ecuaciones o leyes de Maxwell para campos eléctricos y magnéticos estacionarios, es decir, independientes del tiempo, eran tanto en su forma integral como diferencial:

Cuadro 4.1: Leyes de Maxwell Resumen

Forma integral	Forma diferencial
$\oint \vec{E} \circ d\vec{S} = 0$	$\nabla \circ \vec{E} = 0$
$\oint \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\nabla \circ \vec{B} = 0$
$\oint \vec{E} \circ d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \circ d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$
$\oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \circ d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$

Las dos primeras, junto a la *ley de Coulomb* y la expresión para la

fuerza eléctrica, gobiernan el campo de estudio de los campos eléctricos estacionarios, es decir, *la electrostática*. Las dos últimas, junto a la *ley de Biot-Savart* y la expresión para la fuerza magnética, gobiernan el campo de estudio de los campos magnéticos estacionarios, es decir, la *Magnetostática*.

Fuerza Magnética

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

Ley de Biot - Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{S} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.2)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{S} \times \vec{r}}{r^3} \quad (4.3)$$

El campo \vec{B} , se denominará en estas notas como *campo magnético*, pues también suele ser llamado como *campo de inducción magnética* o *densidad de flujo magnético*.

Como se puede observar en las leyes de Maxwell para la magnetostática, los campos magnéticos son campos que rotan, es decir tienen rotacional diferente de cero, pero su divergencia es cero. Que los campos magnéticos tengan divergencia cero, indica que las líneas de campo magnético son líneas cerradas, a diferencia de las líneas de campo eléctrico, las cuales son líneas abiertas. Es decir, no existen cargas magnéticas aisladas como si existen las cargas eléctricas aisladas. A las cargas magnéticas se les ha llamado polos: *Polo norte* y *Polo sur*.

De otra parte, que el rotacional de un campo magnético sea proporcional a la densidad de corriente, o que su circulación sea proporcional a la corriente estacionaria, indica que los campos magnéticos son producidos fundamentalmente por corrientes eléctricas estacionarias.

Otra gran diferencia entre los campos magnéticos estacionarios y los campos eléctricos estacionarios viene a través de la fuerza producida por cada uno de ellos.

Las fuerzas eléctricas son producidas sobre cargas eléctricas en reposo que se encuentran dentro de un campo electrostático y son paralelas a dicho campo eléctrico. Las fuerzas magnéticas son producidas sobre cargas eléctricas en movimiento dentro de un campo magnético estacionario y son perpendiculares a la dirección en que se mueve la carga eléctrica. Puesto que las corrientes eléctricas estacionarias son cargas eléctricas en movimiento entonces, las fuerzas magnéticas también se pueden ejercer sobre corrientes eléctricas estacionarias.

De lo anterior se deduce una propiedad fundamental de las fuerzas magnéticas: *Las fuerzas magnéticas no realizan trabajo alguno*, y por lo tanto no existe un potencial escalar magnético, como si existe el potencial escalar eléctrico, o diferencia de potencial.

Desde la ecuación para la fuerza magnética se deduce la unidad de medida para el campo magnético \vec{B} en el sistema internacional (SI). También conocido como sistema *M.K.S.*

Puesto que:

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Entonces:

$$[B]_{SI} = \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb m/sq}} = \text{tesla} \quad (4.4)$$

Llamada así en honor al inventor, ingeniero eléctrico, ingeniero mecánico y físico estadounidense *Nikola Tesla (1856-1943)*.

Obsérvese que el tesla también puede escribirse como:

$$1T = \frac{\text{Newton}}{\text{Amperios } m} \quad (4.5)$$

En el sistema cegesimal, (C.G.S), propuesto en 1832 por el matemático y físico alemán *Karl Friedrich Gauss*, por lo que también suele llamarse como sistema gaussiano, la unidad para el campo magnético \vec{B} es el gauss.

$$1\text{gauss} = 10^{-4}\text{teslas} \quad (4.6)$$

También el tesla suele definirse en términos del flujo magnético como:

$$1T = \frac{\text{weber}}{m^2} \quad (4.7)$$

4.2. La fuerza magnética sobre cargas eléctricas en movimiento

Se dijo que una partícula cargada eléctricamente que se mueva dentro de un campo magnético \vec{B} experimenta una fuerza magnética \vec{F}_M , dada por:

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Pero la partícula puede también, estar dentro de un campo eléctrico \vec{E} , por lo que también experimenta una fuerza eléctrica \vec{F}_E , dada por:

$$\vec{F}_E = q\vec{E} \quad (4.8)$$

De tal forma que la fuerza sobre la partícula es;

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.9)$$

Esta última expresión se conoce como *fuerza de Lorentz*.

Ejemplo

Un protón que viaja a $23,0^\circ$ con respecto a un campo magnético de $2,63\text{mT}$ de intensidad, experimenta una fuerza magnética de $6,48 \times 10^{-17}\text{N}$. Calcular la energía cinética, en eV , del protón.

Solución. Como

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Entonces la magnitud de la fuerza magnética es:

$$F_M = qvB \sin \theta$$

Por lo que:

$$v = \frac{6,48 \times 10^{-17}\text{N}}{(1,6 \times 10^{-19}\text{C})(2,63 \times 10^{-3}\text{T}) \sin 23,0^\circ}$$

$$v = 3,94 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C} \frac{\text{N}}{\text{cm}/\text{sg}}}$$

$$v = 3,94 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{sg}}$$

Por tanto, la energía cinética del protón es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(1,6726 \times 10^{-27} \text{kg} \right) \left(3,94 \times 10^5 \text{m/s} \right)^2$$

$$K = 12,98 \times 10^{-17} \text{J}$$

$$K = \left(12,98 \times 10^{-17} \text{J} \right) \left(\frac{1 \text{eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{J}} \right)$$

$$K = 811,25 \text{eV}$$

Ejemplo

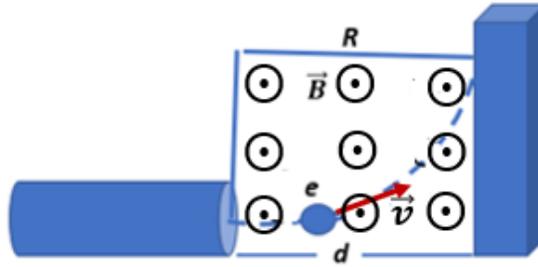


Figura 4.1: Haz de electrones saliendo de una ventana de un tubo acelerador. Ejemplo 4.2.2

Un haz de electrones cuya energía cinética es K sale de una “ventana” de lámina delgada en el extremo de un tubo acelerador. Existe una

placa de metal a una distancia d de esta ventana y en ángulo recto con la dirección del haz que sale.

1. Demuestre que podemos impedir que el haz choque contra la placa si aplicamos un campo magnético \vec{B} tal que

$$B \geq \sqrt{\frac{2mk}{e^2 d^2}}$$

2. ¿Cómo debe estar orientado B ? **Figura 4.1.**

Solución.

1. El campo magnético \vec{B} debe producir en los electrones una fuerza centrípeta tal que defleccione el rayo electrónico hacia arriba antes de chocar con la placa de metal, por tanto, podemos calcular la magnitud del campo con el límite puesto por la placa, es decir con un radio igual a d .

$$\frac{mv^2}{d} = evB$$

$$B = \frac{mv}{ed}$$

Pero:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

Por tanto:

$$B = \frac{m}{ed} \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$B = \sqrt{\frac{2mK}{e^2d^2}}$$

Como para que el rayo no choque con la placa $R \leq d$, entonces:

$$B \geq \sqrt{\frac{2mK}{e^2d^2}}$$

2. Aplicando la ley de la mano derecha y teniendo en cuenta que la carga eléctrica del electrón es negativa y, por tanto, invierte la dirección de la fuerza entonces el campo magnético \vec{B} debe salir del plano de la página.

Ejemplo

En 1897 *J. J. Thomson* descubrió el electrón midiendo la razón *carga – masa* de los rayos catódicos, los cuales hoy en día se sabe que son rayos de electrones, de la siguiente forma:

1. Primero él pasó el rayo a través de dos campos uniformes cruzados, uno eléctrico \vec{E} y otro magnético \vec{B} , mutuamente perpendiculares y perpendiculares al rayo. Ajustó el campo eléctrico hasta lograr que el rayo no se desviara y midió la velocidad del rayo en términos de los campos. ¿Cuál fue dicha velocidad?
2. Luego apagó el campo eléctrico y midió el radio de curvatura, R , del haz desviado solo por el campo magnético. En términos de E , B y R , ¿Cuál es la razón carga – masa de las partículas?

Solución

1. *Thomson* al ajustar el campo eléctrico para que el rayo no se desviara logró que la fuerza de Lorentz fuera cero y, por tanto, obtuvo:

$$\vec{F}_E = -\vec{F}_M$$

Es decir:

$$eE = evB$$

Por lo que:

$$v = E/B$$

2. Al apagar el campo eléctrico y medir el radio de curvatura producido por el campo magnético \vec{B} , *Thomson* obtuvo:

$$\frac{mv^2}{R} = evB$$

De donde:

$$\frac{mE}{RB} = eB$$

Es decir:

$$\frac{e}{m} = \frac{E}{B^2 R}$$

La **figura 4.2** muestra el esquema experimental de *Thomson* para la determinación de la relación carga-masa del electrón: en él se pueden observar el condensador plano y el juego de imanes que producen el campo eléctrico y el campo magnético, perpendiculares a la trayectoria del electrón.

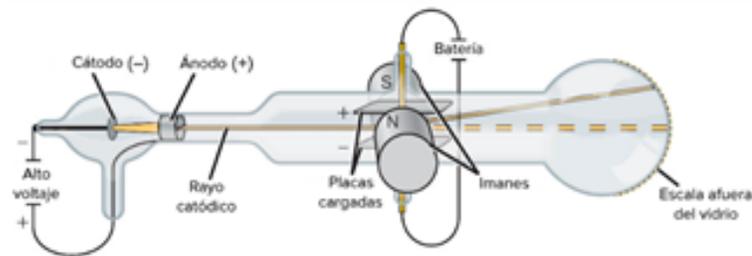


Figura 4.2: Esquema experimental de Thomson. Tubo de rayos catódicos. Ejemplo 4.2.3

La **figura 4.3** muestra esquemáticamente las direcciones de los campos y las fuerzas por ellos producidos. Si la fuerza eléctrica y la fuerza magnética se llegan a igualar en magnitud, entonces el electrón adquirirá la velocidad \vec{v}_y .

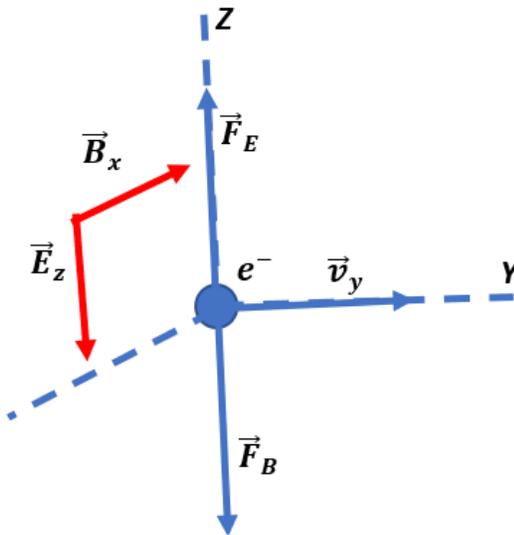


Figura 4.3: La fuerza eléctrica, la fuerza magnética y la velocidad del haz electrónico en el experimento de Thomson. Ejemplo 4.2.3

La **figura 4.4** representa una vista lateral del tubo de Crookes mostrando la desviación parabólica que sufre el electrón debido a la fuerza eléctrica, mientras que la **figura 4.5** representa una vista lateral del *tubo de Crookes* que muestra la desviación circular que sufre el electrón debido a la fuerza magnética.

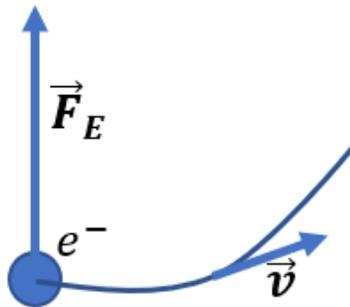


Figura 4.4: Desviación del rayo electrónico producido por el campo eléctrico. Ejemplo 4.2.3

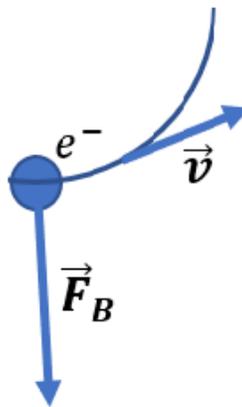


Figura 4.5: Desviación del rayo electrónico producido por el campo magnético. Ejemplo 4.2.3

Es bueno tener en cuenta para la determinación de la dirección de las fuerzas magnética y eléctrica, que la carga eléctrica del electrón se considera negativa.

4.3. Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica

Puesto que una corriente eléctrica la constituyen cargas eléctricas (**electrones**) que se mueven dentro de un conductor, entonces una corriente eléctrica debe ser afectada por un campo magnético dentro del cual se encuentre. De tal forma que, la fuerza magnética sobre un conductor por el que circula una corriente i estará dada por:

$$\vec{F}_M = -Ne\vec{v}_e \times \vec{B} \quad (4.10)$$

Donde N es el número de electrones en el conductor y \vec{v}_e la velocidad con que se mueven los electrones en el conductor y que es:

$$v_e = \frac{i}{nAe} \quad (4.11)$$

La densidad de electrones en el conductor, considerado recto, es decir, el número de electrones por unidad de volumen, es:

$$n = \frac{N}{LA} \quad (4.12)$$

Donde L es la longitud del conductor y A su área transversal.

Por tanto, la fuerza magnética sobre el conductor se puede escribir como:

$$\vec{F}_M = -nLAe\vec{v}_e \times \vec{B} \quad (4.13)$$

Por lo que:

$$\vec{F}_M = i\vec{L} \times \vec{B} \quad (4.14)$$

Donde L es un vector cuya magnitud es igual a la longitud del conductor y su dirección es opuesta a la dirección en que se desplazan los electrones dentro del conductor. Es decir, \vec{L} tiene la dirección en que circula la corriente.

Si el conductor por el cual circula la corriente no es rectilíneo, entonces se considera el conductor dividido en pequeños elementos rectilíneos $d\vec{L}$:

$$d\vec{F}_M = id\vec{L} \times \vec{B} \quad (4.15)$$

$$\vec{F}_M = i \int d\vec{L} \times \vec{B} \quad (4.16)$$

Ejemplo

Una espira rectangular conductora, que soporta una masa m , cuelga verticalmente con un extremo dentro de un campo magnético uniforme \vec{B} , que apunta hacia la página. Para qué corriente i , en la espira, ¿La fuerza magnética equilibraría exactamente la fuerza gravitacional? **Figura 4.6**

Solución

Puesto que la fuerza magnética está dada por:

$$\vec{F}_M = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Se tiene lo siguiente:

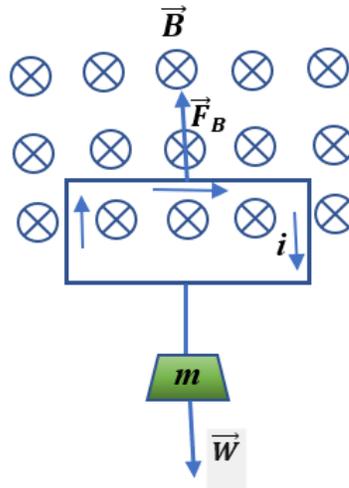


Figura 4.6: Espira rectangular conductora parcialmente sumergida en un campo magnético uniforme soportando una masa m . Ejemplo 4.3.1

1. Sea cual sea la dirección en que circule la corriente en el alambre, la fuerza magnética ejercida sobre los tramos verticales del alambre sumergidos en el campo magnético se cancela, pues tienen igual magnitud, pero dirección opuesta.
2. Para que aparezca la fuerza magnética \vec{F}_M que equilibra el peso de la masa m , la corriente eléctrica i debe circular en el sentido de las manecillas del reloj en la espira.

Por tanto:

$$F_M = iBL$$

$$mg = iBL$$

$$i = \frac{mg}{BL}$$

Nota. Si la corriente en la espira se aumenta la fuerza magnética sobre ella también crece y, por tanto, el peso comienza a subir. Obviamente, esto representa un trabajo sobre la masa m , y existe la tentación de asociar este trabajo con la fuerza magnética \vec{F}_M .

$$W = F_M h$$

$$W = iBLh$$

Donde h es el desplazamiento vertical sufrido por la masa m .

Si bien es cierto que éste es el valor real del trabajo hecho sobre la masa, lo cierto es que no es realizado por la fuerza magnética, pues recordemos que *Las fuerzas magnéticas no realizan trabajo alguno*. La explicación se encuentra fuera del interés de estas notas.

Ejemplo

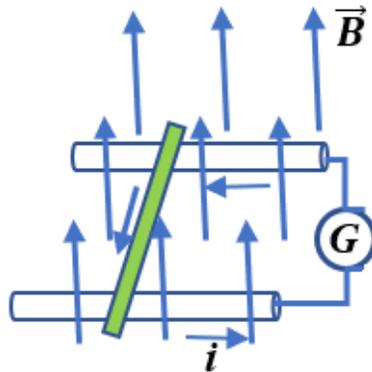


Figura 4.7: Alambre de metal dentro de un campo magnético uniforme y que se desliza sobre dos rieles. Ejemplo 4.3.2

Un alambre de metal de masa m se desliza sin fricción sobre dos rieles horizontales separados una distancia L . El sistema está dentro de un

campo magnético vertical uniforme \vec{B} . Una corriente estacionaria i fluye desde el generador G a lo largo de un riel, a través del alambre, y de regreso al otro riel. Halle la velocidad del alambre en función del tiempo, suponiendo que en $t = 0$ se encontraba en reposo. **Figura 4.7**

Solución. Desde la segunda ley de Newton se obtiene:

$$F_M = ma$$

Como

$$\vec{F}_M = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Entonces

$$ilB = ma$$

Por lo que

$$a = \frac{ilB}{m}$$

Como:

$$v_f = v_0 + at$$

Y

$$v_0 = 0 \quad t = 0$$

Entonces:

$$v_f = \frac{ilB}{m}t$$

Obsérvese que según la **figura 4.3.2.1** el campo magnético \vec{B} sale del plano de la página, por lo que el alambre se moverá hacia la derecha según la ley de la mano derecha, en caso contrario la varilla se movería hacia la izquierda.

Ejemplo

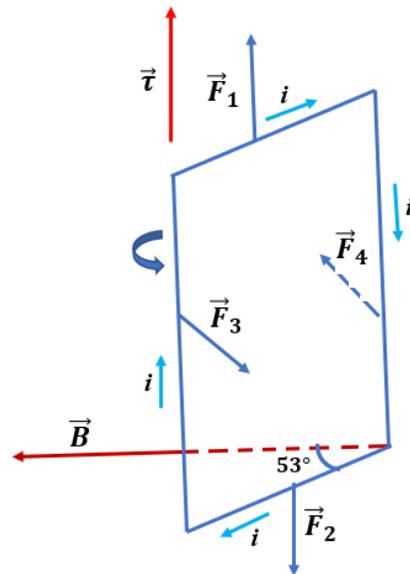


Figura 4.8: Espira rectangular sumergida en un campo magnético y que puede girar sobre uno de sus lados. Ejemplo 4.3.3

Una bobina rectangular de **20** vueltas de alambre, tiene dimensiones de **12cm** por **5,0 cm**. Porta una corriente de **0,19A** y está sujeta, por un lado. El plano de la bobina forma un ángulo de 53° con la dirección de un campo magnético uniforme de **0,50T**. Calcule el torque, o momento

de torsión, alrededor del lado por el cual se encuentra sujeta, que actúa sobre la bobina.

Solución

El torque, o momento de torsión, está dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_M$$

Donde \vec{r} es el brazo de aplicación de la fuerza magnética, la cual está dada por:

$$\vec{F}_M = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Sobre la espira se van a presentar cuatro fuerzas, cada una sobre cada lado de la espira.

Observando la **figura 4.8** y aplicando la ley de la mano derecha, se tiene que las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 además de producir torques iguales y contrarios tienen la misma línea de acción, por lo que se anularán. Lo que no sucede con los torques producidos por las fuerzas \vec{F}_3 y \vec{F}_4 , los cuales, a pesar de ser iguales en magnitud, pero de dirección opuesta, no se anulan pues sus líneas de acción no son las mismas.

Calculando la magnitud de los torques producidos por \vec{F}_1 y \vec{F}_2 se tiene:

$$F_1 = ibB \sin(\pi - 53^\circ)$$

$$F_1 = ibB \sin 53^\circ$$

Por tanto:

$$\tau_1 = \frac{a}{2} ibB \sin 53^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{A}{2} iB \sin 53^\circ$$

De otra parte:

$$F_2 = ibB \sin 53^\circ$$

$$\tau_2 = \frac{a}{2} ibB \sin 53^\circ$$

$$\tau_2 = \frac{A}{2} iB \sin 53^\circ$$

Lo que confirma lo dicho para los torques τ_1 y τ_2 .

De otra parte, el torque producido por la fuerza \vec{F}_4 es cero, pues su brazo de aplicación es cero. Es decir, la fuerza \vec{F}_4 no produce torque alguno, pues está aplicada sobre el eje de rotación a , por lo que queda solamente el torque producido por la fuerza \vec{F}_3 .

Como la fuerza tres \vec{F}_3 , está dada por:

$$F_3 = NiaB$$

Entonces el torque tres τ_3 viene dado por:

$$\tau_3 = bNiaB$$

$$\tau_3 = NiaB$$

$$\tau = 20(0,19A)(60cm^2)(0,50T)$$

$$\tau = 0,114 \times 10^{-4} N - m$$

Es interesante notar que el momento de torsión, o torque, que el campo magnético \vec{B} ejerce sobre la espira de corriente no depende del lado por el cual esté sujeta, pues dicho torque depende únicamente de su área, el número de vueltas y de la corriente que conlleva, pero en ningún caso depende de la distancia a la que se está ejerciendo la fuerza; éste no es el caso si la espira fuera una puerta sometida a una fuerza mecánica, pues en este caso los torques son:

$$\vec{\tau} = \vec{a} \times \vec{F} \quad \text{si la puerta está sostenida por el lado b} \quad (4.17)$$

$$\vec{\tau} = \vec{b} \times \vec{F} \quad \text{si la puerta está sostenida por el lado a} \quad (4.18)$$

La no dependencia del torque de la espira de corriente de la distancia a la cual se aplique la fuerza magnética, es una de las razones para que, por similitud con el dipolo eléctrico, se defina la espira de corriente, e, independiente de su geometría, como un dipolo magnético con momento dipolar μ , donde:

$$\mu = NiA \quad (4.19)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (4.20)$$

4.4. La ley de Ampère

La primera parte de la cuarta ley (o ecuación) de Maxwell constituye la ley de Ampère y como tal constituye una ley fundamental del magnetismo. Es decir:

$$\oint \vec{B} \circ d\vec{r} = \mu_0 i \quad (4.21)$$

La integral constituye una integral de línea o integral de circulación. Siempre se realiza sobre una trayectoria cerrada. μ_0 se llama constante de permeabilidad magnética y tiene un valor de

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A} \quad (4.22)$$

i se llama corriente de conducción, debido a que su presencia necesita de algún material conductor (recuerde que la segunda parte de la cuarta ley de Maxwell se denomina corriente de desplazamiento, la cual no necesita conductor alguno). Así mismo, las corrientes de conducción aquí involucradas son las llamadas *corrientes estacionarias*. “corriente eléctrica estacionaria. [ing. stationary electrical current] Corriente eléctrica que se produce en un conductor de forma que la densidad de carga ρ de cada punto del conductor es constante; es decir que, se cumple que $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Por tanto, para las corrientes estacionarias, la ecuación de continuidad toma la forma $\nabla \circ \vec{j} = 0$, que es una definición de corriente estacionaria equivalente a la primera. Las dos anteriores propiedades equivalen a decir que la carga de cualquier volumen del conductor no varía o, también, que la cantidad de carga que en cada unidad de tiempo entra en un volumen del conductor sale de él. Esto debe ser así si la carga en su interior ha de permanecer constante”. (F. R. Quintela y R. C. Redondo Melchor).

Es decir que, la *ley de Ampère* establece que, si por un conductor eléctrico circula una corriente estacionaria i , esta corriente produce alrededor del conductor un campo magnético tal que su circulación es proporcional a ella. La dirección del campo magnético producido está dada por la ley de la mano derecha. **Figura 4.4.1.2.**

Al igual que en la electrostática existen dos leyes equivalentes para calcular el campo eléctrico, la *ley de Gauss* y la *ley de Coulomb*, donde la aplicación de la primera exige un alto grado de simetría en la distribución de carga eléctrica que produce el campo y, la segunda permite calcular

el campo eléctrico para cualquier distribución de carga, en magnetostática también existen dos leyes equivalentes con igual característica: la *ley de Ampère* y la *ley de Biot-Savart*. La primera exige un alto grado de simetría para la distribución de corriente que produce el campo magnético, la segunda se aplica a cualquier distribución de corriente.

Para calcular el campo magnético mediante la *Ley de Ampère* se debe:

1. Identificar la simetría de la distribución de corrientes para poder escoger el sistema coordenado apropiado.
2. Construir la curva de integración de acuerdo a la simetría identificada, la cual debe ser cruzada por la o las corrientes que producen el campo magnético. A dicha curva de integración se le llama *anillo amperiano*, *bucle amperiano* o simplemente *curva amperiana*. Recuerdese que, para aplicar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico, se debe construir la *superficie de integración* o *superficie gaussiana*, de acuerdo a la simetría del problema.

La *Ley de Ampère* es producto del desarrollo físico y matemático que *Ampère* hizo del descubrimiento experimental de la relación entre la electricidad y el magnetismo, hecho por el físico y químico danés *Hans Christian Ørsted (1777-1851)*, cuando en 1820 observa la desviación de una aguja imantada por una corriente eléctrica. **Figuras A.5.5 y A.5.6.**

André-Marie Ampère (1775 - 1836) fue un físico francés, considerado el Fundador de la actual disciplina de la física conocida como electromagnetismo o electrodinámica. En 1820, llegó a la conclusión de que una corriente eléctrica puede producir efectos magnéticos sobre otra corriente, estableciendo que dos conductores que transporten corriente eléctrica en la misma dirección se atraen, mientras que, si las corrientes tienen direcciones opuestas los conductores se repelen, dando con ello los principios para la balanza de corriente o balanza de Ampère. **Figuras 4.9 y 4.10.**

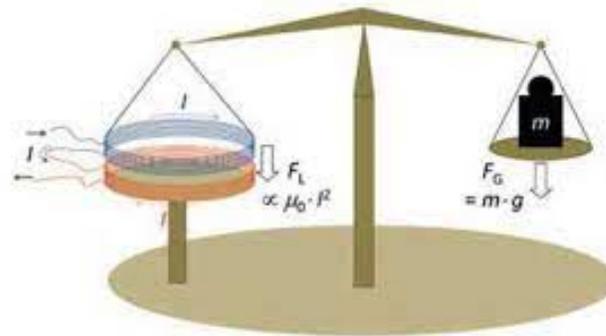


Figura 4.9: Balanza de corriente o balanza de Ampère

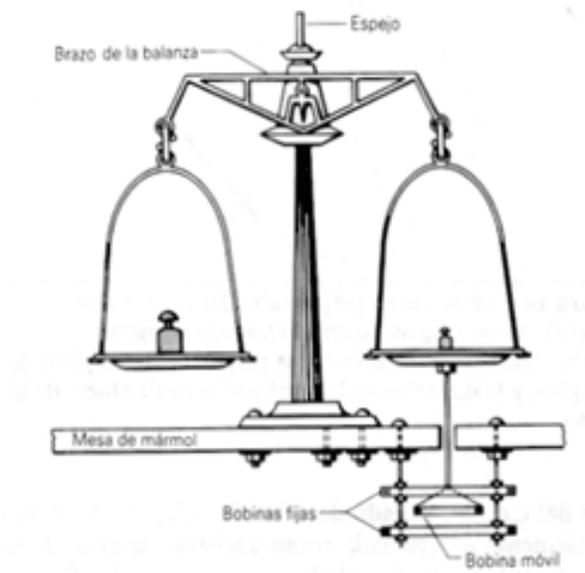


Figura 4.10: Balanza de corriente o balanza ed Ampère

Explica la existencia del magnetismo natural por medio de lo que hoy se denominan *corrientes amperianas*, es decir de corrientes a nivel molecular, dejando con ello establecido que todo el magnetismo se debe a movimientos de cargas eléctricas, tanto a nivel macroscópico como a nivel microscópico.



Figura 4.11: André Marie Ampère

Ejemplo

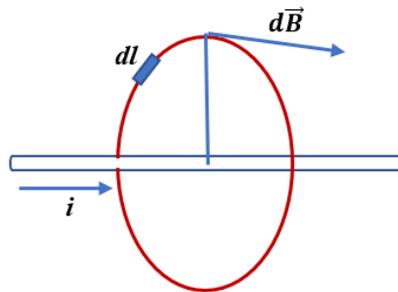


Figura 4.12: Alambre recto que conduce una corriente estacionaria i .
Ejemplo 4.4.1

Encontrar el campo magnético a una distancia r de un alambre recto, que lleva una corriente eléctrica estacionaria i .

Solución. Como se ve en la **figura 4.12**, la simetría del problema exige que la curva, anillo o bucle amperiano sea una circunferencia de radio r , la cual es atravesada por la corriente i .

Considerando un elemento infinitesimal de longitud $d\vec{l}$, se tiene:

$$\oint \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 i \quad (4.23)$$

Pero como el campo magnético \vec{B} creado por la corriente i es tangente a la circunferencia, entonces:

$$\oint B dl = \mu_0 i \quad (4.24)$$

Por simetría la magnitud del campo magnético \vec{B} es constante sobre la circunferencia de radio r , entonces:

$$B \oint dl = \mu_0 i \quad (4.25)$$

Por lo que

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \quad (4.26)$$

Y así el valor del campo magnético producido por la corriente i a la distancia r del alambre es:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (4.27)$$

La dirección del campo magnético se establece, como se dijo anteriormente, mediante la ley de la mano derecha, donde el dedo pulgar señala

la dirección de la corriente y los otros cuatro dedos se enrollan alrededor del conductor estableciendo la dirección del campo magnético. **Figura 4.13.**

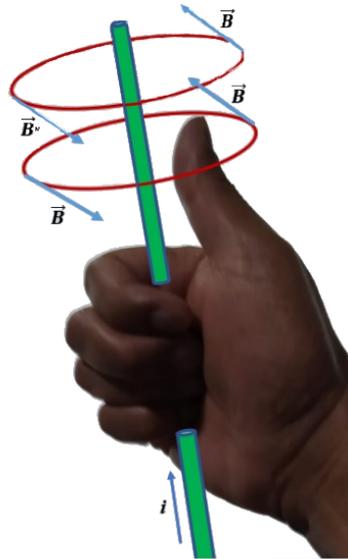


Figura 4.13: ley de la mano derecha para establecer la dirección de un campo magnético producido por una corriente estacionaria. Ejemplo 4.4.1

Ejemplo

Por un conductor sólido no magnético, recto e infinitamente largo, con sección transversal circular de radio R , circula una corriente estacionaria i . Determine el valor del campo magnético \vec{B} , dentro y fuera del conductor.

Solución.

1. *Dentro del conductor, $r_i < R$.* Puesto que el problema tiene simetría cilíndrica y el campo magnético \vec{B} tiene dirección según $\hat{\phi}$, entonces se puede escribir el campo magnético como:

$$\vec{B}_i = B_i \hat{\phi} \quad (4.28)$$

Ver las figuras 4.14 y 4.15.

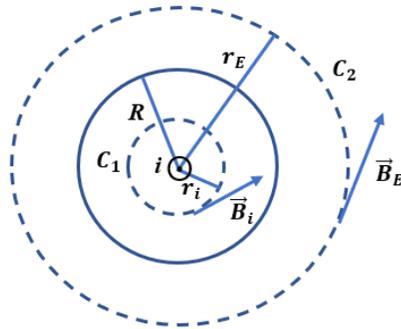


Figura 4.14: Sección transversal de un sólido cilíndrico recto no magnético que conlleva una corriente estacionaria i . Ejemplo 4.4.2

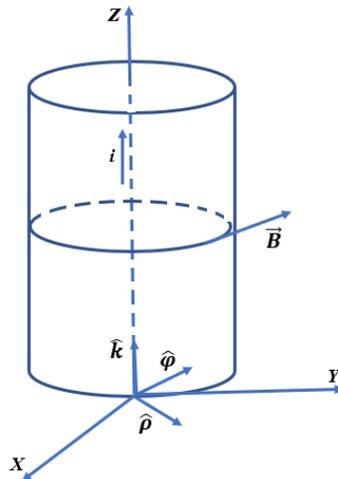


Figura 4.15: Sólido cilíndrico recto no magnético que conlleva una corriente estacionaria i con coordenadas cilíndricas. Ejemplo 4.4.2

El elemento de longitud es:

$$d\vec{l} = r_i d\varphi \hat{\varphi} \quad (4.29)$$

Por tanto:

$$\oint_C \vec{B}_i \circ d\vec{l} = \mu_0 i_i \quad (4.30)$$

$$\int_0^{2\pi} (B \hat{\varphi}) \circ (r_i d\varphi \hat{\varphi}) = \mu_0 i_i \quad (4.31)$$

$$\int_0^{2\pi} B_i r_i d\varphi = \mu_0 i_i \quad (4.32)$$

$$B_i r_i \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 i_i \quad (4.33)$$

$$B_i r_i (2\pi) = \mu_0 i_i \quad (4.34)$$

$$B_i = \frac{\mu_0 i_i}{2\pi r_i} \quad (4.35)$$

Pero:

$$i_i = j A_i \quad (4.36)$$

Siendo J la densidad de corriente en el cilindro y A_i el área encerrada por C_i . Entonces:

$$i_i = \frac{j}{\pi R^2} (\pi r_i^2) \quad (4.37)$$

$$i_i = \frac{j}{R^2} R^2 \quad (4.38)$$

Por tanto:

$$\boxed{B_i = \frac{\mu_0 r_i j}{2\pi R^2}} \quad (4.39)$$

2. *Fuera del conductor, $r_E < R$.*

Igual que para el interior del conductor, el campo magnético \vec{B} y el elemento de longitud, se pueden escribir como:

$$\vec{B}_E = B\hat{\phi} \quad (4.40)$$

$$d\vec{l} = r_E d\phi \hat{\phi} \quad (4.41)$$

Por tanto:

$$\oint_C \vec{B}_E \circ d\vec{l} = \mu_0 i \quad (4.42)$$

$$\int_0^{2\pi} (B_E \hat{\phi}) \circ (r_E d\phi \hat{\phi}) = \mu_0 i \quad (4.43)$$

$$\int_0^{2\pi} B_E r_E d\phi = \mu_0 i \quad (4.44)$$

$$B_E r_E \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 i \quad (4.45)$$

$$B_E r_E (2\pi) = \mu_0 i \quad (4.46)$$

$$B_E = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_E} \quad (4.47)$$

La **figura 4.16**, representa el comportamiento del campo magnético dentro del conductor y fuera de él, con respecto al radio del conductor. ¿Le recuerda algo este comportamiento?

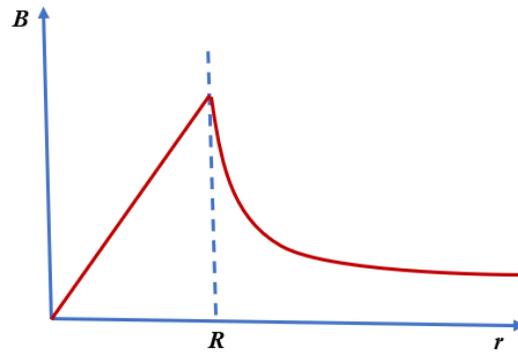


Figura 4.16: Comportamiento del campo magnético producido por un sólido cilíndrico recto no magnético que conlleva una corriente estacionaria i . Ejemplo 4.4.2

Ejemplo

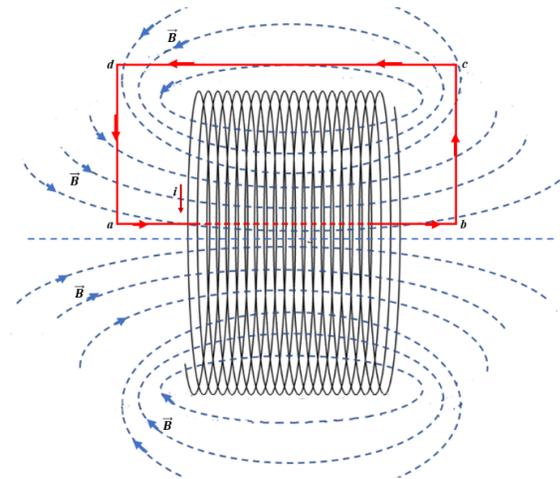


Figura 4.17: Solenoide cilíndrico conduciendo una corriente i . Ejemplo 4.4.3

Encontrar el campo magnético de un solenoide muy largo, que consta de n vueltas por unidad longitud, enrolladas fuertemente apretadas, en un cilindro de radio R y que lleva una corriente constante i .

Solución. Un solenoide es un enrollamiento, generalmente de forma circular, de un material conductor, el cual se caracteriza por producir un fuerte y bastante uniforme campo magnético en su interior, pero débil en el exterior, el cual suele despreciarse para fines prácticos. También se acostumbra llamarlo Bobina o electroimán. El enrollamiento se puede hacer sobre un núcleo de algún material (hierro, por ejemplo) o sin núcleo alguno. **Figura 4.17**

Aplicando la ley de Ampere a la trayectoria amperiana rectangular de la Figura 4.17, se tiene;

$$\oint \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 i \quad (4.48)$$

$$\int_a^b \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_d^e \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 i \quad (4.49)$$

Puesto que en los lados $b - c$ y $e - d$ el campo magnético \vec{B} y el elemento de línea son perpendiculares, las integrales respectivas son cero. Lo mismo sucede con la integral sobre el lado $c - d$, pues se ha dicho que el campo magnético \vec{B} externo es débil y se puede despreciar.

Por tanto:

$$\int_a^b \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 i \quad (4.50)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{L} \quad (4.51)$$

Si por cada espira circula una corriente i_0 , entonces la corriente total dentro de la trayectoria amperiana es:

$$i = nLi_0 \quad (4.52)$$

Donde n es el número de espiras por unidad de longitud.

Y, por tanto, el campo magnético \vec{B} creado por el solenoide es:

$$B = \mu_0 ni_0 \quad (4.53)$$

4.5. La ley de Biot-Savart

En 1820, el físico, astrónomo y matemático francés *Jean-Baptiste Biot* (1774 - 1862) en colaboración con el también físico y cirujano militar *Félix Savart* (1791-1841) establecieron, a partir de mediciones de laboratorio, una expresión para calcular el campo magnético, en cualquier punto del espacio, producido por un conductor eléctrico que conlleva una corriente i . Esta expresión se conoce como la *ley de Biot-Savart*, la cual, al igual que la ley de Coulomb para la electrostática, es una ley del inverso del cuadrado de la distancia del conductor al punto donde se quiere calcular el campo magnético.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{L} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.54)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{L} \times \vec{r}}{r^3} \quad (4.55)$$

De acuerdo a la **figura 4.18**, dL es el elemento infinitesimal de longitud del conductor que transporta la corriente i ; $d\vec{L}$ es un vector cuya magnitud es igual al elemento infinitesimal de longitud y su dirección está definida en la dirección en que circula la corriente; \vec{r} es el vector que posiciona el punto P donde se va a calcular el campo magnético,

cuya magnitud es la distancia desde el elemento de conductor al punto en cuestión; \hat{r} es el vector unitario construido sobre \vec{r} y la dirección del campo magnético en el punto P está dada por el producto vectorial $d\vec{L} \times \hat{r}$.

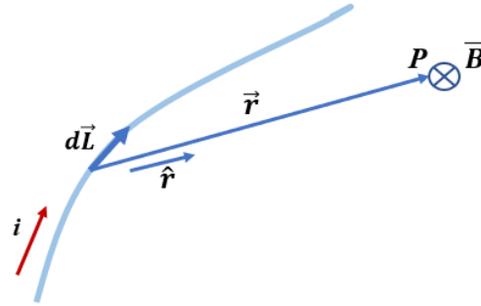


Figura 4.18: Elemento infinitesimal de longitud de corriente que produce un campo magnético en el punto P

Se puede observar que, al igual que la ley de Coulomb, la *ley de Biot-Savart* también puede expresarse con el cubo de la distancia, teniendo en cuenta que:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (4.56)$$

Para el caso de calcular el campo magnético producido por una carga eléctrica la *ley de Biot-Savart* se expresa como:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.57)$$

Donde \vec{v} es la velocidad con que se desplaza la partícula.

Ejemplo

Encontrar el campo magnético a una distancia r de un alambre recto, que lleva una corriente eléctrica estacionaria i .

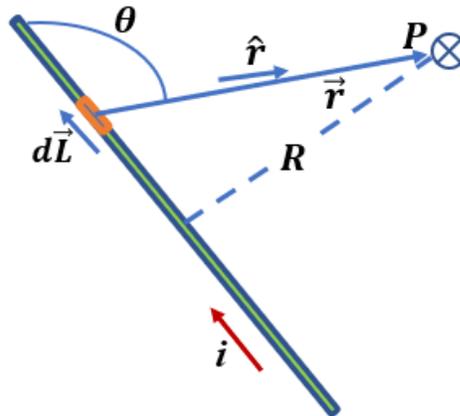


Figura 4.19: Alambre recto que conlleva una corriente estacionaria i y que produce un campo magnético \vec{B} . Ejemplo 4.5.1

Solución. La ley de Biot - Savart establece que el elemento de campo magnético $d\vec{B}$, producido por un elemento de corriente $id\vec{L}$, que circula por el alambre, está dado por (Figura 4.19).

Por tanto:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{L} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.58)$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idL \sin \theta}{r^2} \quad (4.59)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL \sin \theta}{r^2} \quad (4.60)$$

Puesto que:

$$r = (L^2 + R^2)^{1/2} \quad (4.61)$$

Entonces:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \sin \theta dL}{L^2 + R^2} \quad (4.62)$$

Realizando la sustitución:

$$L = R \cot \theta \quad (4.63)$$

$$dL = -R \csc^2 \theta d\theta \quad (4.64)$$

Se obtiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \sin \theta dL}{L^2 + R^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \csc^2 \theta \sin \theta d\theta}{R^2 (\cot^2 \theta + 1)} \quad (4.65)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \sin \theta dL}{L^2 + R^2} = - \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\csc^2 \theta \sin \theta d\theta}{\csc^2 \theta} \quad (4.66)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \sin \theta dL}{L^2 + R^2} = - \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \theta d\theta \quad (4.67)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \sin \theta dL}{L^2 + R^2} = - \frac{1}{R} (-\cos \theta) \quad (4.68)$$

Regresando a la variable original, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL \sin \theta}{r^2} = \frac{1}{R} \left[\frac{L}{(L^2 + R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (4.69)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{L}{(L^2 + R^2)^{1/2}} \right) = 2 \quad (4.70)$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \sin \theta dL}{L^2 + R^2} = \frac{2}{R} \quad (4.71)$$

Luego:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left(\frac{2}{R} \right) \quad (4.72)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad (4.73)$$

Aplicando la ley de la mano derecha al producto cruz en la ley de Biot-Savar, se tiene que el campo magnético, producido en el punto P por la corriente estacionaria i que circula por el conductor rectilíneo, entra al plano de la página.

También es bueno notar que, el resultado obtenido para calcular el campo magnético producido por un conductor rectilíneo que conlleva una corriente estacionaria i por medio de la ley de *Biot - Savart*, coincide con el obtenido por la ley de Ampere (ejemplo 4.4.1), lo que nos indica que las dos leyes son equivalentes, al igual que sucede con la ley de Coulomb y la ley de Gauss para la electrostática.

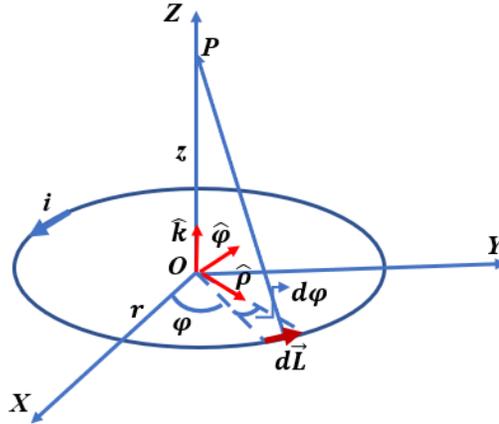
Ejemplo

Figura 4.20: Espira circular por la que circula una corriente estacionaria i y que produce un campo magnético \vec{B} en el punto P . Ejemplo 4.5.2

Determine el campo magnético, en un punto sobre el eje, de una espira circular de radio R por la que circula una corriente continua i .

Solución. La ley de Biot-Savart es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i d\vec{L} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (4.74)$$

Aprovechando la simetría cilíndrica del problema, la ley de Biot-Savart se puede reescribir como (**Figura 4.20**):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i (Rd\varphi\hat{\varphi}) \times (z\hat{k} - R\hat{\rho})}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (4.75)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i Rzd\varphi\hat{\rho} + R^2d\varphi\hat{k}}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (4.76)$$

De tal manera que:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Rz d\varphi \hat{\rho} + R^2 d\varphi \hat{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (4.77)$$

Resolviendo las integrales correspondientes a las direcciones $\hat{\rho}$ y \hat{k} , se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{Rz d\varphi \hat{\rho}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} \frac{Rz d\varphi (\hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi)}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (4.78)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{Rz d\varphi \hat{\rho}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left[\int_0^{2\pi} \cos \varphi \hat{i} + \int_0^{2\pi} \sin \varphi \hat{j} \right] \quad (4.79)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{Rz d\varphi \hat{\rho}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = 0 \hat{\rho} \quad (4.80)$$

Lo que significa que el campo magnético \vec{B} producido por la espira en un punto sobre su eje no tiene componente radial, $\vec{\rho}$.

Lo anterior se puede intuir si se tiene en cuenta que cada elemento de corriente $i d\vec{L}$, tiene su correspondiente elemento simétrico.

Para la componente \hat{k} del campo magnético \vec{B} producido por la espira, se tiene:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\varphi \hat{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (4.81)$$

Resolviendo la integral, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\varphi \hat{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} [\varphi]_0^{2\pi} \hat{k} \quad (4.82)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\varphi \hat{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{2\pi R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (4.83)$$

Por lo que:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left(\frac{2\pi R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) \hat{k} \quad (4.84)$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (4.85)$$

Sobre el eje de la espira $z = 0$, por tanto:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (4.86)$$

La aplicación de la ley de la mano derecha nos da una idea de por qué el campo magnético \vec{B} producido por la espira, sobre los puntos sobre su eje, está dirigido en la dirección \mathbf{Z} .

Obviamente, para puntos fuera del eje de la espira la simetría se daña, y el campo magnético \vec{B} tendrá una componente horizontal.

Ejemplo

Encontrar el campo magnético, en un punto que se encuentra sobre el eje de las bobinas de **Helmholtz**.



Figura 4.21: Bobinas de Helmholtz

Solución. Las bobinas de Helmholtz consisten en un par de bobinas circulares, de igual número de espiras, alineadas sobre un eje común, que llevan corrientes estacionarias iguales fluyendo en el mismo sentido. (Figura 4.21). Las bobinas de Helmholtz, nombradas así en honor al médico y físico alemán *Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz* (1821 - 1894), se utilizan para producir campos magnéticos uniformes que pueden utilizarse para anular campos magnéticos externos, tal como la componente horizontal del campo magnético terrestre.

Mediante la primera y segunda derivada del campo magnético se puede mostrar que el campo uniforme producido por las bobinas, se encuentra en el centro de separación de las dos bobinas y que la mejor disposición de ellas es una separación igual al radio de las bobinas.

En el ejemplo 4.5.2, se mostró que el campo magnético \vec{B}_z , producido por una espira de corriente está dado por:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (4.87)$$

Aplicando este resultado a la configuración de la **figura 4.22**, se tiene:

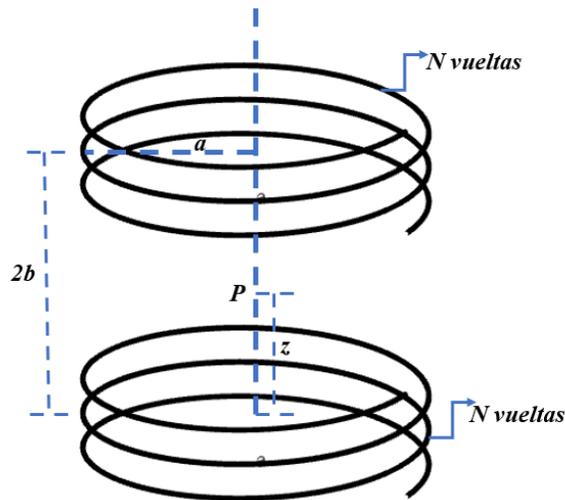


Figura 4.22: Bobinas de Helmholtz para el ejemplo 4.5.3

$$B_z = \frac{N\mu_0 i a^2}{2} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{((2b - z)^2 + a^2)^{3/2}} \right] \quad (4.88)$$

Que es el valor del campo magnético sobre los puntos entre las bobinas y que se encuentran sobre el eje central común de las bobinas.

¿En qué punto sobre el eje, el campo magnético es constante? Derivando el campo magnético con respecto a z , se tiene:

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{N\mu_0 ia^2}{2} \left[-\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{2(z-2b)}{\left((2b-z)^2 + a^2\right)^{5/2}} \right] \quad (4.89)$$

De tal forma

$$\frac{dB_z}{dz} = 0 \quad (4.90)$$

Si

$$z = b \quad (4.91)$$

La segunda derivada del campo magnético es:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B_z}{dz^2} = \frac{3N\mu_0 ia^2}{2} & \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2z^2}{(z^2 + a^2)^{7/2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\left[(2b-z)^2 + a^2\right]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2(z-2b)^2}{\left[(2b-z)^2 + a^2\right]^{7/2}} \right] \quad (4.92) \end{aligned}$$

Calculando la segunda derivada del campo magnético en $z = b$, se tiene que:

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} = \frac{3N\mu_0 ia^2}{2} \left[\frac{b^2 + a^2 - 5b^2 + b^2 + a^2 - 5b^2}{[b^2 + a^2]^{7/2}} \right] \quad (4.93)$$

Si

$$a^2 - 4b^2 = 0 \quad (4.94)$$

Se tiene que:

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} = 0 \quad (4.95)$$

Y, por tanto:

$$a = 2b \quad (4.96)$$

Lo que nos dice que la mejor disposición de las bobinas es con una separación igual al radio de las bobinas.

Con esta disposición, se tiene que el valor del campo magnético uniforme B_z , creado por las bobinas de Helmholtz es:

$$B_z = \frac{8}{5^{3/2}} \frac{N\mu_0 i}{a} \quad (4.97)$$

4.6. Fuerzas entre corrientes paralelas

Según la **figura 4.23**, dos conductores rectos infinitamente largos (o por lo menos, sus longitudes son mucho mayores que su separación), se encuentra en el plano $Y - Z$ separados una distancia d y conducen corrientes eléctricas estacionarias i_1 y i_2 . Por tanto, la fuerza sobre el conductor 2 debido al conductor 1 es:

$$\vec{F}_{12} = i_2 L \hat{k} \times \vec{B}_{12} \quad (4.98)$$

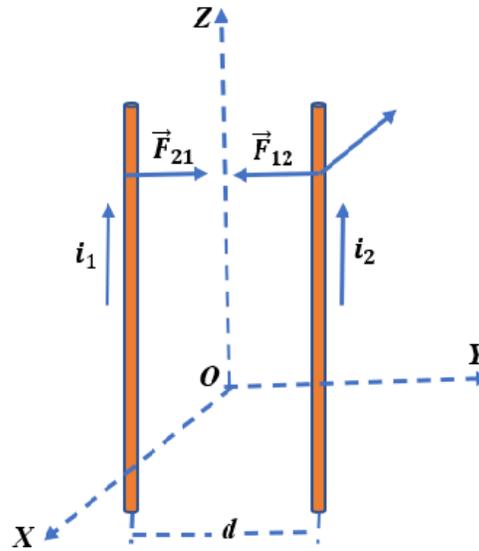


Figura 4.23: Conductores eléctricos infinitamente largos que conllevan corrientes eléctricas estacionaria.

Pero el campo magnético \vec{B}_{12} producido por la corriente i_1 es:

$$\vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{i} \quad (4.99)$$

Por tanto, la fuerza sobre el alambre 2 es:

$$\vec{F}_{12} = -i_2 L \hat{k} \times \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{i} \quad (4.100)$$

$$\vec{F}_{12} = -i_2 L \hat{k} \times \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} \hat{i} \quad (4.101)$$

Por lo que el conductor 2 siente una fuerza magnética de atracción hacia el conductor 1; similarmente se puede ver que el conductor 1 se siente atraído por el conductor 2.

Por tanto, se puede concluir que:

Corrientes estacionarias paralelas se atraen, mientras que corrientes eléctricas estacionarias antiparalelas se repelen.

La conclusión anterior es el principio para el funcionamiento de la balanza de corriente o balanza de Ampère, cuyo esquema se muestra en las figuras 4.9 y 4.10.

La balanza de Ampère o balanza de corriente se utiliza para la calibración de instrumento de medición de corriente, tal como el amperímetro, pues, de hecho, el amperio se define como la corriente que conlleva un conductor cuando en la balanza se mide una fuerza de $2 \times 10^{-7} \frac{N}{m}$.

Con la anterior definición del amperio, se define entonces, la unida de carga en el sistema **M. K. S** el Coulomb. **1C** se define como la cantidad de carga que pasa por la sección transversal de un conductor durante un segundo, cuando por él circula una corriente de un amperio.

Ejemplo

Una carga eléctrica q_1 moviéndose con velocidad \vec{v}_1 , produce una inducción magnética \vec{B} en un punto a una distancia r de ella, dada por:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec{v}_1 \times \hat{r}_1}{r^2} \quad (4.102)$$

Donde \hat{r}_1 es el vector unitario que va desde la carga q_1 hasta el punto en el cual \vec{B} es medido (*Ley de Biot-Savart*).

1. Mostrar que la fuerza magnética sobre una segunda carga q_2 , con velocidad \vec{v}_2 , está dada por el triple producto vectorial:

$$\vec{F}_{B2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \hat{r}_1) \quad (4.103)$$

2. Escriba la correspondiente fuerza magnética \vec{F}_1 que q_2 ejerce sobre q_1 . Defina su vector radial unitario. ¿Cómo son \vec{F}_1 y \vec{F}_2 ?
3. Calcular \vec{F}_{B1} y \vec{F}_{B2} en el caso en que q_1 y q_2 se mueven a lo largo de trayectorias paralelas.

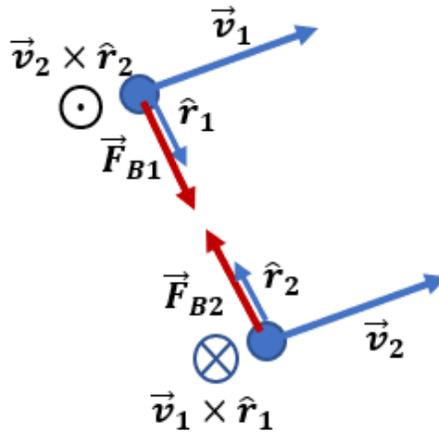


Figura 4.24: Cargas eléctricas puntuales moviéndose paralelamente. Ejemplo 4.6.1

Solución.

1. La fuerza magnética sobre una carga eléctrica que se mueve está dada por:

$$\vec{F}_{B2} = q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 \quad (4.104)$$

Pero:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec{v}_1 \times \hat{r}_1}{r^2} \quad (4.105)$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{B2} = q_2 \vec{v}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec{v}_1 \times \hat{r}_1}{r^2} \right) \quad (4.106)$$

$$\boxed{\vec{F}_{B2} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \vec{v}_2 \times \left(\frac{\vec{v}_1 \times \hat{r}_1}{r^2} \right)} \quad (4.107)$$

2. El campo magnético creado por la partícula 2 en la región donde se mueve q_1 es:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \frac{\vec{v}_2 \times \hat{r}_2}{r^2} \quad (4.108)$$

Por tanto, la fuerza magnética \vec{F}_{B1} sobre la partícula 1 es:

$$\vec{F}_{B1} = q_1 \vec{v}_1 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \frac{\vec{v}_2 \times \hat{r}_2}{r^2} \right) \quad (4.109)$$

$$\boxed{\vec{F}_{B1} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 q_1 \vec{v}_1 \times \left(\frac{\vec{v}_2 \times \hat{r}_2}{r^2} \right)} \quad (4.110)$$

El vector unitario \hat{r}_2 es el vector unitario que va desde la carga q_2 hasta el punto en el cual el campo magnético \vec{B}_2 es medido.

La ley de la mano derecha nos indica la dirección de las fuerzas \vec{F}_{B2} y \vec{F}_{B1} . Por lo tanto, las fuerzas son de igual magnitud, pero direcciones opuestas.

3. Según la **figura 4.24** el producto $\vec{v}_1 \times \hat{r}_1$ entra al plano de la página, digamos dirección \hat{k} , mientras que \vec{v}_2 está en dirección \hat{i} , por tanto:

$$\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \hat{r}_1) = v_2 \hat{j} \times (v_1 \hat{k}) \quad (4.111)$$

$$\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \hat{r}_1) = -v_2 - v_1 \hat{i} \quad (4.112)$$

Es decir que:

$$\vec{F}_{B2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v_2 v_1 \hat{i} \quad (4.113)$$

$$\vec{F}_{B2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v_2 v_1 \hat{r}_2 \quad (4.114)$$

Si las velocidades son iguales entonces, la fuerza tendrá una magnitud igual a:

$$\vec{F}_{B2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v^2 \quad (4.115)$$

Y su dirección es tal que q_2 se siente atraída por q_1 .

De igual forma, se puede mostrar que la fuerza magnética que q_2 ejerce sobre q_1 tiene igual magnitud y es tal que q_2 se siente atraída por q_1 .

Es decir que:

$$\vec{F}_{B2} = \vec{F}_{B1} \quad (4.116)$$

Ver [figura 4.24](#)

Ejemplo

Dos barras rectilíneas de 50cm longitud y separadas $1,5\text{cm}$ en una balanza de corriente, transportan corrientes de 15A de intensidad en direcciones opuestas. ¿Qué masa debe situarse en la barra superior para equilibrar la fuerza magnética de repulsión?

Solución. La fuerza magnética ejercida por la barra inferior sobre la barra superior de longitud L tiene una magnitud dada por:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} L \quad (4.117)$$

$$F = \left(2 \times 10^{-7} \text{N/A}^2\right) \frac{(15\text{A})(15\text{A})}{0,0015\text{m}} (0,5\text{m}) \quad (4.118)$$

$$F = 1,5 \times 10^{-2} \text{N} \quad (4.119)$$

Lo que significa que el peso del cuerpo que debe situarse en la barra superior para equilibrar la fuerza magnética debe ser:

$$mg = 1,5 \times 10^{-2} \text{N} \quad (4.120)$$

Es decir que:

$$m = \frac{1,5 \times 10^{-2} \text{N}}{9,8 \text{N/Kg}} \quad (4.121)$$

$$m = 1,53 \times 10^{-3} \text{Kg} \quad (4.122)$$

Puede observarse que a pesar de que las intensidades de las corrientes son altas, la fuerza magnética entre ellas es pequeña.

Ejemplo

Para medir la constante de un resorte se sujetan dos resortes idénticos entre los extremos de dos cables muy largos de longitud L separados una distancia d y por los cuales circula una corriente eléctrica de intensidad i y direcciones opuestas. Ver **figura 4.25**. El montaje es tal que no se permite circulación de corriente por los resortes. ¿Cuál es la constante del resorte?

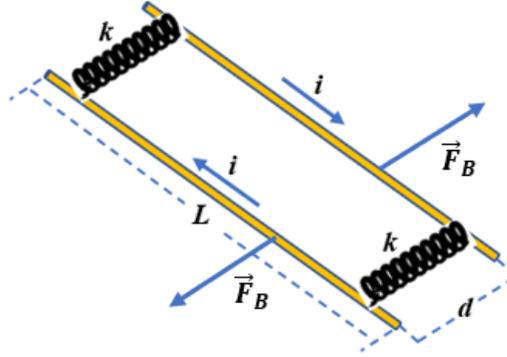


Figura 4.25: Medición de la constante de un resorte mediante corrientes eléctricas estacionarias. Ejemplo 4.6.3

Solución.

Solución. La fuerza magnética que cada corriente produce sobre la otra es:

$$\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B} \quad (4.123)$$

Donde \vec{B} es el campo magnético producido por cada conductor en la región donde se encuentra el otro conductor. Recordando que la ley de Biot-Savart (o la ley de Ampere) nos establece que dicho campo entra al plano de la página (según las condiciones mostradas en la figura 4.25), entonces cada resorte se encuentra sometido a un par de fuerzas iguales que le van a producir un estiramiento x . Por tanto:

$$2F_B = kx \quad (4.124)$$

Es decir que:

$$k = \frac{2F_B}{x} \quad (4.125)$$

$$k = \frac{2(iLB)}{x} \quad (4.126)$$

$$k = \frac{2(iL) \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \right)}{x} \quad (4.127)$$

$$k = \frac{\mu_0 L i^2}{\pi d x} \quad (4.128)$$

Revisando unidades se tiene:

$$[k]_{MKS} = \frac{\frac{Tm}{A} A^2 m}{m^2} = \frac{N}{m} \quad (4.129)$$

Ejemplo

Dos alambres largos colocados horizontalmente y separados una distancia de **1,00cm**, portan corrientes eléctricas iguales i_2 en la misma dirección. Si se coloca un tercer alambre de **10,0m** de longitud y **400gr** de masa, portando una corriente i_1 de **100A**, flotando entre los otros dos alambres ¿Cuál debe ser el valor y qué dirección debe tener la corriente i_2 para que los tres alambres formen un triángulo equilátero? Ver figura 4.26.

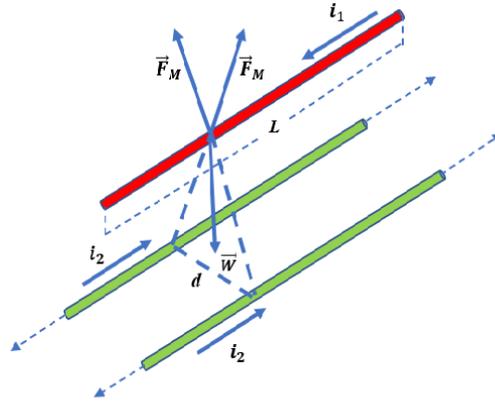


Figura 4.26: Barras rectilíneas que conducen corrientes eléctricas estacionarias y que se encuentran en equilibrio. Ejemplo 4.6.2

Solución.

La fuerza magnética ejercida por cada uno de los conductores que llevan corriente i_2 sobre el conductor que lleva la corriente i_1 está dada por:

$$\vec{F}_{21} = i_1 \vec{L} \times \vec{B}_2 \quad (4.130)$$

Es decir:

$$F_{21} = i_1 L B_2 \quad (4.131)$$

Puesto que la *ley de Biot-Savart* (o la *ley de Ampere*) da para el campo magnético \vec{B}_1 una magnitud de:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} \quad (4.132)$$

Entonces:

$$F_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 i_2 L \quad (4.133)$$

Utilizando el teorema del coseno para conocer la fuerza magnética total sobre i_1 , se tiene:

$$F_B = \sqrt{2 \left(\frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 i_2 L \right)^2 - 2 \left(\frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 i_2 L \right)^2 \cos 120^\circ} \quad (4.134)$$

$$F_B = \left(\frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 i_2 L \right) \sqrt{3} \quad (4.135)$$

Por tanto:

$$\left(\frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 i_2 L \right) \sqrt{3} = mg \quad (4.136)$$

Por lo que:

$$i_2 = \frac{mg}{\left(\frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 L \right) \sqrt{3}} \quad (4.137)$$

$$i_2 = \frac{2\pi d m g}{(\mu_0 i_1 L) \sqrt{3}} \quad (4.138)$$

$$i_2 = \frac{(10^{-2m}) (4 \times 10^{-1} Kg) (9,8m/s^2)}{(2 \times 10^{-7} Tm/A) (10^2 A) \sqrt{3}} \quad (4.139)$$

$$i_2 = 11,3 \times 10A \quad (4.140)$$

$$i_2 = 113A \quad (4.141)$$

Revisando Unidades:

$$i_{2_{MKS}} = \frac{\text{Kg} \frac{\text{m}^2}{\text{sg}^2}}{\frac{\text{Tm}}{\text{A}} \text{Am}} \quad (4.142)$$

$$i_{2_{MKS}} = \frac{\text{Nm}}{\text{Tm}^2} \quad (4.143)$$

$$i_{2_{MKS}} = \frac{\text{N}}{\text{Tm}} = \text{A} \quad (4.144)$$

Es bueno tener en cuenta que a pesar de lo llamativo del montaje y del fenómeno de levitación, **es mejor no intentar hacerlo en casa para así evitar sustos y accidentes. Pues obsérvese la magnitud de las corrientes involucradas, las cuales son corrientes altas.**

Solo por tener un punto de referencia. Una batería de automóvil de 12 voltios puede hacer pasar por su cuerpo una corriente de 10 miliamperios, la cual, aunque no es suficiente para electrocutarte si es una experiencia no muy agradable. Bueno, ¡por lo menos para mí!.

De otra parte, si hay humedad pues la corriente va a aumentar. Recuerde que la maquinita aquella con que retan a las personas, suelen retar con mayor frecuencia a los "borrachitos" pues su resistencia a disminuido debido al líquido consumido.

¡De modo que mejor no lo intentes por lo menos en casa o un laboratorio que no cuente con la instrumentación debida!

Taller

- Un campo eléctrico de $1,5 \text{ kV/m}$ y un campo magnético de $0,44 \text{ T}$ actúan sobre un electrón en movimiento sin producir ninguna fuerza neta.
 - Calcule la velocidad mínima \vec{v} del electrón.
 - Trace los vectores \vec{E} , \vec{B} y \vec{v}
- Un físico está diseñando un ciclotrón para acelerar protones a $0,100c$. El imán empleado producirá un campo magnético de $1,40 \text{ T}$. Calcule:
 - El radio del ciclotrón.
 - La frecuencia correspondiente del oscilador. Las consideraciones relativistas no son significativas.

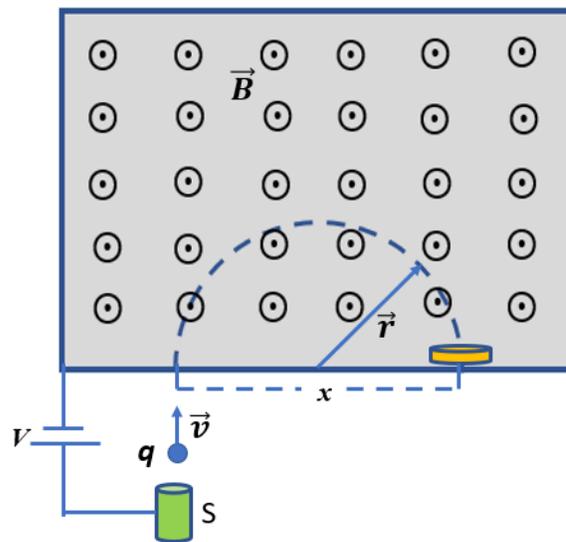


Figura 4.27: Espectrómetro de masa. Ejercicio 3

3. Un dispositivo utilizado para medir la masa de los iones se muestra en la **Figura 4.27**. Un ion de masa m y carga q se produce esencialmente en reposo en la fuente S , una cámara en la que se está produciendo la descarga de un gas. La diferencia de potencial V acelera el ion y se permite que entre en un campo magnético \vec{B} . Dentro del campo el ion se mueve en un semicírculo, chocando con una placa fotográfica a la distancia x de la rendija de entrada. Demuestre que la masa m del ion está dada por

$$m = \frac{B^2 q}{8V} x^2 \quad (4.145)$$

4. En un experimento diseñado para medir la magnitud de un campo magnético uniforme, los electrones se aceleran desde el reposo a causa de una diferencia de potencial de **350V** y después entran a un campo magnético uniforme que es perpendicular al vector velocidad de los electrones. Los electrones viajan a lo largo de una trayectoria curva debida a la fuerza magnética que se ejerce sobre ellos, y se observa que el radio de la trayectoria es de **7,52cm**.
- a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?
- b) ¿Cuánto vale la velocidad angular de los electrones?
5. Un reloj circular de pared, estacionario, tiene una carátula con radio de **15cm**. Alrededor de su perímetro están devanadas seis vueltas de alambre; por el alambre pasa una corriente de **2,0A** en la dirección de las manecillas del reloj. El reloj está situado donde existe un campo magnético externo, uniforme y constante de **70mT** (pero aún así el reloj marca el tiempo perfectamente). Exactamente a la **1 : 00p.m.**, el horario apunta en la dirección del campo magnético externo.
- a) ¿Después de cuantos minutos apuntará el minutero en la dirección del momento de torsión sobre el devanado debido al campomagnético?
- b) ¿Cuál es la magnitud de este momento de torsión?
6. Por un alambre de longitud L pasa una corriente i . Demuestre que si el alambre tiene la forma de una bobina circular, el momento de

torsión máximo en un campo magnético dado se desarrolla cuando la bobina tiene solo una vuelta y el momento de torsión máximo tiene magnitud igual a

$$\tau = \frac{1}{4\pi} L^2 i B \quad (4.146)$$

7. Un alambre doblado en un semicírculo de radio R forma un circuito cerrado y transporta una corriente i . El alambre yace en el plano XY y un campo magnético uniforme se dirige a lo largo del eje Y positivo. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre la porción recta y sobre la porción curva del alambre. Ver figura 4.28.

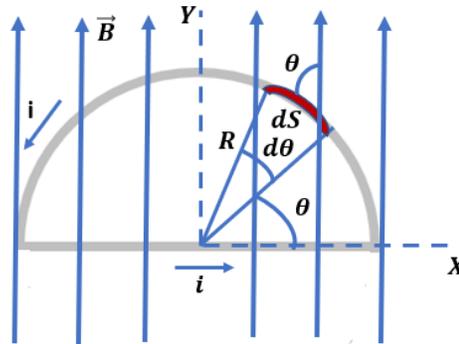


Figura 4.28: Conductor semicircular soportando una corriente eléctrica estacionaria. Ejercicio 7

8. Considere la espira de alambre de la figura 4.29. Imagina que gira sobre un eje a lo largo del lado cuatro que es paralelo al eje Z y se amarra de modo que el lado 4 permanece fijo y el resto de la espira cuelga verticalmente, pero puede dar vueltas alrededor del lado 4. La masa de la espira es de $50,0\text{g}$, y los lados tienen longitudes $a = 0,200\text{m}$ y $b = 0,100\text{m}$. La espira conduce una corriente de $3,50\text{A}$ y se sumerge en un campo magnético uniforme vertical de $0,0100\text{T}$ de magnitud en la dirección positiva. ¿Qué ángulo forma el plano de la espira con la vertical?

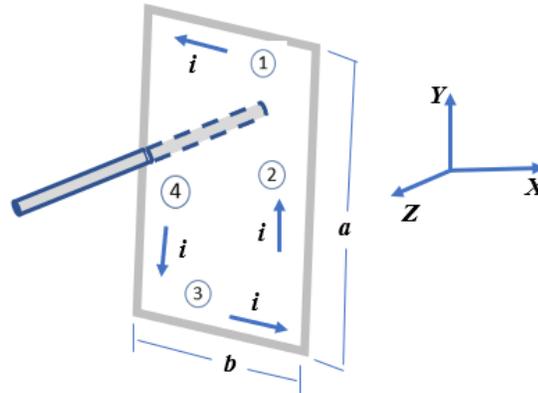


Figura 4.29: Espira rectangular de alambre soportando una corriente eléctrica estacionaria i . Ejercicio 8

9. El cañón de electrones de $25kV$ de un tubo de televisión proyecta un haz de electrones de $0,22mm$ de diámetro hacia la pantalla, llegando $5,6 \times 10^{14}$ electrones cada segundo. Calcular el campo magnético producido por el haz en un punto a $1,5mm$ del eje del haz.
10. Una espira cuadrada de alambre, de lado a , conduce una corriente i .
- a) Demuestre que el la magnitud del campo magnético B para un punto en el eje de la espira y a una distancia z de su centro, está dado por

$$B(z) = \frac{4\mu_0 i a^2}{\pi (4z^2 + a^2) (4z^2 + 2a^2)^{1/2}} \quad (4.147)$$

- b) ¿A qué valor se reduce dicho campo en el centro de la espira?

11. Por un tramo recto de alambre de longitud L , fluye una corriente i .
- a) Demuestre que el campo magnético asociado con este segmento en P , a una distancia perpendicular D de un extremo del alambre, está dado por:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi D} \frac{L}{(L^2 + D^2)^{1/2}} \quad (4.148)$$

- b) Demuestre que el campo magnético en el punto Q , a lo largo de la línea del alambre, es cero. Ver figura 4.30.

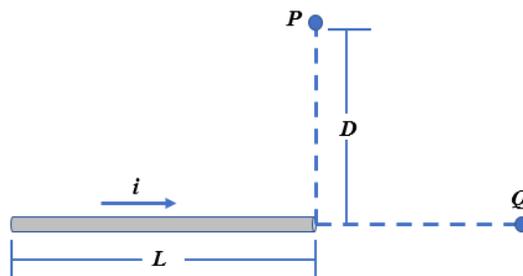


Figura 4.30: Alambre recto de longitud L que conduce una corriente estacionaria i . Ejercicio 11

12. Calcule el campo magnético en el punto O para el segmento de alambre portador de corriente de la figura 4.31. El alambre consiste en dos porciones rectas y un arco circular de radio a , que sustenta un ángulo θ .

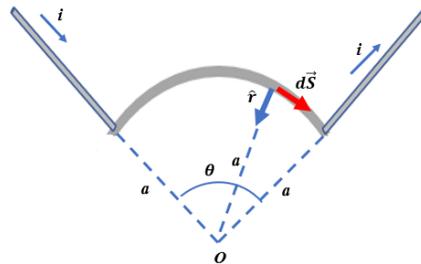


Figura 4.31: Semi arco y dos conductores rectos para calcular el campo magnético \vec{B} en el punto O . Ejercicio 12

13. La **figura 4.32** muestra la sección transversal de un conductor cilíndrico hueco de radios a y b , que conduce una corriente i uniformemente distribuída. Usando el anillo amperiano circular mostrado, muestre que el campo magnético producido por la corriente para el intervalo $b < r < a$ está dado por:

$$B(z) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r} \quad (4.149)$$

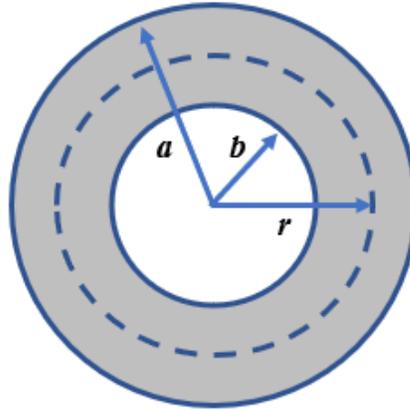


Figura 4.32: Conductor cilíndrico hueco. Ejercicio 13

14. Cuatro alambres largos de cobre son paralelos entre sí y están dispuestos en un cuadrado como muestra la **figura 4.33**. Transportan corrientes iguales i hacia afuera de la página. Calcule la fuerza por metro en cualquier alambre; dé magnitud y dirección. Suponga que $i = 18,7A$ y $a = 24,5cm$. (Esto se conoce como el efecto de estricción en el caso del movimiento paralelo de las partículas cargadas en un plasma)

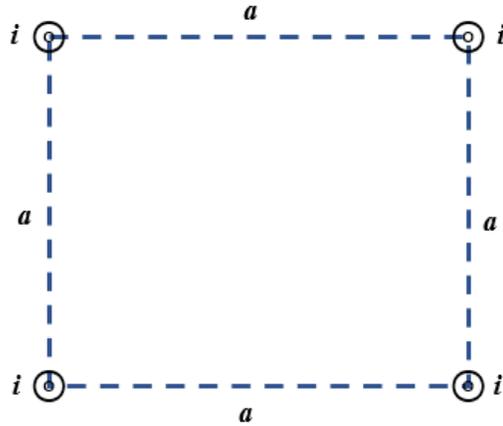


Figura 4.33: Configuración de cuatro alambres de cobre conductores. Ejercicio 14

15. La **figura 4.34**, muestra un esquema idealizado de un “cañón electromagnético sobre rieles”, diseñado para disparar proyectiles con velocidades hasta de 10km/sg . El proyectil P descansa sobre dos rieles paralelos (y en contacto con ellos), a lo largo de los cuales puede deslizarse. Un generador G suministra una corriente que fluye por un riel, cruza el proyectil y regresa al otro riel.

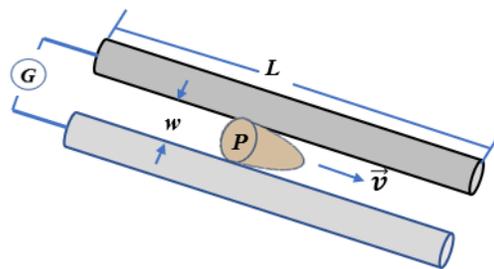


Figura 4.34: Cañón electromagnético. Ejercicio 15

- a) Sea w la distancia entre los rieles, r el radio de los rieles (supuestos como circulares), e i la corriente. Demuestre que la

fuerza sobre el proyectil es hacia la derecha y está dada, aproximadamente, por:

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 i^2}{\pi} \right) \ln \left(\frac{w+r}{r} \right) \quad (4.150)$$

- b) Si el proyectil arranca del extremo izquierdo del riel en reposo, determine la velocidad v a la cual es expulsado hacia la derecha. Suponga que $i = 450 \text{ kA}$, $w = 12 \text{ mm}$, $r = 6,7 \text{ cm}$, $L = 4,0 \text{ m}$ y que la masa del proyectil es de $m = 10 \text{ gr}$.
16. Cada uno de los ocho conductores indicados en la **figura 4.35**, conduce $2,0 \text{ A}$ de corriente hacia adentro o hacia afuera de la página. Están indicadas dos trayectorias para la integral de línea $\oint \vec{B} \circ d\vec{S}$. ¿Cuál es el valor de la integral para cada una de las trayectorias?

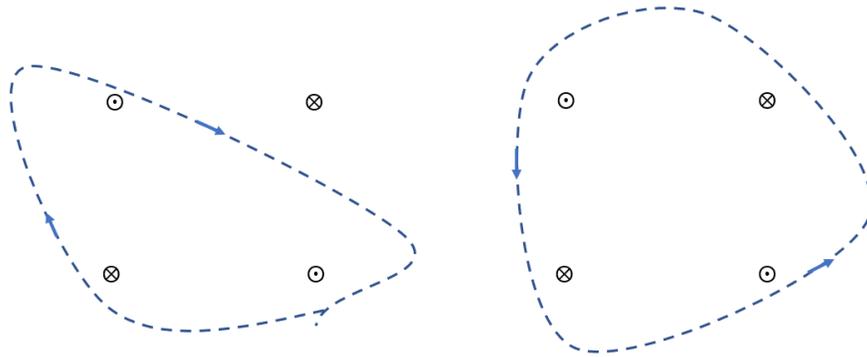


Figura 4.35: Dos configuraciones de cuatro conductores para el cálculo del flujo magnético para cada una de las trayectorias mostradas. Ejercicio 16

17. Un solenoide de $1,33 \text{ m}$ de largo y $2,60 \text{ cm}$ de diámetro, conduce una corriente de $17,8 \text{ A}$. El campo magnético en el interior del solenoide es de $22,4 \text{ mT}$. Halle la longitud del alambre que forma el solenoide.
18. Un solenoide largo tiene 100 vueltas por centímetro. Un electrón se mueve dentro del solenoide en un círculo de $2,30 \text{ cm}$ de radio,

perpendicular al solenoide. La velocidad del electrón es de $0,0460c$. Halle la corriente en el solenoide.

19. La densidad de corriente a lo largo de un alambre cilíndrico, largo, sólido, de radio a está en la dirección del eje Y , varía linealmente con la distancia radial r relativo al eje, de acuerdo con:

$$j = \frac{j_0 r}{a} \quad (4.151)$$

Determine el campo magnético en el interior del alambre. Exprese la respuesta en función de la corriente total i que fluye por el alambre.

Capítulo 5

LA ECUACIÓN DE POISSON LA ECUACIÓN DE LAPLACE EL MÉTODO DE IMÁGENES

5.1. Las ecuaciones de Laplace y Poisson

Las *leyes de Coulomb y de Gauss*, han sido utilizadas para hallar campos electrostáticos y potenciales eléctricos cuando la distribución de carga eléctrica se conoce: carga puntual, un sistema de n carga puntuales, distribuciones lineales, superficiales o volumétricas de carga. Sin embargo, en muchas situaciones donde pueden intervenir uno o varios conductores y donde la distribución de carga no se conoce, se hace necesario encontrar primero el campo eléctrico o el potencial y utilizar las llamadas condiciones de frontera para establecer la distribución de carga.

Las *ecuaciones de Poisson y Laplace*, las cuales se deben a los matemáticos, y físicos franceses *Siméon-Denis Poisson* (1781 - 1840) y *Pierre-Simon Laplace* (1749 - 1827), son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes del tiempo, pues vienen expresadas en término del operador nabla, el cual es un operador meramente espacial. Debido a ello en dichos problemas no existen condiciones iniciales, pero si condicio-

nes de frontera, puesto que se analiza cómo es el campo eléctrico en la frontera entre dos medios. En los casos tratados aquí los dos medios lo constituyen el conductor en cuestión y el espacio libre o vacío. Si en el problema se especifica que la distribución de carga en el o los conductores involucrados es diferente de cero, se tiene la ecuación de Poisson; en caso contrario se obtiene la ecuación de Laplace.

La forma diferencial de la *ley de Gauss* establece que:

$$\nabla \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.1)$$

Pero como el campo electrostático es conservativo, entonces tiene una función escalar potencial tal que:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (5.2)$$

Combinado las dos ecuaciones se tiene:

$$\nabla \circ (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.3)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.4)$$

La cual, es la *ecuación de Poisson*, donde ∇^2 es el *operador laplaciano*, el cual, escrito en los sistemas de coordenadas rectangular, cilíndrico y esférico, nos da la ecuación de Poisson en estos tres sistemas coordenados. Ver la primera parte del curso de electrodinámica: *Sistemas Coordenados Curvilíneos Ortogonales*.

Sistema coordenado rectangular

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.5)$$

Sistema coordenado cilíndrico

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.6)$$

Sistema coordenado esférico

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.7)$$

Si $\rho = 0$ se obtiene la ecuación de *Laplace*.

Sistema coordenado rectangular

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (5.8)$$

Sistema coordenado cilíndrico

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (5.9)$$

Sistema coordenado esférico

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.10)$$

Aquí se considerarán sistemas unidimensionales, es decir, sistemas donde la distribución de densidad de carga o el potencial dependan de una sola variable, pues la solución de las ecuaciones diferenciales de dos o tres dimensiones no tiene un método de solución sencillo: *El método de separación de variables*.

Propiedades de las ecuaciones de Poisson o de Laplace

Las ecuaciones de Poisson y de Laplace cumplen dos propiedades importantes, las cuales simplemente se enuncian aquí en forma de teorema:

Teorema 1. Si $V_1, V_2 \dots V_n$ son todas soluciones de la ecuación de Poisson o de Laplace, entonces:

$$V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_n V_n \quad (5.11)$$

También es solución de la ecuación de Laplace. $C_1, C_2 \dots C_n$ son constantes.

Teorema 2. Teorema de unicidad. Dos soluciones de la ecuación de Poisson o de Laplace que satisfacen las mismas condiciones de frontera difieren a lo sumo en una constante aditiva.

Condiciones de frontera conductor - vacío

Puesto que, en un conductor que se coloca dentro de un campo electrostático no puede existir campo eléctrico en su interior (recuérdese la jaula de Faraday) entonces en el conductor se deben cumplir dos condiciones:

1. La densidad volumétrica de carga al interior del conductor debe ser cero. Lo que implica que toda la carga eléctrica se encuentra distribuida sobre la superficie del conductor.

$$\rho_v = 0 \quad (5.12)$$

2. El campo eléctrico dentro del conductor debe ser cero.

$$\vec{E}_i = 0 \quad (5.13)$$

Lo primero implica que la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie del conductor debe ser cero.

$$E_t = 0 \quad (5.14)$$

Y por medio de la ley de Gauss se puede mostrar que:

$$E_n = \epsilon_0 \rho_S \quad (5.15)$$

$$\rho_S = \epsilon_0 E_S \quad (5.16)$$

Ejemplo

Dos placas conductoras paralelas, las cuales están separadas por una distancia d , se mantienen a potenciales 0 y V_0 , Ver figura 5.1. La región

entre las placas está llena con una distribución continua de carga que tiene una densidad volumétrica de carga igual a:

$$\rho_v = -\rho_0 \frac{y}{d} \quad (5.17)$$

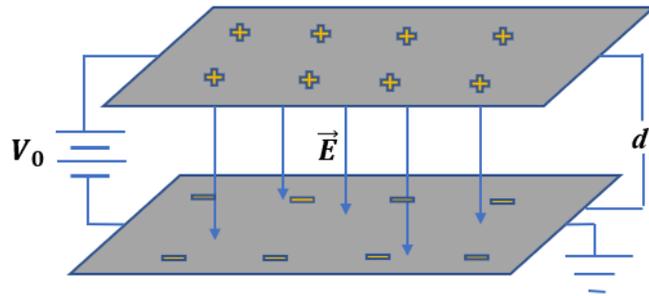


Figura 5.1: Placas conductoras paralelas a potenciales 0 y V_0 . Ejemplo 5.1.1

Despreciando los efectos de borde, determine

1. El potencial en cualquier punto entre las placas del condensador.
2. La densidad superficial de carga en las placas del condensador.

Solución.

1. La ecuación de Laplace establece que

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.18)$$

Es decir:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.19)$$

Como el problema es unidimensional y en la dirección Y . entonces:

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.20)$$

Reemplazando la densidad de carga, se obtiene:

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \rho \frac{y}{\epsilon_0 d} \quad (5.21)$$

Integrando por primera vez, se tiene:

$$dV = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0 d} y^2 dy + C \quad (5.22)$$

Integrando nuevamente, se tiene:

$$V = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + Cy + C_1 \quad (5.23)$$

Las condiciones de fronteras nos permiten calcular las constantes de integración C y C_1 .

Para la placa inferior se tiene que: $V = 0$ y $y = 0$, por tanto:

$$V = C_1 \quad (5.24)$$

$$C_1 = 0 \quad (5.25)$$

Para la placa superior se tiene que $V = V_0$ y $y = d$, por tanto:

$$V_0 = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} d^2 + Cd \quad (5.26)$$

Es decir que:

$$C = \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}d \quad (5.27)$$

Por lo que el potencial en cualquier punto entre las placas viene dado por:

$$V = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} d \right) y \quad (5.28)$$

Si a dicho potencial, se le aplica el gradiente se obtiene el campo eléctrico en cualquier punto entre las placas del condensador.

$$\vec{E}_y = -(\nabla V)_y \quad (5.29)$$

$$\vec{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} \quad (5.30)$$

$$\vec{E}_y = -\frac{\partial \left(\frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} d \right) y \right)}{\partial y} \hat{j} \quad (5.31)$$

$$\vec{E}_y = \left[\left(\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 d} y^2 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} d \right) \right) \right] \hat{j} \quad (5.32)$$

Las condiciones de frontera para una superficie de separación conductor-espacio libre, establecen que:

$$\vec{E}_t = 0 \quad (5.33)$$

$$\vec{E}_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (5.34)$$

Siendo \vec{E}_t el campo eléctrico tangencial y \vec{E}_n el campo eléctrico normal, dentro del conductor en la frontera.

La densidad de carga superficial en la placa inferior, donde $y = 0$ y $\hat{n} = \hat{j}$, está dada por:

$$\rho_{si} = \epsilon_0 E_{yi} \quad (5.35)$$

Por tanto:

$$\rho_{ss} = -\epsilon_0 \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0}{6} d \quad (5.36)$$

La densidad de carga superficial en la placa superior, donde $y = d$ y $\hat{n} = -\hat{j}$, está dada por:

$$\rho_{ss} = -\epsilon_0 E_{ys} \quad (5.37)$$

$$\rho_{ss} = -\epsilon_0 \left[\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 d} d^2 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} d \right) \right] \quad (5.38)$$

$$\rho_{ss} = -\frac{\rho_0}{2} d - \frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0}{6} d \quad (5.39)$$

$$\rho_{ss} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0}{3} d \quad (5.40)$$

Como se ve, las dos placas contienen distribuciones diferentes de carga eléctrica, por lo que el dispositivo no constituye un condensador de placas paralelas.

Ejemplo

Dos planos conductores aislados infinitos que se mantienen a potenciales 0 y V_0 constituyen una configuración en forma de cuña, ver **figura 5.2**. Determinar el potencial eléctrico en las regiones.

1. $0 < \varphi < \alpha$
2. $\alpha < \varphi < 2\pi$

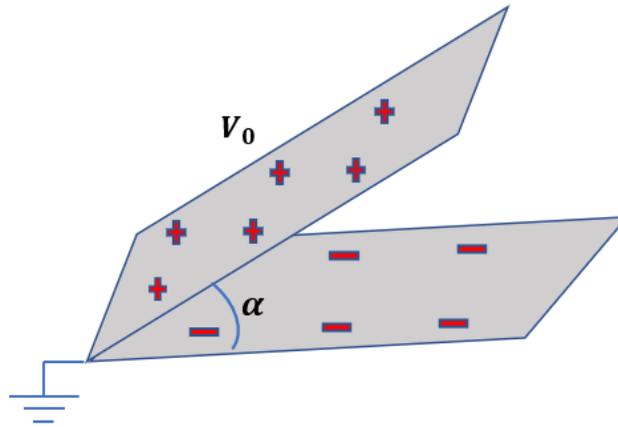


Figura 5.2: Planos conductores aislados con potenciales 0 y V_0 . Ejemplo 5.1.2

Solución.

1. Puesto que no existe una distribución de carga entre las placas, es decir, $\rho_v = 0$, entonces la solución se obtiene mediante la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (5.41)$$

Por la simetría del problema conviene utilizar coordenadas cilíndricas, de tal forma que la ecuación de Laplace queda como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (5.42)$$

Como V varía solamente con φ , entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad y \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (5.43)$$

Por lo que la ecuación de Laplace queda como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.44)$$

Solucionando la ecuación para $r \neq 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.45)$$

Por lo que, integrando dos veces, se tiene:

$$V(\varphi) = C_1 \varphi + C_2 \quad (5.46)$$

Aplicando las condiciones de frontera, se tiene:

En la placa inferior, es decir para $\varphi = 0$, $V = 0$, y, por tanto $C_2 = 0$.

En la placa superior, es decir para $\varphi = \alpha$, $V = V_0$, y, por tanto:

$$V_0 = C_1 \alpha \quad (5.47)$$

$$C_1 = \frac{V_0}{\alpha} \quad (5.48)$$

Con lo que el potencial eléctrico para la región $0 < \varphi < \alpha$, es:

$$V(\varphi) = \frac{V_0}{\alpha} \varphi \quad (5.49)$$

2. Aplicando las condiciones de frontera para la región $\alpha < \varphi < 2\pi$, se tiene:

$$V(\alpha) = C_1 \alpha + C_2 \quad (5.50)$$

$$V(2\pi) = C_1 2\pi + C_2 \quad (5.51)$$

Por tanto:

$$C_2 = V(\alpha) - C_1 \alpha \quad (5.52)$$

$$V(2\pi) = C_1 2\pi + V(\alpha) - C_1 \alpha \quad (5.53)$$

$$V(2\pi) = C_1(2\pi - \alpha) + V(\alpha) \quad (5.54)$$

$$C_1 = \frac{V(2\pi) - V(\alpha)}{2\pi - \alpha} \quad (5.55)$$

$$C_1 = \frac{-V(0)}{2\pi - \alpha} \quad (5.56)$$

Puesto que $V(\alpha)$ y $V(2\pi) = 0$.

Para C_2 se tiene que:

$$C_2 = \frac{2\pi V(0)}{2\pi - \alpha} \quad (5.57)$$

Por lo que la ecuación

$$V(\varphi) = C_1 \varphi + C_2 \quad (5.58)$$

Queda, para la región $\alpha < \varphi < 2\pi$, como:

$$V(\varphi) = \frac{V(0)}{2\pi - \varphi} \quad (5.59)$$

5.2. El método de imágenes

El método de las imágenes para la resolución de problemas electrostáticos fue propuesto, en 1848, por el Físico y Matemático británico *William Thomson*, (1824 - 1907) conocido también como *Lord Kelvin*, título nobiliario que le fue otorgado en reconocimiento a sus estudios e invenciones. Aunque en los campos de la termodinámica y la electricidad

sus aportaciones fueron numerosas y notables, es especialmente recordado como el creador de la escala termométrica que lleva su nombre (Escala de Kelvin).

El problema clásico que ilustra el método de las imágenes, consiste en considerar una carga puntual q a una distancia d por encima de un plano conductor infinito conectado a tierra. Se pide entonces encontrar el potencial eléctrico en un punto por encima del plano. **Ver ejemplo 5.2.1.**

Obviamente el potencial en dicho punto no es solamente el producido por la carga puntual, pues, de hecho, dicha carga induce una densidad de carga negativa en el plano la cual también va a contribuir a dicho potencial. El problema radica en que no se conoce dicha densidad de carga inducida.

El método de las imágenes propone, entonces, conseguir una configuración equivalente a la original; es decir, una configuración que cumpla con las mismas condiciones de frontera que la original.

Para el caso en cuestión, se reemplaza el plano conductor por una nueva carga puntual que mantenga las condiciones de frontera del problema:

1. El potencial sobre el plano debe ser cero, pues este se encuentra conectado a tierra.

$$V = 0 \quad \text{para} \quad z = 0 \quad (5.60)$$

2. El potencial debe tender a cero para puntos lejanos de la carga.

$$V \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq d \quad (5.61)$$

3. Solamente una carga puntual por encima del plano conductor.

La validez de la solución conseguida de esta forma, está garantizada por el teorema de unicidad, pues este teorema garantiza que toda solución que cumpla con las condiciones de frontera es válida y además la única, independientemente del método por el cual fue conseguida.

Es importante que las cargas imagen estén colocadas en una región del espacio diferente de aquella en la que calculamos el potencial o campo electrostático, puesto que, si estuvieran allí, cambiaríamos la forma de la ecuación de Poisson.

Ejemplo

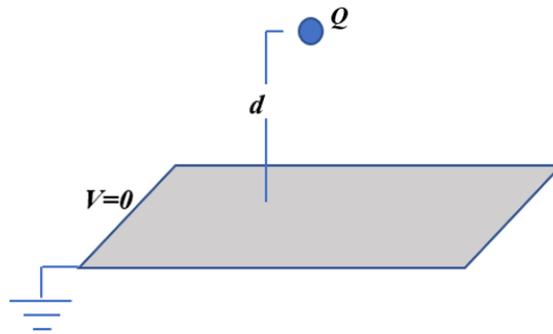


Figura 5.3: Carga eléctrica Q y plano conductor conectado a tierra. Ejemplo 5.2.1

Una carga eléctrica positiva Q se encuentra situada a una distancia d sobre un plano conductor conectado a tierra (Potencial eléctrico cero), ver **figura 5.3**. Calcular el potencial eléctrico en un punto arbitrario, $P(x, y, z)$, de la región $y > 0$, y la distribución de carga inducida sobre la superficie del plano conductor.

Solución. Para aplicar el método de las imágenes, se elimina el plano conductor y se sustituye por una carga eléctrica puntual imagen $-Q$ en $y = -d$, ver **figura 5.4**, lo cual no cambia la configuración del problema ni las condiciones de frontera.

En 3.6 se dijo que el potencial producido por una distribución de n cargas puntuales, está dado por:

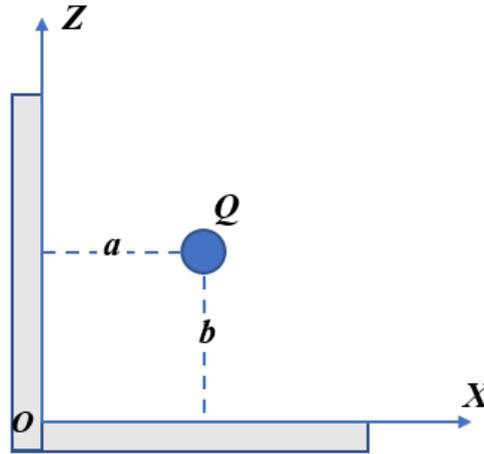


Figura 5.4: Planos semi infinitos en ángulo de 90° y una carga puntual Q .
Ejemplo 5.2.2

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (5.62)$$

Donde, \vec{r} es el vector que va desde el origen al punto donde se está calculando el potencial y \vec{r}_0^n es el vector que va desde el origen hasta la carga n .

Por lo tanto, el potencial en el punto $P(x, y, z)$, para $y \geq 0$, es:

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|} \right) \quad (5.63)$$

Donde, según la **figura 5.5** se tiene:

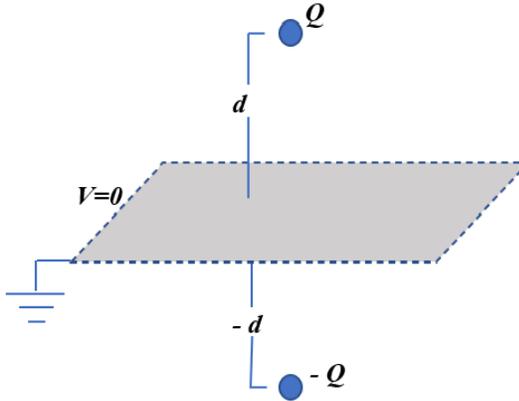


Figura 5.5: Configuración equivalente al sistema mostrado en la figura 5.3. Ejemplo 5.2.1

$$\vec{r} - \vec{r}_0^1 = (x, y, z) - (0, d, 0) \quad (5.64)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^1 = (x, y - d, z) \quad (5.65)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^1| = \left| x^2 + (y - d)^2 + z^2 \right|^{1/2} \quad (5.66)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^2 = (x, y, z) - (0, -d, 0) \quad (5.67)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^2 = (x, y + d, z) \quad (5.68)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^2| = \left| x^2 + (y + d)^2 + z^2 \right|^{1/2} \quad (5.69)$$

Por lo que:

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} \right) \quad (5.70)$$

Mediante el operador gradiente se obtiene el campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (5.71)$$

$$\vec{E} = -\nabla \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} \right) \quad (5.72)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x\hat{i} + (y-d)\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{x\hat{i} + (y+d)\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} \right) \quad (5.73)$$

Las condiciones de frontera establecen que la densidad superficial de carga en el plano es:

$$\rho_s = \epsilon_0 E_y \Big|_{y=0} \quad (5.74)$$

La magnitud de la componente Y del campo eléctrico, E_y , calculada en $y = 0$ es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d}{(x^2 + d^2 + z^2)^{3/2}} \right) \quad (5.75)$$

Por tanto, la densidad superficial de carga sobre el plano y por encima de él ($y \geq 0$), es:

$$\rho_s = \frac{Qd}{2\pi(x^2 + d^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.76)$$

Para $y \leq 0$:

$$V(x, y, z) = 0 \quad (5.77)$$

Puesto que, como se dijo antes, el problema en su nueva configuración debe mantener las condiciones de frontera dadas.

Ejemplo

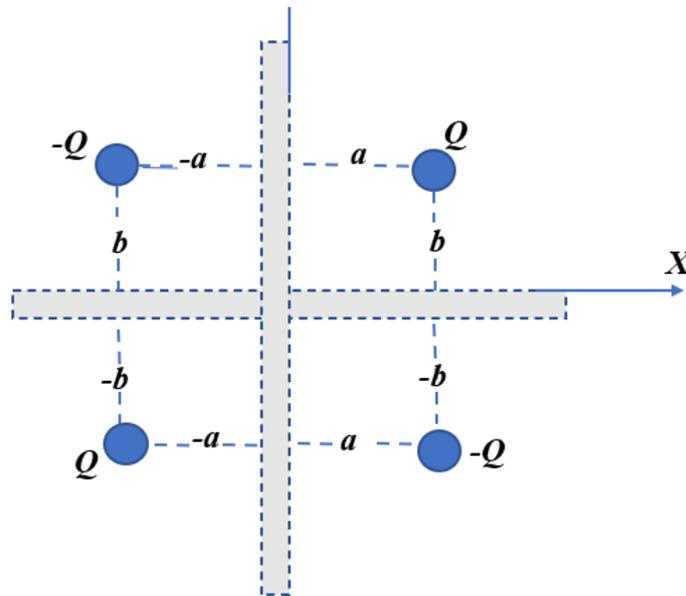


Figura 5.6: Configuración equivalente al sistema mostrado en la figura 5.4 . Ejemplo 5.2.2

Una carga puntual Q se localiza en el punto $(a, 0, b)$ entre dos planos conductores semi infinitos que se intersecan en ángulo recto, ver **figura 5.6**. Determine el potencial eléctrico en el punto $P(x, y, z)$ y la fuerza sobre Q .

Solución. La configuración de la **figura 5.7**. es equivalente a la configuración inicial, pues la presencia de las tres cargas imagen permiten mantener la condición de potencial cero o potencial constante sobre los planos.

En 3.6 se dijo que el potencial producido por una distribución de n cargas puntuales, está dado por:

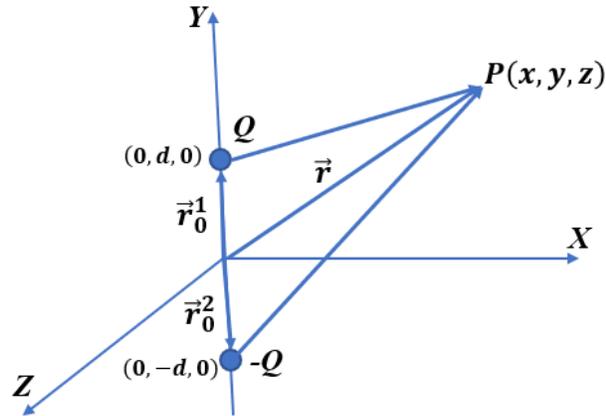


Figura 5.7: Configuración para el cálculo del potencial eléctrico debido a una carga eléctrica inicial y la carga imagen.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|} \quad (5.78)$$

Donde, \vec{r} es el vector que va desde el origen al punto donde se está calculando el potencial y \vec{r}_0^n es el vector que va desde el origen hasta la carga n .

Por lo tanto, el potencial en el punto $P(x, y, z)$, es:

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^3|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0^4|} \right) \quad (5.79)$$

Pero según la **figura 5.8**, se tiene:

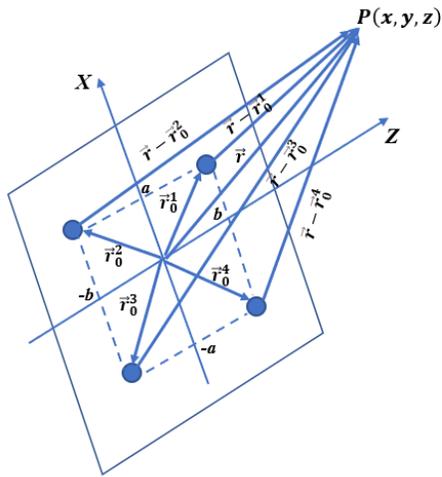


Figura 5.8: Configuración para el cálculo del potencial eléctrico producido por la carga eléctrica inicial y las tres cargas. Ejemplo 5.2.2

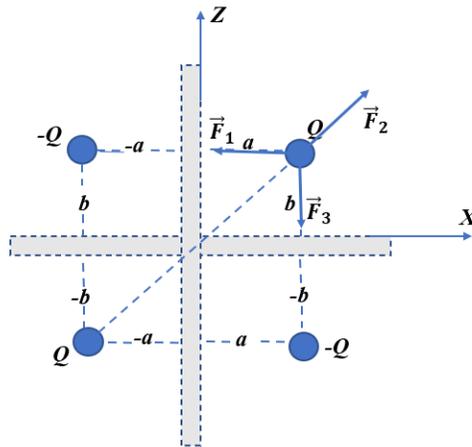


Figura 5.9: Fuerza eléctrica ejercida sobre la carga eléctrica inicial por las tres cargas. Ejemplo 5.2.2

$$\vec{r} - \vec{r}_0^1 = (x, y, z) - (a, 0, b) \quad (5.80)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^1 = (x - a, y, z - b) \quad (5.81)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^1| = \left| (x - a)^2 + y^2 + (z - b)^2 \right|^{1/2} \quad (5.82)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^2 = (x, y, z) - (a, 0, -b) \quad (5.83)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^2 = (x - a, y, z + b) \quad (5.84)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^2| = \left| (x - a)^2 + y^2 + (z - b)^2 \right|^{1/2} \quad (5.85)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^3 = (x, y, z) - (a, 0, -b) \quad (5.86)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^3 = (x + a, y, z + b) \quad (5.87)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^3| = \left| (x + a)^2 + y^2 + (z - b)^2 \right|^{1/2} \quad (5.88)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^4 = (x, y, z) - (a, 0, -b) \quad (5.89)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^4 = (x + a, y, z - b) \quad (5.90)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^4| = \left| (x+a)^2 + y^2 + (z+b)^2 \right|^{1/2} \quad (5.91)$$

Por tanto:

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left| (x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2 \right|^{1/2}} - \frac{1}{\left| (x-a)^2 + y^2 + (z+b)^2 \right|^{1/2}} + \frac{1}{\left| (x+a)^2 + y^2 + (z-b)^2 \right|^{1/2}} - \frac{1}{\left| (x+a)^2 + y^2 + (z+b)^2 \right|^{1/2}} \right) \quad (5.92)$$

En 3.4 se estableció que el campo eléctrico producido por un sistema de n cargas puntuales, está dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_0^n)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^n|^3} \quad (5.93)$$

Donde, nuevamente, \vec{r} es el vector que va desde el origen al punto donde se está calculando el potencial y \vec{r}_0^n es el vector que va desde el origen hasta la carga n .

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0^1)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^1|^3} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0^2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^2|^3} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0^3)}{|\vec{r} - \vec{r}_0^3|^3} \right) \quad (5.94)$$

De la **figura 5.10**, se tiene:

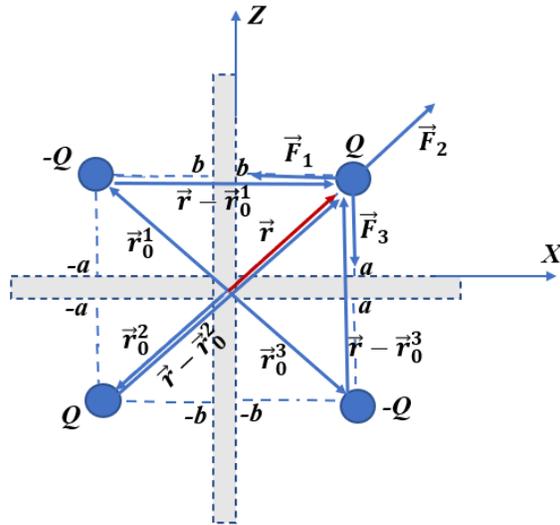


Figura 5.10: Ubicación de los vectores para el cálculo del campo eléctrico creado en la posición de la carga inicial por las tres cargas . Ejemplo 5.2.2

$$\vec{r} - \vec{r}_0^1 = (a, 0, b) - (-a, 0, b) \quad (5.95)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^1 = (2a, 0, 0) \quad (5.96)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^1|^3 = (2a)^3 \quad (5.97)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^2 = (-a, 0, -b) - (-a, 0, b) \quad (5.98)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^2 = (0, 0, -2b) \quad (5.99)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^2|^3 = (2b)^3 \quad (5.100)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^3 = (a, 0, -b) - (-a, 0, b) \quad (5.101)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0^3 = (-2a, -2b) \quad (5.102)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0^3|^3 = \left((-2a)^2 + (-2b)^2 \right)^{3/2} \quad (5.103)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} & \left(\frac{2a\hat{i}}{(-2a)^3} + \frac{(-2b)\hat{k}}{(-2b)^3} + \frac{(-2a)\hat{i}}{\left((-2a)^2 + (-2b)^2 \right)^{3/2}} \right. \\ & \left. + \frac{(-2b)\hat{k}}{\left((-2a)^2 + (-2b)^2 \right)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} & \left(\frac{1}{(2a)^2} - \frac{2a\hat{i}}{\left((-2a)^2 + (-2b)^2 \right)^{3/2}} \right) \hat{i} \\ & + \left(\frac{1}{(-2b)^2} - \frac{2b}{\left((-2a)^2 + (-2b)^2 \right)^{3/2}} \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{(2a)^2} - \frac{2a\hat{i}}{\left((2a)^2 + (2b)^2\right)^{3/2}} \right) \hat{i} + \left(\frac{1}{(2b)^2} - \frac{2b}{\left((2a)^2 + (2b)^2\right)^{3/2}} \right) \hat{k} \right] \quad (5.106)$$

Multiplicando por las cargas $Q_1 = -Q$, $Q_2 = Q$ y $Q_5 = -Q$, se obtiene la fuerza sobre la carga Q .

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{1}{(2a)^2} + \frac{2a}{\left((2a)^2 + (2b)^2\right)^{3/2}} \right) \hat{i} + \left(\frac{1}{(2b)^2} - \frac{2b}{\left((2a)^2 + (2b)^2\right)^{3/2}} \right) \hat{k} \right] \quad (5.107)$$

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{1}{a^2} + \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right) \hat{i} + \left(-\frac{1}{b^2} + \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right) \hat{k} \right] \quad (5.108)$$

Ejemplo

Una carga lineal infinita con densidad de carga λ , se encuentra situada a una distancia d del plano conductor $z = 0$, conectado a tierra. Ver **figura**

5.11. Hallar el potencial en el punto $P(x, y, z)$ y la densidad de carga inducida en el plano.

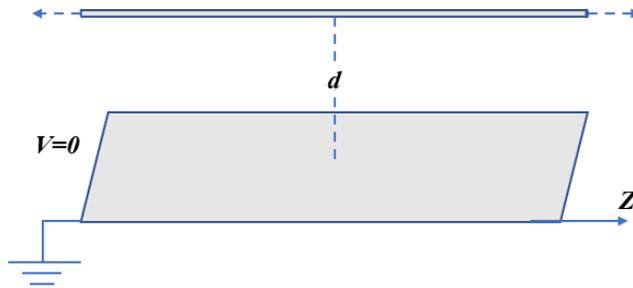


Figura 5.11: Carga eléctrica lineal infinita y plano conductor colocado en potencial 0. Ejemplo 5.2.3

Solución. En el **ejemplo 3.5.1** se estableció que el campo eléctrico producida por una distribución lineal infinita de carga, con densidad lineal de carga λ , está dado por:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \hat{k} \quad (5.109)$$

Donde z es la distancia de la línea de carga al punto donde se calcula el campo eléctrico.

Generalizando, el campo eléctrico puede escribirse como:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (5.110)$$

La **figura 5.12** muestra la configuración equivalente, donde se ha eliminado el plano y se ha considerado una nueva distribución lineal de carga, pero negativa ($-\lambda$) y a una distancia $-d$ del plano.

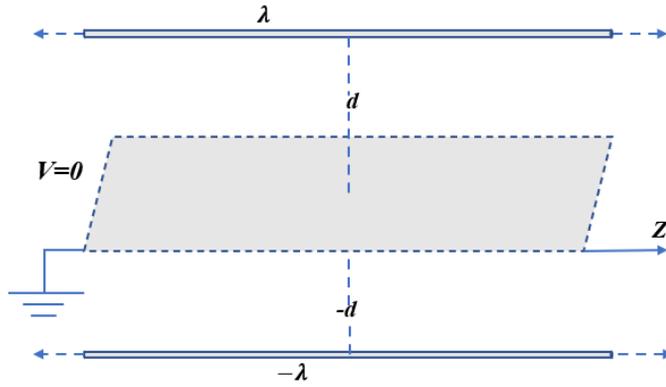


Figura 5.12: Configuración equivalente a la mostrada en la figura 5.11

Si se llama \vec{E}_1 al campo producido por la línea positiva y \vec{E}_2 al campo producido por la línea negativa, entonces el campo eléctrico en el punto $P(x, y, z)$, será:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (5.111)$$

Según la figura 5.13, se tiene:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0^1 = (x, y, z) - (0, y, d) \quad (5.112)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0^1 = (x, 0, z - d) \quad (5.113)$$

$$r_1 = |\vec{r} - \vec{r}_0^1| = \left(x^2 + (z - d)^2 \right)^{1/2} \quad (5.114)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_0^2 = (x, y, z) - (0, y, -d) \quad (5.115)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_0^1 = (x, 0, z + d) \quad (5.116)$$

$$r_2 = |\vec{r} - \vec{r}_0^1| = \left(x^2 + (z' + d)^2\right)^{1/2} \quad (5.117)$$

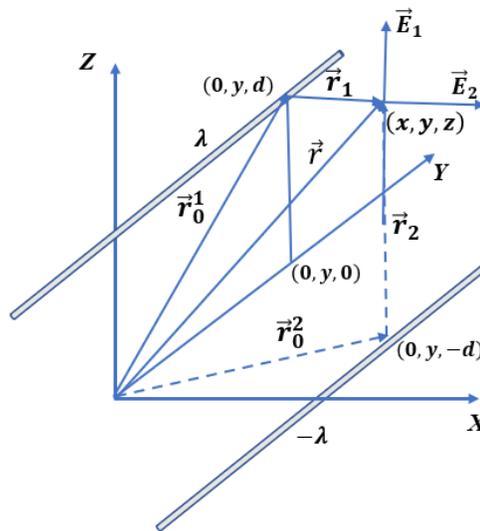


Figura 5.13: Vectores necesarios para el cálculo del campo eléctrico producido en el punto P por la configuración del ejemplo 5.2.3

Luego:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \hat{r}_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} \hat{r}_2 \quad (5.118)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}_1}{2\pi\epsilon_0 (r_1)^2} + \frac{\lambda \vec{r}_2}{2\pi\epsilon_0 (r_2)^2} \quad (5.119)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda(x, 0, z-d)}{2\pi\epsilon_0(x^2 + (z-d)^2)} - \frac{\lambda(x, 0, z+d)}{2\pi\epsilon_0(x^2 + (z+d)^2)} \quad (5.120)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{x\hat{i}}{(x^2 + (z-d)^2)} - \frac{x\hat{i}}{(x^2 + (z+d)^2)} + \frac{(z-d)\hat{k}}{(x^2 + (z-d)^2)} - \frac{(z-d)\hat{k}}{(x^2 + (z+d)^2)} \right] \quad (5.121)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{x}{(x^2 + (z-d)^2)} - \frac{x}{(x^2 + (z+d)^2)} \right) \hat{i} + \left(\frac{(z-d)}{(x^2 + (z-d)^2)} - \frac{(z-d)}{(x^2 + (z+d)^2)} \right) \hat{k} \right] \quad (5.122)$$

En 3.6 se estableció el potencial eléctrico como aquella función escalar (V), asociada al campo electrostático por ser un campo conservativo, tal que:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (5.123)$$

Asumiendo la dependencia del potencial exclusivamente de la distancia entre la carga que lo produce y el punto donde se quiere calcular, entonces:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad (5.124)$$

Multiplicando escalarmente a ambos lados de la ecuación por \hat{r} , se tiene:

$$\vec{E} \circ \hat{r} = -\frac{dV}{dr} \hat{r} \circ \hat{r} \quad (5.125)$$

$$\vec{E} \circ \hat{r} dr = -dV \quad (5.126)$$

$$V = -\int \vec{E} \circ d\vec{r} \quad (5.127)$$

Como se conoce el campo eléctrico producido por cada una de las distribuciones lineales, entonces:

$$V = V_1 + V_2 \quad (5.128)$$

$$V = -\int \vec{E}_1 \circ d\vec{r} - \int \vec{E}_2 \circ d\vec{r} \quad (5.129)$$

$$V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \hat{r}_1 \circ d\vec{r} - \int \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} \hat{r}_2 \circ d\vec{r} \quad (5.130)$$

$$V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} dr_1 - \int \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} dr_2 \quad (5.131)$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 \quad (5.132)$$

$$V = -\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 \right) \quad (5.133)$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (5.134)$$

Por tanto:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{x^2 + (z-h)^2}{x^2 + (z+h)^2} \right]^{1/2} \quad (5.135)$$

Aplicando las condiciones de frontera, se tiene para la distribución de densidad de carga en el plano:

$$\rho_s = \epsilon_0 E_z|_{z=0} \quad (5.136)$$

$$\rho_s = \epsilon_0 E_z \quad (5.137)$$

$$\rho_s = \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{-h}{x^2 + h^2} - \frac{h}{x^2 + h^2} \right] \quad (5.138)$$

$$\rho_s = \frac{-h\lambda}{\pi(x^2 + h^2)} \quad (5.139)$$

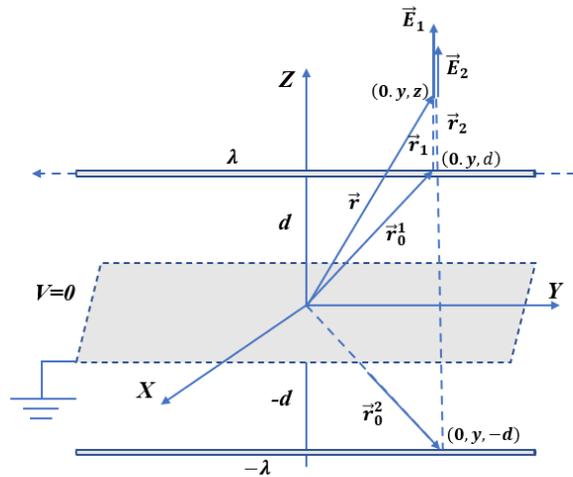


Figura 5.14: Cálculo del campo eléctrico creado por la configuración del ejemplo 5.2.3 en el punto $(0, y, z)$

Vale la pena analizar el valor del campo eléctrico cuando se calcula en un punto sobre el plano $Z - Y$, es decir $P(0, y, z)$. **Figura 5.14.**

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0^1 = (0, y, z) - (0, y, d) \quad (5.140)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0^1 = (0, 0, z - d) \quad (5.141)$$

$$|\vec{r}_1| = (z - d) \quad (5.142)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_0^2 = (0, y, z) - (0, y, -d) \quad (5.143)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_0^2 = (0, 0, z + d) \quad (5.144)$$

$$|\vec{r}_2| = (z + d) \quad (5.145)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \hat{r}_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} \hat{r}_2 \quad (5.146)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}_1}{2\pi\epsilon_0 \vec{r}_0^1} - \frac{\lambda \vec{r}_2}{2\pi\epsilon_0 \vec{r}_0^2} \quad (5.147)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{(0, 0, z - d)}{(z - d)^2} - \frac{(0, 0, z + d)}{(z + d)^2} \right] \hat{k} \quad (5.148)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{z - d}{(z - d)^2} - \frac{z + d}{(z + d)^2} \right] \hat{k} \quad (5.149)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z-d} - \frac{1}{z+d} \right] \hat{k} \quad (5.150)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z-d} - \frac{1}{z+d} \right] \hat{k} \quad (5.151)$$

Que es la solución si se aplica directamente el resultado conseguido en el **ejemplo 3.5.1**:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \hat{k} \quad (5.152)$$

Taller

1. Demuestre que las siguientes funciones de potencial satisfacen la ecuación bidimensional de Laplace:

$$a) V(x, y) = Ae^{-kx} \sin ky$$

$$b) V(x, y) = A \sin \frac{n\pi}{b} x \cosh \left[\frac{n\pi}{b} (a - y) \right]$$

Donde A, k, a y b son constantes.

2. Encontrar, por el método de separación de variables, la solución de la ecuación de Laplace para un potencial $V = V(x, y, z)$.
3. Los radios exterior e interior de dos delgadas capas esféricas conductoras y concéntricas son R_e y R_i , respectivamente. El espacio entre las capas está lleno con material aislante. La capa interior se mantiene a un potencial V_i y la exterior a V_e . Determine la distribución del potencial en el material aislante resolviendo la ecuación de Laplace.
4. Una carga eléctrica puntual se encuentra a una distancia d de una esfera conductora de radio a que se encuentra a un potencial cero. Determinar la magnitud q_i de la carga imagen y la distancia d_i , a la que se debe encontrar para mantener el potencial cero sobre la esfera. **Ver figura 5.15**

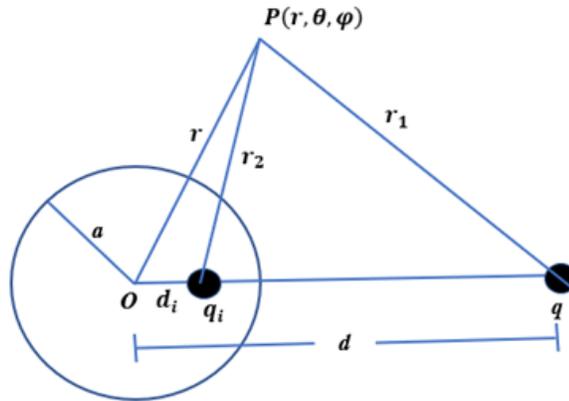


Figura 5.15: Configuración para el ejercicio 4

5. Considere una línea de carga infinita, ρ_l (C/m), se encuentra a una distancia d del eje de un cilindro circular infinito conductor paralelo de radio a . Mediante el método de imágenes, encontrar la carga ρ_i , de la línea imagen y su distancia d_i , desde el centro del cilindro. Ver **figuras 5.16 y 5.17**.

Recuerde que la línea imagen debe ser una línea de carga paralela dentro del cilindro para que la superficie cilíndrica en $r = a$ sea equipotencial, y que, dicha línea de carga debe encontrarse a una distancia d_i desde el centro del cilindro sobre la línea que dicho centro hace con la línea de carga.

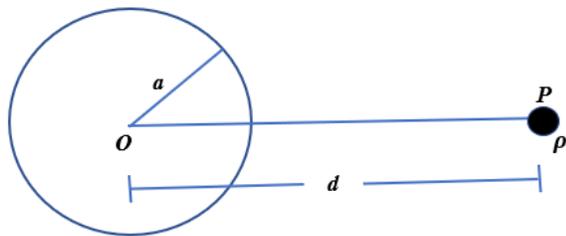


Figura 5.16: Configuración para el ejercicio 5

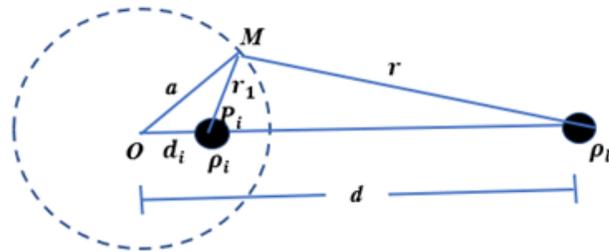


Figura 5.17: Configuración equivalente a la mostrada en la figura 5.16

APÉNDICE

Apéndice A

Tres formas de escribir las leyes de Maxwell

(Se respeta la notación del autor) ¹

Cuadro A.1: Notaciones de las leyes de Maxwell

¹Tomado de Gell - Mann Murray. El Quark y el Jaguar. Aventuras en lo simple y lo complejo.

En notación similar a la empleada en los libros de textos actuales

$$\nabla \circ E = 4\pi\rho \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \circ B = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times E + \frac{1}{c}\dot{B} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times B - \frac{1}{c}\dot{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c}\dot{B}_x = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\dot{B}_x = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c}\dot{B}_y = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{1}{c}\dot{E}_z = \frac{4\pi}{c}j_z$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\dot{E}_x = \frac{4\pi}{c}j_x \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{1}{c}\dot{E}_y = \frac{4\pi}{c}j_y$$

En la notación menos abreviada que se empleaba cuando Maxwell comenzó su obra

En notación relativista menos abreviada

$$\partial_\nu F_\nu^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu \quad (\text{A.9})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\partial_\nu F_{\kappa\lambda} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Desarrollo de fourier para el pulso cuadrado

El pulso cuadrado está dado por una función de la forma:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

De tal forma que su período es 2π .

En 2.2 se dijo que el desarrollo de una función en serie de Fourier viene dado por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right) \quad (\text{B.2})$$

Donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (\text{B.3})$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt \quad (\text{B.4})$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt \quad (\text{B.5})$$

Con las siguientes propiedades:

1. Si la función $f(t)$ es impar, es decir si $f(-t) = -f(t)$, entonces los coeficientes a_0 y a_n son cero.
2. Si la función $f(t)$ es par, es decir si $f(-t) = f(t)$, entonces los coeficientes b_n son cero.

Por tanto:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 0 dt + \int_0^{\pi} \pi dt \right) \quad (\text{B.6})$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} [\pi t]_0^{\pi} \quad (\text{B.7})$$

$$a_0 = \pi \quad (\text{B.8})$$

Ahora:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \left(\cos \left(\frac{2n\pi}{2\pi} t \right) dt \right) \right) + \int_0^{\pi} \pi \cos \left(\frac{2n\pi}{2\pi} t \right) dt \quad (\text{B.9})$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos(nt) dt \quad (\text{B.10})$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{n} \sin nt \right]_0^\pi \quad (\text{B.11})$$

$$a_n = \frac{1}{2n} \sin n\pi \quad (\text{B.12})$$

Por lo que:

$$a_n = 0 \quad (\text{B.13})$$

De otra parte:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \left(\sin \left(\frac{2n\pi}{2\pi} t \right) dt \right) \right) + \int_0^\pi \pi \sin \left(\frac{2n\pi}{2\pi} t \right) dt \quad (\text{B.14})$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \pi \sin (nt) dt \quad (\text{B.15})$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\pi}{n} \cos nt \right]_0^\pi \quad (\text{B.16})$$

$$b_n = \frac{1}{2n} (\cos n\pi - 1) \quad (\text{B.17})$$

Por lo que:

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \text{Si } n \text{ es impar} \quad (\text{B.18})$$

Es decir:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \cdots + \frac{1}{2n+1} \sin (2n+1)t \quad (\text{B.19})$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin 2n-1t \quad (\text{B.20})$$

En las gráficas **B.1**, **B.2**, **B.3** y **B.4** se muestra el pulso cuadrado y el desarrollo en serie de Fourier para cuatro valores de n .

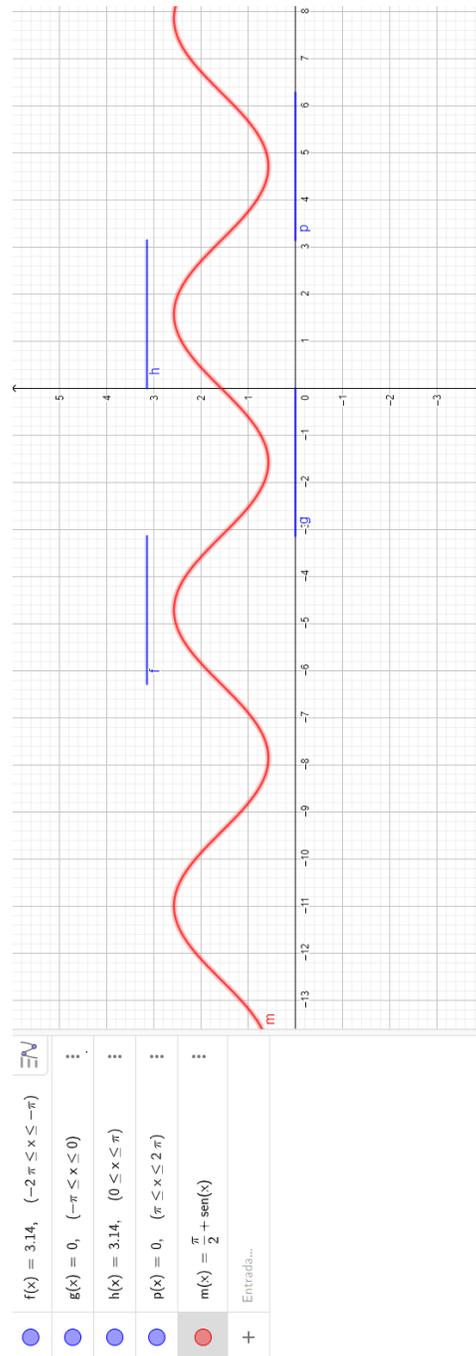
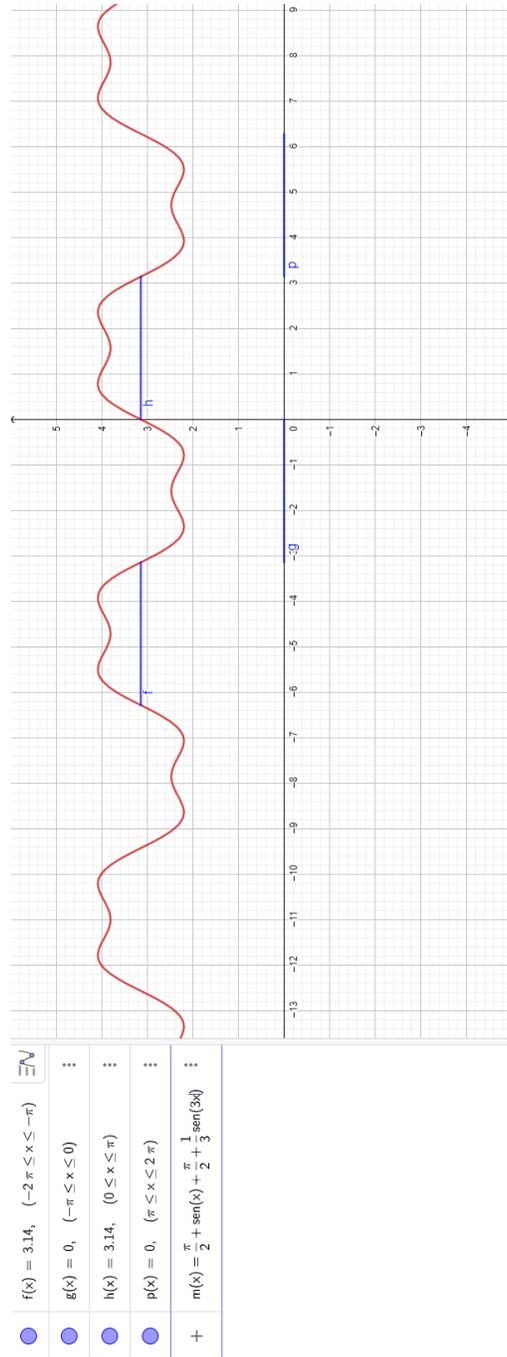


Figura B.1: Pulso cuadrado y su desarrollo en serie de Fourier para $n = 1$

Figura B.2: Pulso cuadrado y su desarrollo en serie de Fourier para $n = 2$

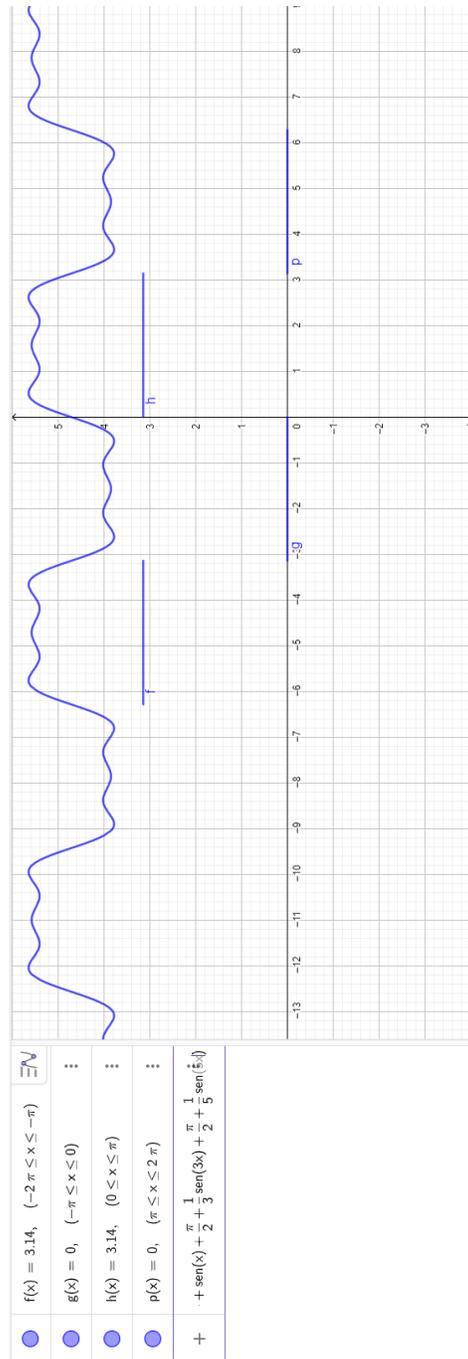


Figura B.3: Pulso cuadrado y su desarrollo en serie de Fourier para $n = 3$

Figura B.4: Pulso cuadrado y su desarrollo en serie de Fourier para $N = 5$

Apéndice C

Desarrollo de fourier para el pulso diente de sierra

El pulso *diente de sierra* está definido por una función de la forma:

$$f(t) = \frac{t}{L} \text{ para } -L < t < L \quad (\text{C.1})$$

Obviamente la función es una función periódica, con período $2L$.

En 2.2 se dijo que el desarrollo de una función en serie de Fourier viene dado por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right) \quad (\text{C.2})$$

Donde:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (\text{C.3})$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt \quad (\text{C.4})$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt \quad (\text{C.5})$$

Con las siguientes propiedades:

1. Si la función $f(t)$ es impar, es decir si $f(-t) = -f(t)$, entonces los coeficientes a_0 y a_n son cero.
2. Si la función $f(t)$ es par, es decir si $f(-t) = f(t)$, entonces los coeficientes b_n son cero.

Como la función definida arriba es una función impar, entonces:

$$b_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{t}{L} \sin \left(\frac{n\pi}{L} t \right) dt \quad (\text{C.6})$$

$$b_n = \frac{1}{2L^2} \int_{-L}^L t \sin \left(\frac{n\pi}{L} t \right) dt \quad (\text{C.7})$$

Llamando $k = \frac{n\pi}{L}$, e integrando por partes, se tiene:

$$u = t \quad (\text{C.8})$$

$$du = dt \quad (\text{C.9})$$

$$dv = \sin kt dt \quad (\text{C.10})$$

Entonces:

$$v = \int \sin kt dt \quad (\text{C.11})$$

$$v = \frac{1}{k} \cos kt \quad (\text{C.12})$$

Luego:

$$\int t \sin kt dt = \frac{t}{k} \cos kt - \frac{1}{k} \int \cos kt dt \quad (\text{C.13})$$

$$\int t \sin kt dt = \frac{t}{k} \cos kt - \frac{\sin kt}{k} \quad (\text{C.14})$$

Regresando a la integral original, se tiene:

$$\frac{1}{L^2} \int_{-L}^L t \sin \left(\frac{b\pi}{L} t \right) dt = \frac{1}{L^2} \int_0^L t \sin \left(\frac{n\pi}{L} t \right) dt \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{1}{L^2} \int_0^L t \sin \left(\frac{n\pi}{L} t \right) dt = \left[\frac{1}{L^2} \frac{Lt}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) - \frac{L}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \right]_0^L \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{1}{L^2} \int_0^L t \sin \left(\frac{n\pi}{L} t \right) dt = \frac{1}{n\pi} \cos n\pi - \frac{L}{n\pi} \sin 2n\pi \quad (\text{C.17})$$

Pero para todo n :

$$\sin 2n\pi = 0 \quad (\text{C.18})$$

Luego:

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \cos n\pi \quad (\text{C.19})$$

Por tanto, la serie de Fourier para la función diente de sierra es:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n\pi} \cos n\pi \left(\sin \left(\frac{n\pi}{L} \right) t \right) \quad (\text{C.20})$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \left(\frac{n\pi}{L} \right) t \quad (\text{C.21})$$

Pues $\cos n\pi = \pm 1$ dependiendo de si n es par o impar. Es bueno resaltar que la función diente de sierra no siempre se expresa como una función impar. Por ejemplo, la función

$$f(t) = \frac{4}{5}t \quad 0 \leq t \leq 10 \quad (\text{C.22})$$

También es una función diente de sierra, pero en este caso no es una función par ni impar, por tanto, hay que calcular los coeficientes a_0 , a_n y b_n .

Calculando los coeficientes, se tiene:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (\text{C.23})$$

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_0^{10} \frac{4}{5}t dt = \frac{4}{25} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{10} \quad (\text{C.24})$$

$$a_0 = \frac{4}{25} \left[\frac{(10)^2 - (0)^2}{2} \right] \quad (\text{C.25})$$

$$a_0 = 2 \quad (\text{C.26})$$

Para a_n :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad (\text{C.27})$$

$$a_n = \frac{1}{10} \int_0^{10} \frac{4}{5}t \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt \quad (\text{C.28})$$

$$a_n = \frac{1}{50} \int_0^{10} t \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt \quad (\text{C.29})$$

Integrando por partes, se tiene:

$$u = t \quad du = dt \quad (\text{C.30})$$

$$dv = \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt \quad v = \int \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt \quad (\text{C.31})$$

$$v = -\left(\frac{5}{2n\pi}\right) \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) \quad (\text{C.32})$$

$$\int v du = -\left(\frac{5}{2n\pi}\right) \int \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) \quad (\text{C.33})$$

$$\int v du = \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) \quad (\text{C.34})$$

Por tanto:

$$a_n = - \left(\frac{2}{n\pi} \right) \sin 2n\pi = 0 \quad (\text{C.35})$$

Para b_n , se tiene:

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \left(\frac{2n\pi}{T} t \right) dt \quad (\text{C.36})$$

$$b_n = \frac{1}{10} \int_0^{10} \frac{4}{5} t \sin \left(\frac{2n\pi}{5} t \right) dt \quad (\text{C.37})$$

$$b_n = \frac{2}{25} \int_0^{10} t \sin \left(\frac{2n\pi}{5} t \right) dt \quad (\text{C.38})$$

Integrando por partes:

$$u = t \quad du = dt \quad (\text{C.39})$$

$$dv = \sin \left(\frac{2n\pi}{5} t \right) dt \quad v = \left(\frac{5}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi}{5} t \right) \quad (\text{C.40})$$

$$-\frac{5}{2n\pi} \int \cos \frac{2n\pi}{5} t dt = -\sin \frac{2n\pi}{5} t \quad (\text{C.41})$$

$$\frac{2}{25} \int_0^{10} t \sin \left(\frac{2n\pi}{5} t \right) dt = \frac{2}{25} \left[-\frac{5}{2n\pi} t \cos \frac{2n\pi}{5} t + \sin \frac{2n\pi}{5} t \right]_0^{10} \quad (\text{C.42})$$

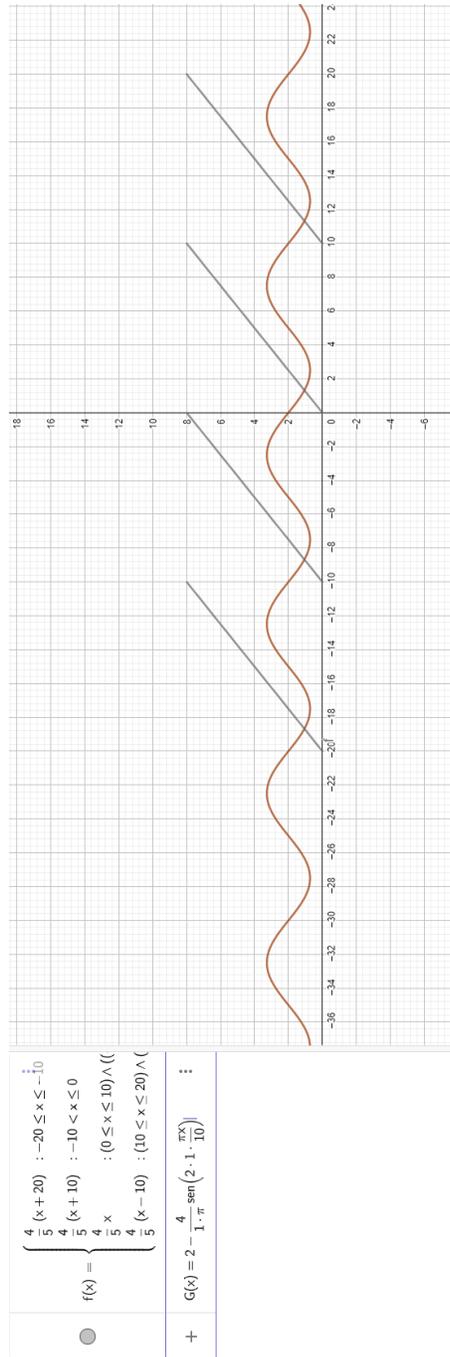
$$\frac{4}{25} \int_0^{10} t \sin \left(\frac{2n\pi}{5} t \right) dt = \left[-\frac{1}{n\pi} \cos 4n\pi + \frac{4}{25} \sin 4n\pi \right] = \frac{2}{n\pi} \quad (\text{C.43})$$

$$f(t) = 2 - \sum_{n=1}^n \frac{4}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{5} t \quad (\text{C.44})$$

En las gráficas [C.1](#), [C.2](#), [C.3](#), [C.4](#) y [C.5](#) se muestra la función diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier para cinco valores de n .



Figura C.1: Sintetizador de fourier. Laboratorio de física Universidad de la Amazonia

Figura C.2: Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 1$

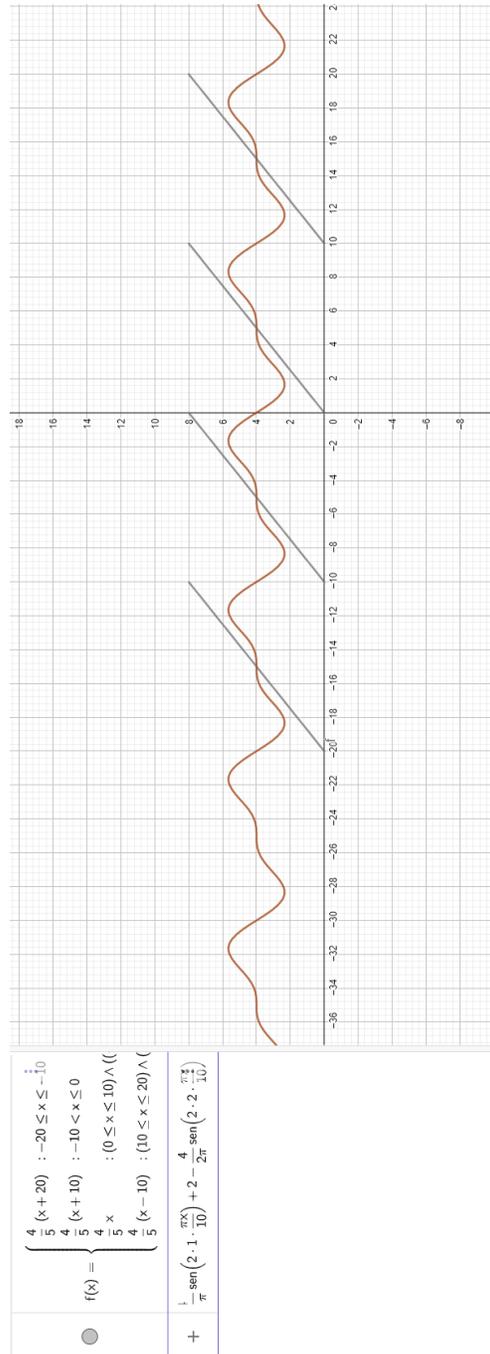


Figura C.3: Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 2$

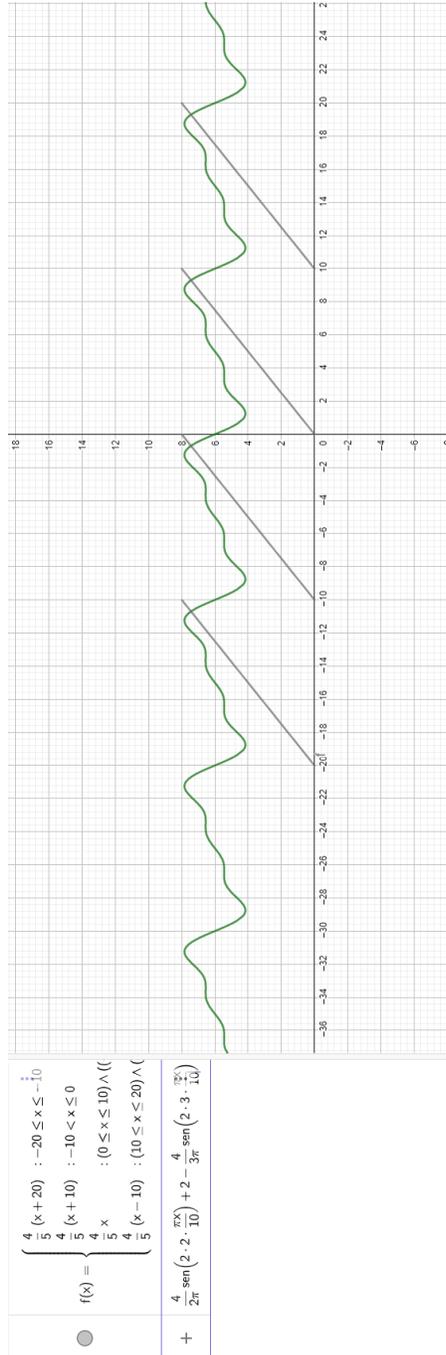


Figura C.4: Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 3$

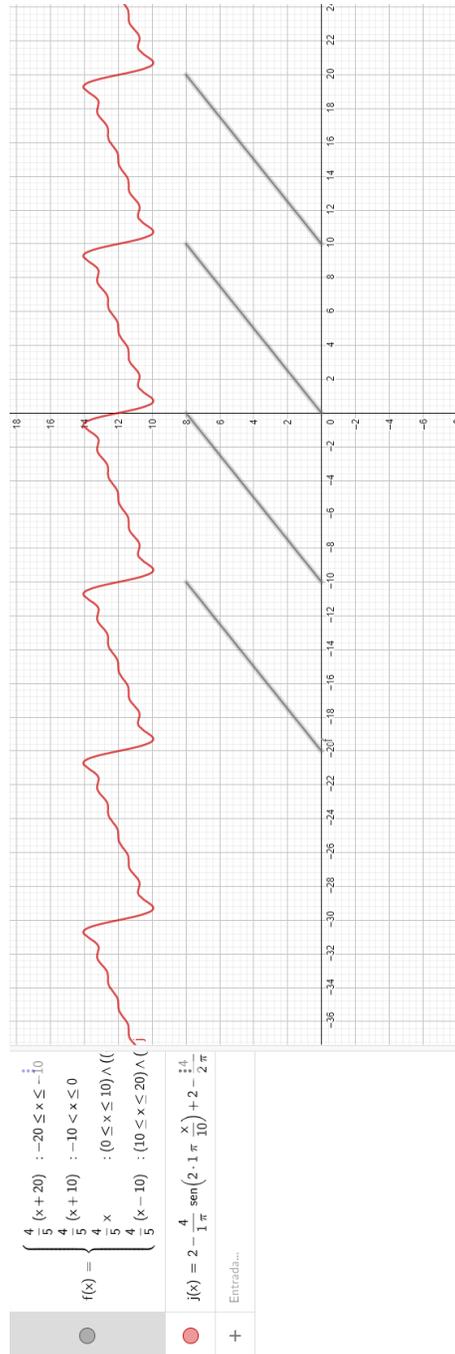


Figura C.5: Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 5$

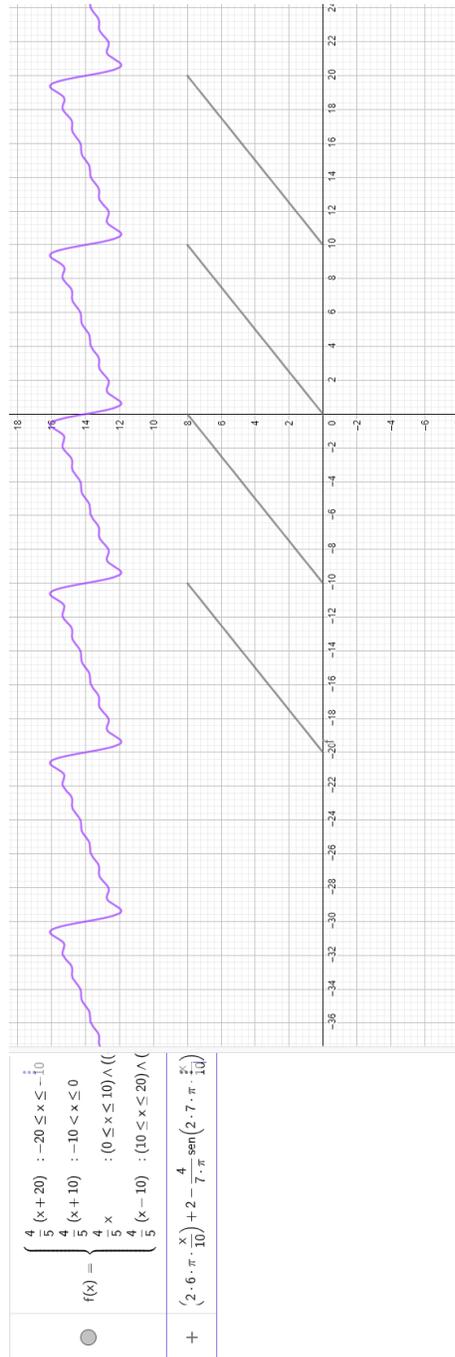


Figura C.6: Pulso diente de sierra y su desarrollo en serie de Fourier $n = 7$

Apéndice D

Clasificación de los materiales según sus propiedades eléctricas y los tres vectores eléctricos: $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$

Según el comportamiento eléctrico, es decir, según la respuesta que presenten ante la presencia de un campo eléctrico externo, los materiales se clasifican en: *conductores*, *dieléctricos (aislantes)* y *semiconductores*. La teoría que explica a profundidad dicha clasificación es la *Teoría de bandas*, la cual, obviamente, no se considera aquí.

D.1. Materiales conductores

Los materiales más representativo entre los conductores son los metales, entre ellos sobresalen por su uso, el cobre (Cu), el aluminio (Al), la plata (Ag) y el oro (Au). Entre los conductores no metálicos se encuentra el grafito, las soluciones salinas y el plasma.

En términos generales los materiales conductores de electricidad se

caracterizan por poseer gran cantidad de carga eléctrica libre, la cual tiene la capacidad de desplazarse por el material ante la presencia de un campo eléctrico externo. Dos propiedades fundamentales tienen los materiales conductores eléctricamente:

1. Un conductor en presencia de un campo eléctrico externo a él, es un cuerpo equipotencial, cuyo potencial interno es cero. Si se recuerda que:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (\text{D.1})$$

Entonces el campo eléctrico en el interior del conductor es cero, ($\vec{E} = 0$), lo que implica que toda la carga eléctrica del conductor se ha distribuido sobre su superficie.

2. En un conductor eléctrico se puede establecer una corriente eléctrica mediante una fuente de fuerza electromotriz (Batería).

El movimiento de los portadores de carga en un conductor aislado es aleatorio y, por tanto, el flujo de portadores de carga a través de una sección transversal de área del conductor es cero. Pero si se conecta el conductor a una fuente de poder, ésta establece dentro del conductor un campo eléctrico, el cual reorienta los portadores de carga haciendo que los portadores positivos se desplacen en dirección del campo, en tanto que, los portadores negativos lo hagan en dirección contraria al campo.

Se define, por tanto, la corriente eléctrica en el conductor como la *cantidad de carga eléctrica, que atraviesa la sección de área transversal del conductor en la unidad de tiempo.*

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (\text{D.2})$$

Su dirección se define como la dirección del campo eléctrico establecido dentro del conductor, es decir, contraria al desplazamiento de los electrones, y su unidad es el Ampere.

$$[i]_{SI} = \frac{C}{sg} = A \quad (D.3)$$

Se define la densidad de corriente como la cantidad de corriente que atraviesa perpendicularmente la sección transversal del conductor, es decir:

$$i = \int \vec{j} \circ d\vec{S} \quad (D.4)$$

De tal manera que:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (D.5)$$

Donde σ se denomina como la conductividad del material.

Recordando que:

$$V = - \int \vec{E} \circ d\vec{l} \quad (D.6)$$

Y, como dicho campo eléctrico tiene dirección contraria al desplazamiento de los electrones del conductor y, además es uniforme, entonces:

$$E = \frac{V}{l} \quad (D.7)$$

Considerando que la densidad de corriente y la sección transversal del conductor son perpendiculares, entonces:

$$j = \frac{i}{S} \quad (D.8)$$

Por tanto:

$$\sigma E = \frac{i}{S} \quad (D.9)$$

$$\sigma \frac{V}{l} = \frac{i}{S} \quad (D.10)$$

$$\frac{V}{i} = \frac{l}{\sigma S} \quad (\text{D.11})$$

Se define la resistencia del material como:

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (\text{D.12})$$

Por tanto:

$$\frac{V}{i} = R \quad (\text{D.13})$$

Que es la ley de Ohm para los conductores.

De otra parte, el potencial eléctrico es la energía potencial eléctrica por unidad de carga (**sección 3.6**), entonces:

$$dU_E = dqV \quad (\text{D.14})$$

$$dU_E = idtV \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{dU_E}{dt} = iV \quad (\text{D.16})$$

Pero la energía por unidad de tiempo es la potencia P , entonces:

$$P = iV \quad (\text{D.17})$$

La cual es la ley de Joule, y la que nos indica cuánto calor se disipa en un conductor con el paso de una corriente. Combinada con la ley de Ohm puede escribirse como:

$$P = i^2 R \quad (\text{D.18})$$

O como:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (\text{D.19})$$

D.2. materiales dieléctricos

Los materiales no conductores de electricidad, llamados dieléctricos o aislantes, se caracterizan por no poseer gran cantidad de carga eléctrica libre, que pueda desplazarse libremente por el material ante la presencia de un campo eléctrico externo. En otras palabras, son materiales que no conducen la electricidad. Entre los dieléctricos se encuentran el vidrio, la cerámica, los plásticos, la goma, la mica, el papel, la porcelana, la madera seca, la baquelita etc.

En el ejemplo 3.6.2 se estudió el dipolo eléctrico, como dos cargas eléctricas q , de signo opuesto, separadas una pequeña distancia d , y para los cuales se define el momento dipolar eléctrico como:

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (\text{D.20})$$

Como en un dieléctrico los electrones están fuertemente ligados a su núcleo, entonces, el efecto de un campo eléctrico sobre un átomo (o molécula) es producir un pequeño desplazamiento de las cargas eléctricas positivas y las cargas eléctricas en direcciones opuestas, creando con ello dipolos eléctricos en el material. Se dice entonces, que el material se encuentra polarizado.

Se define entonces la densidad volumétrica de momento dipolar eléctrico como el vector polarización \vec{P} :

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \vec{p}_k}{\Delta v} \quad (\text{D.21})$$

En el caso de los materiales polares, es decir, materiales cuyas moléculas son dipolos naturales (el agua, el ácido clorhídrico) dicha polarización se debe a la alineación con el campo eléctrico externo que sufren dichos dipolos naturales.

De hecho, la polarización \vec{P} , como todo dipolo (ver ejemplo 3.6.2) produce un potencial eléctrico en un punto externo al dieléctrico, dado por:

$$dV = \frac{\vec{P} \circ \hat{r} dv}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{D.22})$$

De donde se puede mostrar que la polarización \vec{P} corresponde a un gran dipolo eléctrico (por así decirlo) cuya carga positiva corresponde a una densidad superficial de carga de polarización ρ_{PS} , y la carga negativa corresponde a una densidad volumétrica de carga de polarización ρ_{Pv} .

$$\rho_{PS} = \vec{P} \circ \hat{r}_n \quad (\text{D.23})$$

$$\rho_{Pv} = -\nabla \circ \vec{P} \quad (\text{D.24})$$

Pero los dieléctricos puros no existen y, por tanto, tienen, aunque pequeña, carga libre, por lo que su densidad volumétrica de carga de polarización se ve modificada por la densidad volumétrica de carga libre:

$$\rho_t = \rho_{Pv} + \rho_v \quad (\text{D.25})$$

Aplicando la ley de Gauss para el campo eléctrico se tiene:

$$\nabla \circ \vec{E} = \frac{\rho_{Pv} + \rho_v}{\epsilon_0} \quad (\text{D.26})$$

$$\rho_v = \nabla \circ \epsilon_0 \vec{E} - \rho_{Pv} \quad (\text{D.27})$$

$$\rho_v = \nabla \circ \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \circ \vec{P} \quad (\text{D.28})$$

$$\rho_v = \nabla \circ (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (\text{D.29})$$

Se define el vector densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico \vec{D} , como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{D.30})$$

De tal forma que la ley de Gauss para el campo eléctrico se convierte en:

$$\nabla \circ \vec{D} = \rho_v \quad (\text{D.31})$$

Para el espacio libre $\vec{P} = \mathbf{0}$ y, por tanto:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{D.32})$$

O bien:

$$\int_S \vec{D} \circ d\vec{S} = q \quad (\text{D.33})$$

La cual es otra forma de la ley de Gauss para el campo eléctrico donde se enfatiza que el flujo eléctrico, hacia el exterior o hacia el interior de una superficie S , es igual a la carga libre encerrada en dicha superficie.

D.3. Materiales semiconductores

Los materiales semiconductores son materiales que tienen propiedades intermedias entre los materiales conductores y dieléctricos, es decir,

son materiales que bajo ciertos factores (radiación incidente, presión, temperatura etc.) se comportan como conductores o como aislantes. Los más conocidos son el silicio (Si) y el germanio (Ge) por su uso en la fabricación de elementos electrónicos: diodos, transistores, circuitos integrados, celdas fotovoltaicas etc. Su estudio está fuera del rango de estas notas de clase.

Nota: se dirá que otra clase de materiales son los superconductores, pero vale recordar que la superconductividad es una propiedad que adquieren ciertos materiales bajo condiciones de muy baja temperatura. Su estudio corresponde a la mecánica cuántica.

Apéndice E

Clasificación de los materiales según sus propiedades magnéticas y los tres vectores magnéticos: \vec{H} , \vec{M} , \vec{B}

Según el comportamiento magnético, es decir, según la respuesta que presenten ante la presencia de un campo magnético externo, los materiales se clasifican en: *Ferromagnéticos*, *diamagnéticos* y *paramagnéticos*.

En el ejemplo 4.3.3, se mostró que una espira de corriente, independientemente de su geometría, podía considerarse como un dipolo magnético con un momento magnético:

$$\vec{\mu} = iA\hat{r}_n \quad (\text{E.1})$$

El cual, ante la presencia de un campo magnético externo, puede sufrir un torque:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (\text{E.2})$$

El átomo puede considerarse como una espira de corriente circular y, por tanto, como un dipolo magnético con dipolo magnético $\vec{\mu}$. En un material, que no esté magnetizado, y que no esté expuesto a un campo magnético externo, los dipolos magnéticos atómicos se orientan aleatoriamente, dando con ello un momento dipolar magnético cero.

El momento dipolar magnético por unidad de volumen, o vector magnetización \vec{M} , dentro del material es:

$$\vec{M} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \vec{m}_k}{v} \quad (\text{E.3})$$

Mediante el potencial vectorial magnético \vec{A} , el cual no ha sido considerado en estas notas, puede mostrarse que, similarmente al vector polarización, la magnetización \vec{M} , se debe a una densidad superficial de corriente de magnetización \vec{J}_{mS} :

$$\vec{J}_{mS} = \vec{M} \times \hat{r}_N \quad (\text{E.4})$$

\hat{r}_N es un vector normal a la superficie y que apunta el exterior de ella.

Y una densidad volumétrica de corriente de magnetización \vec{J}_{mv} :

$$\vec{J}_{mv} = \nabla \times \vec{M} \quad (\text{E.5})$$

En el espacio libre (vacío) la ley de Ampère nos dice que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{E.6})$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} \quad (\text{E.7})$$

Donde \vec{J} es la densidad volumétrica de corriente libre. Pero en un medio material la densidad volumétrica de corriente se ve aumentada por la densidad corriente volumétrica de magnetización, de tal forma que la ley de Ampère para un medio material es:

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \vec{J}_{mv} \quad (\text{E.8})$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \nabla \times \vec{M} \quad (\text{E.9})$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} \quad (\text{E.10})$$

Se define el vector *intensidad de campo magnético* \vec{H} como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (\text{E.11})$$

Obsérvese que para el espacio libre la ley de Ampère puede escribirse, en su forma diferencial, como:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{E.12})$$

Y en su forma integral como:

$$\int_C \vec{H} \circ d\vec{L} = i \quad (\text{E.13})$$

Existen dos parámetros que permiten clasificar los materiales magnéticos. Uno es una constante de proporcionalidad (adimensional) entre la magnetización \vec{M} y la intensidad de campo magnético \vec{H} definida en los materiales lineales, llamada *susceptibilidad magnética*:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (\text{E.14})$$

El otro parámetro es la *permeabilidad magnética relativa* μ_r :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (\text{E.15})$$

Donde μ es la permeabilidad magnética del material y μ_0 la del espacio libre.

La relación entre estos dos parámetros es:

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (\text{E.16})$$

E.1. Materiales diamagnéticos

$$(\mu_r \leq 1, \chi_m \sim 10^{-5})$$

Son materiales cuyos momentos dipolares magnéticos atómicos son cero y por ello no producen ningún campo magnético interno, por lo que son indiferentes a la presencia de un campo magnético externo.

Son materiales diamagnéticos el bismuto (Bi), el plomo (Pb), el cobre (Cu), el silicio (Si), el diamante, etc.

E.2. Materiales paramagnéticos

$$(\mu_r \geq 1, 10^{-5} \chi_m \leq \chi_m \leq 10^{-3})$$

Son materiales cuyos átomos presentan momentos magnéticos permanentes por lo que reaccionan ante la presencia de un campo magnético ex-

terno creando un campo magnético interno mediante la alineación de sus momentos magnéticos atómicos (o moleculares). Dicho campo magnético interno desaparece cuando el campo magnético externo es retirado. En otras palabras, las sustancias paramagnéticas no presentan un magnetismo permanente, entre otras cosas, porque la agitación térmica del material tiende a compensar el alineamiento de los dipolos.

Son sustancias paramagnéticas el potasio (K), el oxígeno (O), el tungsteno (W), el cloruro de erbio (Cl_{3Er}) etc.

E.3. Materiales ferromagnéticos

$$\mu_r \gg 1, \chi_m \gg 0$$

Los materiales ferromagnéticos se caracterizan por tener dipolos magnéticos atómicos (o moleculares) permanentes en gran cantidad, es decir una magnetización \vec{M} alta, lo que les permite responder fuertemente a un campo magnético externo y mostrar una magnetización aún en ausencia del campo externo. Son materiales ferromagnéticos el hierro (Fe), níquel (Ni) y cobalto (Co), los que además son los únicos materiales ferromagnéticos a temperatura. Cada uno de estos materiales pierde su magnetización a la llamada, temperatura llamada *temperatura Curie*.

Una característica fundamental de los materiales ferromagnéticos es que no son lineales, es decir, su susceptibilidad magnética χ_m , no es constante y, por tanto, su relación $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, no es una línea recta y si el material se regresa a las condiciones iniciales su curva no regresa de la misma forma en que se llevó el material a las condiciones finales. Dicha curva se llama *curva de histéresis*, y el área representa la magnetización del material.

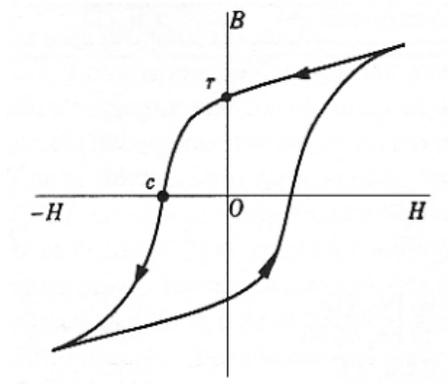


Figura E.1: Curva de histéresis de un material ferromagnético

Apéndice F

Las líneas físicas de fuerza

“ ... no he podido todavía deducir a partir de los fenómenos la razón de estas propiedades de la gravedad y yo no imagino hipótesis (Hypotheses non fingo). Pues lo que no se deduce de los fenómenos ha de ser llamado hipótesis, y las hipótesis... no tienen lugar en la filosofía experimental”, escribía Newton en 1687 en el escolio general de sus Principios matemáticos de la filosofía natural. (Newton, Isaac. Principios matemáticos de la filosofía natural. Alianza Editorial S. A. Madrid. 2018.)

Y, es que el principal fantasma que rondó a la teoría de la gravitación universal de Newton, fue el de la acción a distancia, es decir, el explicar cómo un cuerpo actúa sobre otro sin estar en contacto. Ante dicha dificultad, surgieron teorías alternativas que pretendían explicar la gravedad, entre las cuales sobresale la de Descartes, quien pretendía explicar la interacción entre los cuerpos mediante vórtices (remolinos) de una sustancia llamada éter que llenaba todo el espacio. Ver figura [F.3](#).

Michael Faraday, (1791-1867), físico británico que estudió el electromagnetismo y la electroquímica, también rechazaba la acción a distancia y para ello propuso el concepto de líneas físicas de fuerzas como la forma de visualizar y representar el sentido, la dirección y la intensidad en cada punto del espacio de la interacción electromagnética.

Será Maxwell quien, en sus trabajos, *Sobre las líneas de fuerza de*

Faraday, (1855, 1856); *Líneas físicas de fuerza*, (1861, 1862) y el *Tratado de electricidad y magnetismo* (1873), desarrolla matemáticamente las ideas de Faraday.

Lo cierto es que Faraday con su concepto de línea física de fuerza inicia la *teoría de campo* tan necesaria en la física de hoy.

Las propiedades de las líneas física de fuerza son:

1. Las líneas de fuerza dan la dirección del campo eléctrico o magnético en cualquier punto. En cualquier punto del espacio, la tangente a la línea de campo determina dicha dirección.
2. En cada punto del espacio el valor del campo y su dirección son únicos. Ello equivale a decir que, las líneas de campo no se pueden cruzar.
3. Las líneas de campo eléctrico se originan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas.
4. Las líneas de campo magnético son líneas cerradas, emergiendo de los polos magnéticos norte y cerrándose por los polos magnéticos sur.
5. El número de líneas de campo que atraviesan una determinada área transversal a las líneas es proporcional a la magnitud del campo. En las regiones donde haya un mayor número de líneas de campo el valor del campo será mayor.

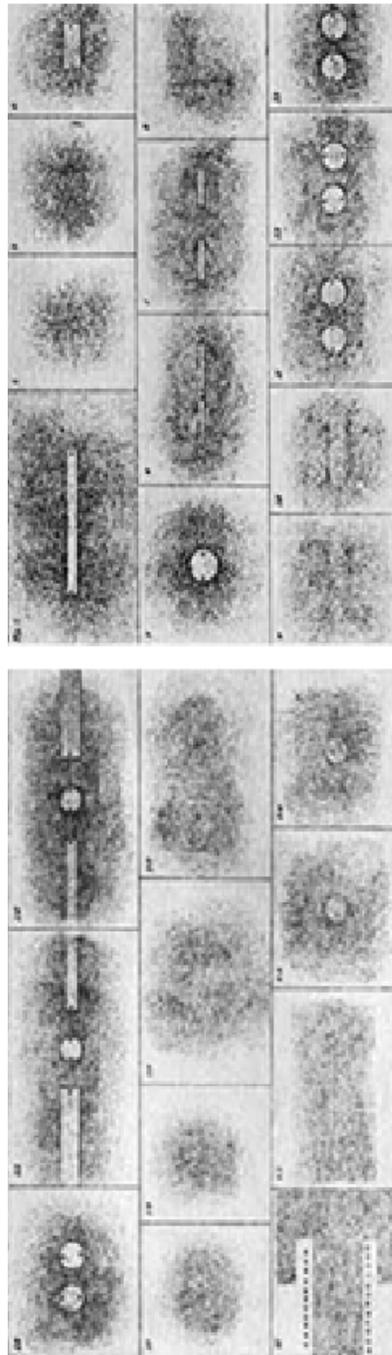


Figura F.1: Dibujos realizados por Faraday de las líneas de fuerza obtenidas con limadura de hierro.

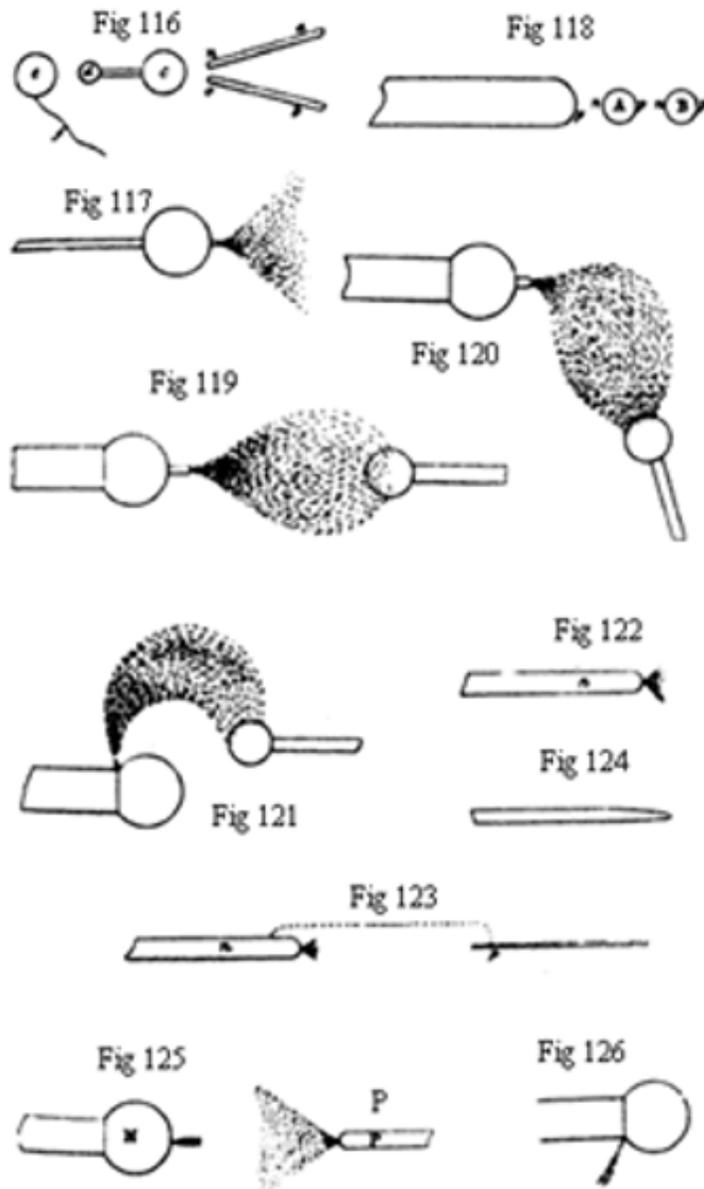


Figura F.2: Visualización de las líneas de fuerza obtenidas mediante descargas eléctricas en cepillos

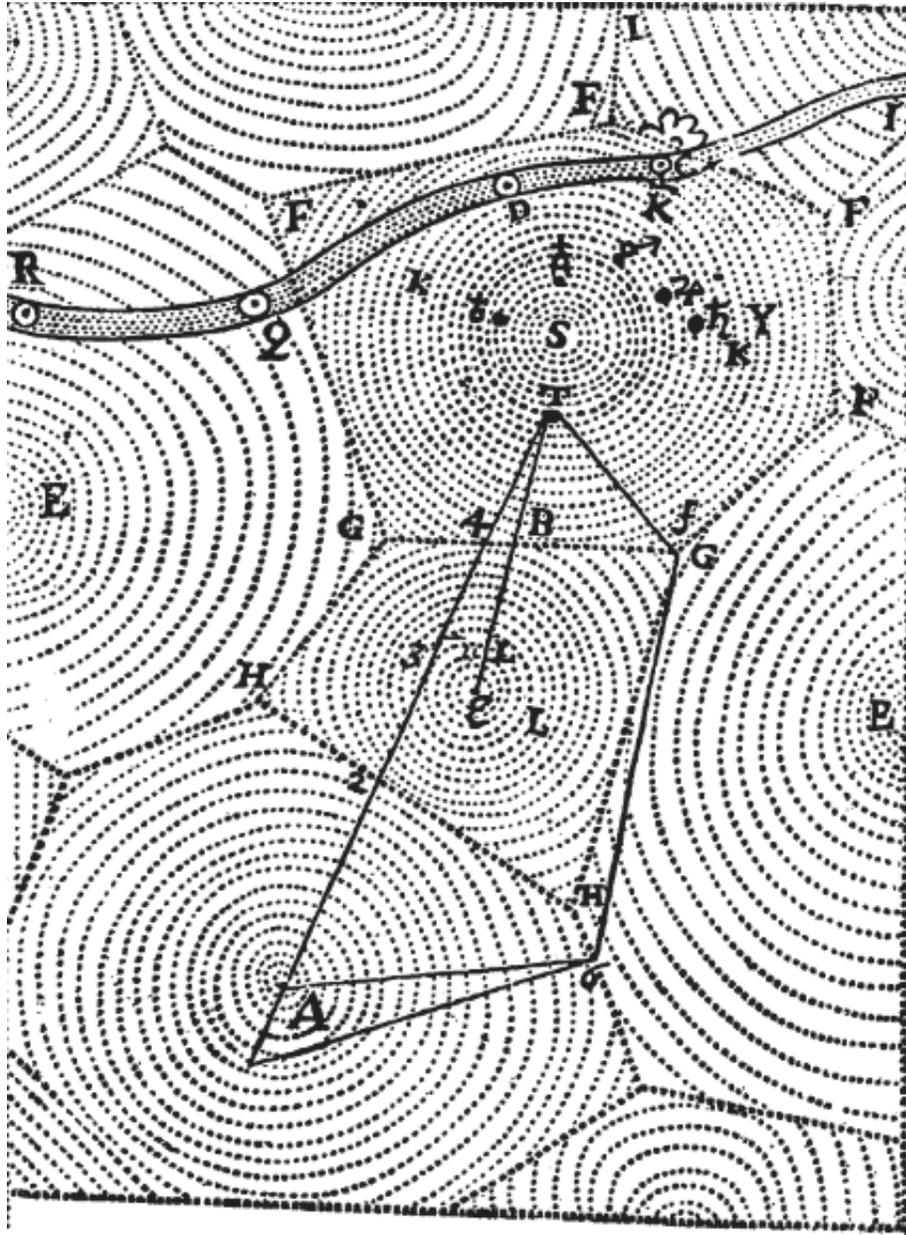


Figura F.3: Vórtices cartesianos de éter

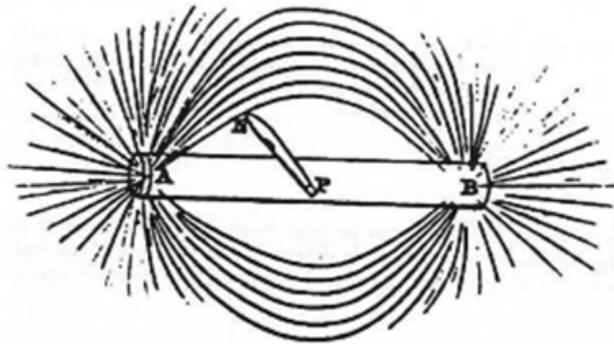


Figura F.4: Dibujo de las líneas de fuerza alrededor de un imán publicado por Faraday en 1831

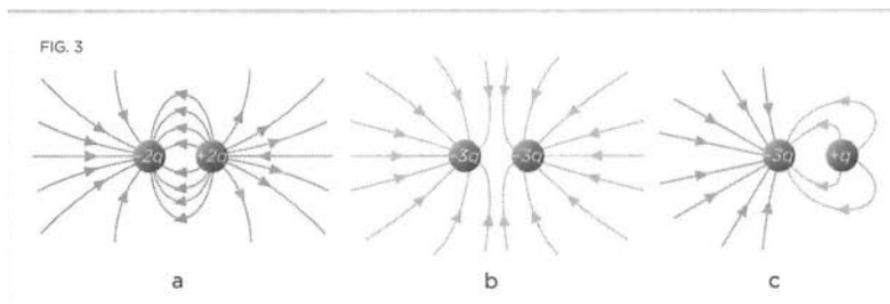


Figura F.5: Líneas de fuerza producidas por *a)* Cargas iguales de signo contrario. *b)* Cargas iguales de igual signo. *c)* Cargas de diferente valor y signo contrario



Figura F.6: Hans Cristian Oersted realizando una demostración de su experimento

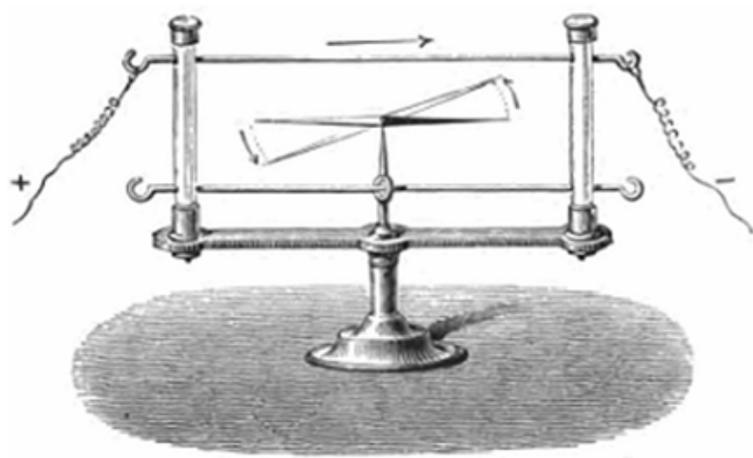


Figura F.7: Un experimento aparentemente sencillo



Figura F.8: Faraday pronunciando una de sus conferencias juveniles de navidad en la Royal Institution en 1856

Apéndice G

¿Quién ha pedido eso?

¹ El legado científico y tecnológico de la teoría electromagnética de Maxwell es incuestionable. A nivel teórico el desarrollo del electromagnetismo representó un avance teórico comparable al realizado por la mecánica de Newton, pues representó la unificación de tres fenómenos físicos en una sola teoría: la electricidad, el magnetismo y la luz. De hecho, en la historia de la física a dicha unificación se le llama la *segunda gran unificación*, pues la primera se le llama a la unificación de la física terrestre con la física celeste realizada por Newton en el siglo XVII.

A nivel tecnológico, industrial y de desarrollo, representa algo como (aunque quizás más) la revolución que suscitó la máquina de vapor inventada por el químico e ingeniero escocés *James Watt* (1736-1819) y que se llamó *la revolución industrial*. Es que, comenzando por las ondas electromagnéticas, llamadas también ondas hertzianas, llamadas así en honor al físico alemán *Heinrich Rudolf Hertz* (1857-1894) quien las descubrió, que permitieron el desarrollo de la radio y la telefonía, ninguna persona puede negar haber sido tocado por Maxwell.

Pero, ¿cómo consiguió Maxwell desarrollar su teoría? Así lo describe

¹Isidor Isaac Rabi (1898 - 1988) ante el descubrimiento del *muon*. Citado en Lederman Leon, Dick Teresi. La partícula divina. Si el universo es la respuesta, ¿cuál es la pregunta? Editorial Crítica. Barcelona. 2004.

el propio Maxwell en su trabajo de 1861, *Sobre las líneas físicas de fuerza*:

*Me propongo ahora examinar los fenómenos magnéticos desde un punto de vista mecánico y determinar qué tensiones o movimientos de un medio son capaces de producir los fenómenos mecánicos observados. Si, por la misma hipótesis, podemos conectar los fenómenos de atracción magnética con los fenómenos electromagnéticos y con los de las corrientes inducidas, habremos encontrado una teoría que, si no es cierta, sólo se puede demostrar que es errónea mediante la experimentación que ampliará enormemente nuestro conocimiento de esta parte de la física.*³ (J. C. Maxwell. *On physical lines of force*. En, *The scientific papers of James Clerk Maxwell*. Dover Publications, inc., New York. 1965).

Y, en carta dirigida a Thomson en diciembre de 1861, escribe:

Supongo que el “medio magnético” está dividido en partes pequeñas o células, estando compuestas las divisiones o células-paredes de un solo estrato de partículas, siendo estas partículas “electricidad”. Supongo que la sustancia de las células es altamente elástica tanto respecto a la compresión como a la distorsión, y que la conexión entre las células y las partículas en las paredes de las células es tal que la rodadura es perfecta, sin que se produzca deslizamiento entre ellas, y que actúan entre si tangencialmente. (Sánchez Ron, José Manuel. *Cartas Científica. La historia de la ciencia a través del intercambio epistolar. Temas. Investigación y Ciencia. 1er trimestre 202. No.103.*)

Es que Maxwell fiel al pensamiento del siglo XIX creía firmemente en la validez de las leyes de la mecánica newtoniana, pero como muchos otros rechazaba la acción a distancia y para ello encontró un sustento en la teoría de las líneas físicas de fuerza de Faraday.

Pero lo curioso de esta historia, es que las ecuaciones de Maxwell, y en general toda la teoría electromagnética, devenida de un modelo mecánico (Figura A.7.1), pusiera en duda la validez de la mecánica newtoniana.

Al contener, las ecuaciones de Maxwell, la velocidad de la luz como una constante, es decir independiente del marco de referencia en que se mida, introduce inmediatamente, la existencia de un marco de referencia privilegiado donde las ecuaciones de Maxwell son válidas. O, para decirlo de una forma más formal, dicha velocidad constante implica que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo las transformaciones

galileanas.

El mundo científico, por tanto, se encontró, en el siglo XIX ante la disyuntiva, de:

1. Reconocer que las ecuaciones de Maxwell, y toda la teoría electromagnética derivada de ellas, no es válida y la mecánica sí, o
2. Reconocer que la mecánica newtoniana no es válida y el electromagnetismo sí.

La solución al dilema llegaría de la mano de Albert Einstein en 1905.

¡Pero esa es otra historia!

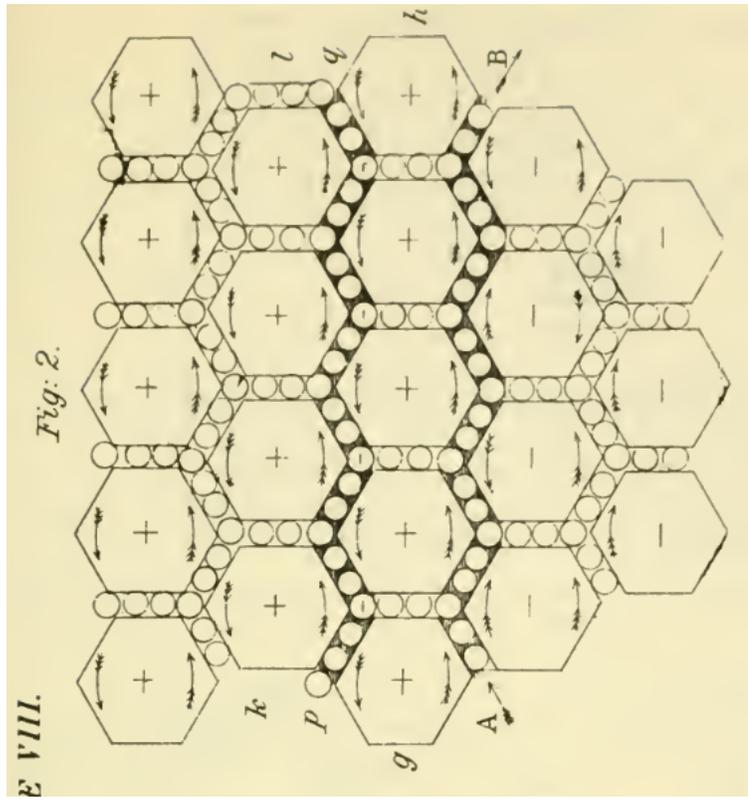


Figura G.1: Modelo mecánico utilizado por Maxwell para la formulación de su teoría electromagnética

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Bibliografía

- Beléndez, A. (2008). La unificación de luz, electricidad y magnetismo: la síntesis electromagnética de Maxwell. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 30(2), 1-20.
- Berkson, W. (1981). *Las teorías de los campos de fuerza: desde Faraday hasta Einstein* (A. editorial, Ed.). Alianza.
- Carmona, G. (1995). *Michael Faraday : un genio de física experimental* (Reimpresión, Ed.). Secretaría de Educación Pública Fondo de Cultura Económica.
- Castillo, S. (2012). *Faraday, la inducción electromagnética: ciencia de alta tensión*. RBA.
- Cheng, D. K. (1997). *Fundamentos de electromagnetismo para la ingeniería* (A. Wesley, Ed.). Iberoamericana S.A. <https://doi.org/10.26507/rei.v12n24.815>
- de cultura científica, C. (2016). Oesterd experiment.
- Díaz, J. A. A. (2004). El papel de las analogías en la creatividad de los científicos: la teoría del campo electromagnético de Maxwell como caso paradigmático de la historia de las ciencias. *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias*, 1(3), 184-204.
- Edminister, J. (1992). *Electromagnetismo* (S. Schaum, Ed.). Mc Graw Hill.
- Gómez, P., & Gonzales, E. (2012). *Las ecuaciones de Maxwell*.
- Griffiths, D., & College, R. (1999). *Introduction to electrodynamics* (P. Hall, Ed.). Prentice Hall.
- Halliday, D., Resnick, R., & Kenneth, K. S. (1999). *Física* (Continental, Ed.; Vol. 2). Continental.
- Hayt, W. H. (2006). *Teoría electromagnética* (M. Hill, Ed.). McGraw Hill.

- Jackson, J. D. (1962). *Classical electrodynamics* (J. Willey & Sons, Eds.). Jhon Willey; Sons.
- Kamal, A. (2010). *1000 solved problems in modern physics* (V. B. Heidelberg, Ed.). Springer.
- Lederman, L., & Teresi, D. (2019). *La partícula divina: Si el universo es la respuesta, ¿cuál es la pregunta?* (Crítica, Ed.). Booket.
- Mann, M. (1995). *El Quark y el jaguar : aventuras en lo simple y lo complejo* (sexta). Tusquets Editores.
- Niven, MA & FRS. (1965). *The scientific papers of james clerk maxwell* (D. publications, Ed.). General publishing company.
- Reitz, J., Frederick & Robert, C. W. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética* (A. W. Iberoamericana, Ed.). Addison Wesley Iberoamericana.
- Ron, J. M. S. (2021). *Cartas científicas: la historia de la ciencia a través del intercambio epistolar* (S. A. Prensa científica, Ed.). Prensa científica, S. A.
- Sadiku, M. O. (2003). *Elementos de electromagnetismo* (España, Ed.). Crítica.
- Serway, R., & Jewett, J. J. (2019). *Física para ciencias e ingenierías* (C. Learning, Ed.; Décima, Vol. 2). Cengage Learning.

Referencias

- Berrío, J. G. R. (2008). Fotografía de Ampere. Beléndez, Augusto - La unificación de luz, electricidad y magnetismo: la síntesis electromagnética de Maxwell. *Revista Brasileira de ensino de física*, 30(2).
- García, D., & García, C. (2005). ANNA BERTHA ROENTGEN (1833-1919): LA MUJER DETRAS DEL HOMBRE. *Revista Chilena de Radiología*, 11(4), 179-181.
- Halliday, D., Resnick, R., & Kenneth, K. S. (1999). *Física* (Continental, Ed.; Vol. 2). Continental.
- Reitz, J., Frederick & Robert, C. W. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética* (A. W. Iberoamericana, Ed.). Addison Wesley Iberoamericana.
- relema. (s.f.). [Magnetron microondas](#).
- Sanmamed, Y. (s.f.). [Redefinición de la unidad de intensidad de corriente eléctrica y su diseminación](#).
- TecnoEdu. (s.f.). [Base y bobinas de Helmholtz para el equipo e/m Pasco - SE-9626](#).
- Vásquez, J. W. O., Andrade, J. G. D., & Berrío, J. G. R. (s.f.). [Proyecto Descartes](#).
- Wikipedia. (s.f.-a). [Espectro electromagnético](#).
- Wikipedia. (s.f.-b). [Kilohertz](#).
- Wikipedia. (s.f.-c). [Velocidad de la luz](#).