01
Ed.

Modulo de Aprendizaje

CÁLCULO DIFERENCIAL

Programa de Administración de Empresas

ISBN: 978-958-5484-13-9 (digital)
ISBN: 978-958-5484-14-6 (fisico)

Universidad de la Amazonia

Modulo de aprendizaje

CÁLCULO DIFERENCIAL

Programa de Administración de Empresas

GUSTAVO SEGURA ALVAREZ

Esta obra deberá ser citada de la siguiente manera:

Segura Alvarez, Gustavo; Modulo de Aprendizaje Cálculo Diferencial. 2022.
Editorial Universidad de la Amazonia. 125 pp.

ISBN: 978-958-5484-13-9 (digital)
ISBN: 978-958-5484-14-6 (físico)

Incluye bibliografía.

© Editorial - Universidad de la Amazonia

Diagramación Karol Andres Suarez

Universidad de la Amazonia
Vigilada MinEducación

PRESENTACIÓN

Las actuales condiciones educativas exigen un cambio radical en los esquemas formativos tradicionales: en la concepción de la persona, sociedad, pedagogía y educación para el trabajo, debido a que la estructura social del nuevo siglo, exige un modelo de hombre pertinente y competente en su contexto especifico de vida.

En el contexto político y socioeconómico de hoy se hace necesario abrir nuevos caminos hacia alternativas pedagógicas innovadoras a través de la investigación; asumiendo responsablemente, nuevas propuestas encaminadas al desarrollo de las potencialidades humanas, para su transformación y por consiguiente, que aporten al desarrollo de la región y la nación.
No pretendemos definir ni delimitar a las matemáticas como un eje de conocimiento netamente tecnológico ni transformador, por el contrario partiendo de estos conocimientos se le permitirá a los estudiante llegar a los contenidos de otras asignaturas, propiciando así la interdisciplinariedad y la transversalidad propuesta como norte en el desarrollo de los programas de cada una de las áreas del conocimiento, para así construir una convergencia de saberes y no de personas en un proceso que le permitirá al docente y al estudiante comprender de manera efectiva cuál es su papel activo en el proceso de enseñanza aprendizaje dentro de la Universidad. De tal forma que nos proponemos resolver:

¿Cómo desarrollar la capacidad de análisis, de lectura de la realidad natural, social, laboral, profesional y cultural, estableciendo relaciones entre los fenómenos observados y la construcción simbólica de hipótesis, de tal forma que las pueda comunicar de forma clara y sencilla?
Desde el enfoque del Calculo Diferencial se busca que el acceso al conocimiento se haga desde una experiencia viva y no desde una simple teorización de los métodos y conceptos del currículo. Esto se adquiere a través de la transversalidad de las teorías comunes con otros ejes de formación; buscando así desarrollar competencias básicas, entendida esta como la capacidad para hacer uso creativo de los conocimiento adquiridos en el aula y fuera de ella; en otras palabras, que el estudiante desarrolle la capacidad de análisis, de lectura de la realidad natural, social y cultural, estableciendo relaciones entre los fenómenos observados y la construcción de hipótesis que las pueda comunicar de forma clara y sencilla.

Es por esto que el desarrollo del pensamiento Matemático le permite al ser humano trabajar sobre realidades cuantificables, proponer y resolver problemas numéricos de la vida diaria, transformándolos en decisiones que hacen de la formación profesional en ejercicio práctico con un nivel de certeza adecuado. El interactuar con realidades cuantificables y llegar a simbolizarlas matemáticamente en una acción que contribuye notoriamente a que el alumno desarrolle progresivamente niveles de pensamiento formal.
Pero el aprendizaje de la matemática consiste en mucho más que cuantificar y simbolizar realidades. Este conocimiento lógico debe ser puesto en práctica en la resolución de problemas

cotidianos donde la matemática adquiere una gran significación.

Esta puesta en práctica requiere del desarrollo de una serie de competencias que le son propias de la matemática. La seriación, la observación, la operatividad, la comparación, la agrupación, la clasificación, la cuantificación, la comprensión simbólica, la interpretación de relaciones lógicas, son entre otras algunas de las competencias básicas necesarias para la resolución de problemas.

Sabemos que los programas suelen ser muy extensos, pero el punto de mira del módulo ha de ser el llevar al alumno a defenderse cotidianamente en la realidad del cálculo y del número, con suficiente dominio matemático que hace parte del desarrollo de la inteligencia.

El cálculo diferencial es una de las herramientas matemáticas más importantes e indispensables en el desarrollo de las disciplinas científicas, este entrega las bases para el trabajo con cálculo variacional y es punto de partida para generar todos los conceptos pertinentes al cálculo en general, es además una herramienta útil para la optimización de recursos y análisis de gráficas y funciones en problemas propios del sector económico y estudio de razón de cambio en problemas propios del área las matemáticas.

El Cálculo Diferencial se relaciona con otras áreas de conocimiento como, Administración, Economía y finanzas, Gerencia del talento humano, Telecomunicaciones, Administración de la producción, Planeación estratégica, Topografía, Medicina, Investigación Operativa. La articulación Permite el desarrollo cognitivo como resultado de la acción recíproca entre estas áreas y permite la adquisición de procedimientos eficaces para el aprendizaje y orientación en los estudiantes de una búsqueda en la apropiación de estrategias adecuadas para encontrar la aplicación del conocimiento.

El módulo es una Estrategia de Aprendizaje del Cálculo Diferencial, que busca el desarrollo del razonamiento matemático algorítmico necesario para la planificación y toma de decisiones, lo mismo que la apropiación de herramientas tecnológicas necesarias, para los procesos de formación y aprendizaje del programa.

Para el estudio del módulo con un nivel de aprovechamiento óptimo, es necesario la implementación de estrategias de demostración práctica como el apoyo de software educativos de libre uso como es el derive y el geogebra, el cual puede ser copiado e instalado en el computador que disponga el estudiante en su casa o trabajo.

El contenido temario del módulo, abarca los elementos principales del cálculo diferencial, a más del desarrollo y demostración de teoremas, leyes, que son importantes para que el estudiante analice la deducción, se presenta también las aplicaciones que guardan relación con el sector económico y con otras ciencias donde el estudiante identificara aquellas situaciones problemáticas que requieren del análisis matemático como herramienta para su resolución.

Es importante señalar que cada unidad cuenta con ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, indicando en cada tema la estrategia de aprendizaje que se puede utilizar para abordar dichos contenidos.

INTRODUCCIÓN

El avance incesante de la sociedad en un mundo globalizado[1], requiere cada vez más de hombres y mujeres, que más allá de poseer un acervo de conocimientos y valores, posean un desarrollo de todas sus potencialidades que les permitan convertirse en entes productivos de la sociedad y por ende en generadores del proceso de la misma.

Durante el aprendizaje de Cálculo Diferencial, los alumnos estudian conceptos matemáticos, teoremas algoritmos, definiciones, y varias estrategias que son utilizadas para resolver problemas. Se considera que la resolución de problemas es un componente necesario del proceso de la enseñanza - aprendizaje de Cálculo Diferencial aplicados al sector productivo y económico.

Este factor se torna en un componente importante relacionado con el éxito del estudio de las mismas, puesto que el propósito central de la investigación educativa es que los alumnos se conviertan en aprendices exitosos, así como pensadores críticos y planificadores activos de su propio aprendizaje, se asume que la resolución de problemas hará que el estudiante vea la necesidad de fortalecer más sus conocimientos, para poder enfrentar retos cada vez más difíciles, porque modelar una función en cualquier nivel de las matemáticas, o en otras asignaturas requiere de habilidades creadoras que muchas veces no afloran, sino es con la práctica, por eso es muy importante estructurar bien los conocimientos en los planos conceptual, reflexivo y práctico.

La enseñanza de Cálculo Diferencial a nivel universitario, con la actual reforma curricular, la educación tiende al desarrollo de competencias, que es la demostración de lo que el estudiante puede hacer bajo un cierto grado de profundidad y sujeto a estándares que faciliten la comprobación de dichos conocimientos, habilidades y actitudes; por tal razón el presente modulo está encaminado a la consecución de objetivos que permitan el estudio de las estrategias, que implementadas adecuadamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, permitan un desarrollo óptimo e integral del estudiante en el ámbito educativo, lo cual permitirá además que el docente pase de una faceta como facilitador del conocimiento, a una nueva, de organizador de actividades académicas por medio de la implementación de una metodología didáctica.

Cálculo Deferencial, es una de las asignaturas que coadyuvan al logro de los objetivos perse-

---

1 *Texto tomado de Trabajo de Grado para Optar el Grado de Magíster en Educación Superior de Hidalgo Estrella Marco Vinicio. http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/*

guidos por la actual reforma curricular, pues permite al estudiante, desarrollar el pensamiento lógico y crítico para interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana.

El aprendizaje de Cálculo Diferencial, no es solo la memorización de operaciones o propiedades, de axiomas, teoremas o formulas; es el desarrollo consciente de algoritmos que elevan la capacidad de razonamiento lógico formal en la persona, lo que lleva a analizar las cosas de una forma diferente y por tal razón a buscar soluciones diferentes. Con lo cual se presenta a la asignatura, bajo un nuevo paradigma educativo, como aquello que permite el desarrollo y adquisición de nuevas habilidades y competencias, permitiendo a la persona su desenvolvimiento eficiente, integral y competitivo en la sociedad actual.

Desde este punto de vista, entonces, la elaboración de un módulo referente a las estrategias de enseñanza – aprendizaje utilizado para el mejoramiento del rendimiento académico del estudiante, se presenta como una propuesta, mismo que se fundamentó, bajo los lineamientos de los actuales modelos y teorías pedagógicas, implementadas en la Educación Superior en la cual se está incorporando a un modelo educativo por competencias.

Investigar un problema, es buscar una solución que beneficie no solo a una persona, sino a la sociedad en sí misma. Es por tal razón que la presente propuesta nace como una respuesta a la problemática que encierra el sector educativo del país y de manera muy particular a la Educación Superior.

En la universidad de la Amazonia en la cual se desarrollara el módulo teniendo en cuanta los estudios pertinentes, se pudo constatar la incidencia significativa que tiene, las estrategias de aprendizaje, en el rendimiento académico de los estudiantes de Segundo Semestre de Administración de Empresas; motivo por el cual se ha decidido , la elaboración de una propuesta de solución , que maneje dicha temática, orientada a fortalecer y fomentar una visión diferente de la Cálculo Diferencial, tanto en el tratamiento de los contenidos, como en la forma de brindar dicho conocimiento en el aula de clase.

La Universidad la Amazonia, es una Institución Superior que pretender formar profesionales competentes, que permitan su inserción en un mundo competitivo, de forma responsable y constructivista; lo cual únicamente se logrará, cuando el conocimiento que el estudiante adquiere , sea significativo para este; tendiendo así, a la consecución de los objetivos y pilares de la educación superior Colombiana que se fundamenta en formar académicos y profesionales responsables con conciencia ética y solidaria capaces de contribuir al desarrollo de las instituciones del país, a la vigencia del orden democrático y a estimular la participación social, además el conocer , el saber , el ser, el hacer y el aprender vivir juntos; propendiendo adicionalmente al cumplimiento de los objetivos del Cálculo Diferencial en si misma; asignatura que pretende, desarrollar el pensamiento lógico y crítico para interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana.

La presente propuesta se pretende desarrollar como un medio en el cual el docente de la asignatura de Cálculo Diferencial de la Universidad de la Amazonia pueda conocer las estrategias que permitan el mejoramiento del aprendizaje del estudiante y por ende, contribuya el mejoramiento del rendimiento académico del mismo. En esta propuesta el docente encontrará un tratamiento al Cálculo Diferencial; desde el punto de vista estratégico, pues estos les permite al estudiante realizar una selección y reflexión, previo a la aplicación y resolución de límites y derivadas en el campo productivo o económico, o cualquiera fuese el caso que se presente.

TABLA DE CONTENIDO

OBJETIVOS

Objetivo General

Proponer un manual sobre estrategias magistrales, grupales e individuales utilizadas como medio para la enseñanza del Cálculo Diferencial, que permita mejorar el aprendizaje y rendimiento académico de los estudiantes del segundo semestre de Administración de Empresas de la Universidad de la Amazonia

Objetivos Específicos

1. Seleccionar las estrategias magistral, grupal e individual que permitan un aprendizaje más activo de la asignatura de Cálculo Diferencial.

2. Elaborar el marco conceptual y metodológico de la propuesta didáctica en la enseñanza y aprendizaje del Calculo Diferencial.

3. Dar a conocer a los docentes que orientan el Cálculo diferencial en la Universidad de la Amazonia la utilización adecuada y pertinente de una metodología didáctica, activa y constructiva, a través de la implementación y empleo de estrategias magistrales, grupales e individuales en el proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Diferencial

4. Lograr a través de la implementación y utilización de estrategias magistrales, grupales e individuales el mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes de segundo semestre del programa de Administración de Empresas de la Universidad de la Amazonia, en la asignatura de Cálculo Diferencial.

CAPÍTULO 1

1 FUNDAMENTACÍON CIENTÍFICA[2]

En vista de que la presente propuesta es en sí una innovación curricular, requiere el debido sustento en ciertos principios de carácter general del pensamiento humano y social; es decir, requiere una fundamentación que permita su ubicación en un determinado contexto, es así que a continuación se presenta los fundamentos: Filosófico, Sociológico, Psicológico y Pedagógico.

1.1. Fundamento Filosófico

Esta propuesta alternativa pretende contribuir a la consecución de los fines y objetivos de la educación superior, así como también a la facilitación del logro de los objetivos Institucionales de la Universidad, al cumplimiento de su visión, misión y el sostenimiento del bien ganado prestigio institucional.

Se enmarca el materialismo dialéctico e histórico, que integra al individuo con la sociedad, toma en cuenta su historicidad y permite colocar al ser humano en su medio social, político y económico, con la convicción de que la actividad humana transcurre en dicho medio social, en activa interacción e intercomunicación. El estudio de cualquier fenómeno social y especialmente del ser humano como elemento esencial, es imposible realizarlo desconociendo su historia.

Desconocer la historia del fenómeno, tomarle aisladamente, significa descontextualizarlo y ello no nos permite llegar a conocer su esencia. El proceso de desarrollo de cada individuo no puede realizarse descontextualizada menté, desconociendo la historia individual de su desarrollo, en las condiciones concretas de su medio, de la dinámica que en él se produce y de su tiempo.

1.2. Fundamento Sociológico

El análisis de los fenómenos tomados fuera de su contexto histórico, nos conduce a considerarlos como equivalentes, idénticos e iguales a otros realmente distintos y diferentes.

Toda actividad se desarrolla en un medio de interacción social, con otras personas, colaborando y comunicándose, de ahí la importancia del lenguaje y el trabajo como proceso eminentemente sociales. El desarrollo histórico es el desarrollo de la sociedad humana, todo lo cultural es por su naturaleza, un fenómeno histórico. Un aspecto esencial que se considera en la ideas de Vigosky es lo que se llama “el principio de historicismo” o de la explicación de los hechos y fenómenos del desarrollo del ser humano como ser social, por ello introduce la perspectiva histórica en la investigación psicológica.

La finalidad de las instituciones superiores, como parte del todo social es la transformación de la sociedad en función de los intereses nacionales, para ello es

[2] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

necesario garantizar una buena enseñanza, con conocimientos científicos, métodos que capaciten al ser humano para interpretar a realidad y sus funciones, esto garantizara el pleno desarrollo social.

1.3. Fundamento Psicológico

De forma general Vigosky formula la ley de genética del desarrollo cultural; "cualquier función en el desarrollo cultural de niño aparece en escena dos veces, en dos planos. Primero como algo social, después como algo psicológico; primero entre la gente como una categoría intersìquica, después dentro del niño como categoría intersìquica".

El pensamiento surge cuando el sujeto se enfrenta a un conflicto originado en su actividad precedente. El enfoque histórico cultural se centra en el desarrollo integral de la personalidad en tanto sus raíces socio históricas y cuando su estructura científica, siguiendo los caminos de la comunicación, la acción y los procesos consientes de la persona como comunicación social.

1.4. Fundamentación Pedagógica

En los procesos de enseñanza – aprendizaje, la educación a de partir del desarrollo ya alcanzado del sujeto proyectándolo hacia lo que debe lograr en el futuro, es decir, hacer realidad las posibilidades que expresan en la llamada zona de desarrollo próximo.

La situación social en que las personas viven o se desarrollan constituye el elemento esencial en la organización y dirección del proceso enseñanza – aprendizaje y educación. La propia actividad que el sujeto realiza en interacción social con un grupo de personas, resultan elementos fundamentales a considerarse en el proceso de enseñanza y educación. En el proceso de interacción y actividad en colaboración con otros, ocurre el proceso de apropiación de los valores de la cultura material y espiritual, si la cultura representa para cada sujeto, un momento histórico determinado, la formación personal responde a las características históricas y socialmente intencionadas. Sobre la base de estos preceptos generales pueden considerarse las particularidades de un proceso educativo que promueva el desarrollo y formación de la personalidad, considerando el aspecto socio cultural.

1.5. Fundamento Axiológico

La educación Colombiana propende a la práctica, fomento, desarrollo y preservación de valores que permitan la adecuada convivencia en la sociedad sin amenazas ni sobresaltos. Los docentes deben actuar contribuyendo a la formación de valores en sus estudiantes para lo cual se deberá relacionar toda la vida de la escuela a los valores. El docente deberá fusionar los valores que este pretende cultivar en sus estudiantes, implementándolos en cada una de las actividades que ellos realicen en el salón de clase pues nada mejor que el ejemplo y la acción para impulsarlos.

Para la fomentación de valores en los estudiantes se requiere del cambio en la actitud pedagógica y metodológica de los docentes, que deben constituirse en entes activos, comprometidos en la misma dirección. La educación recibida en una institución educativa superior debe promover el deseo de saber, de conocer e investigar el mundo y los fenómenos por sus causas; la formación de personas sensibles ante estímulos de carácter social, de humanizar a la niñez y juventud, se debe despertar el amor por la patria y fundamentalmente a su ética profesional, la defensa de la interculturalidad y la democracia con respeto y tolerancia.

CAPÍTULO 2

2 ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE[3]

2.1. Estrategia Magistral[4]: Las estrategias de aprendizaje son las combinaciones de métodos de enseñanza, medios, materiales, técnicas, contenidos, organizados en actividades de aprendizaje para facilitar el logro de los contenidos propuestos. Dichas actividades se desarrollan en función de los objetivos, las circunstancias propias del grupo, las experiencias y las diferencias individuales. De ahí la importancia de asesorar al alumno para que seleccione y desarrolle adecuadamente las estrategias de aprendizaje y obtenga de ellas resultados óptimos, al respecto Solis González Y; Zilberstein Toruncha, (2005). Manifiestan.

Las estrategias de aprendizaje son procedimientos que deben enseñarse de manera explícita en el contexto de las asignaturas que forman parte del currículo; las mismas permiten que los estudiantes sean más autónomos en su aprendizaje, regulen sus esfuerzos y tareas, elevando así su papel protagónico y propiciando el que aprendan a aprender. (p.124)

Se concluye entonces que la estrategia de aprendizaje en el campo instruccional es la habilidad para dirigir de forma consciente y organizada la actividad y proceso educativo, tendiente al logro de metas de aprendizaje por parte del estudiante. Partiendo de estas "regularidades" puede aproximarse a una definición conceptual del término estrategia de aprendizaje (Armas Velasco C. B. 2006).

i. **Modalidad: Demostración:** Es la presentación de la secuencia de pasos a seguir para la resolución de un problema, la demostración de un teorema o axioma matemático o simplemente la manipulación de un determinado artefacto o herramienta

ii. **Objetivos:**

1. Seguir a adecuadamente los pasos para un determinado problema o la demostración de un teorema o axioma.
2. Realizar la demostración práctica con la aplicación de la tecnología.
3. Aplicar los conocimientos adquiridos en otras asignaturas a la demostración de contenidos matemáticos aprendidos en clase.
4. Dar a conocer el cómo y el porqué de la aplicación de cada uno de los pasos en la demostración práctica.
5. Hacer de la clase matemática una actividad más atractiva amena e interactiva.

---

[3] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

[4] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

iii. Metodología

- Realice una explicación rápida y concreta de lo que se quiere demostrar.
- Inicie la actividad indicando las ideas principales de la demostración.
- Sintetice los conocimientos que el estudiante debe poseer para iniciar el trabajo.
- Realice la actividad, procurando dar atención a las inquietudes de los estudiantes.
- Una vez terminada la demostración, pida a sus estudiantes que realicen la actividad y evalúela.
- Al utilizar la tecnología, se puede evaluar de una forma diferente a la habitual.

iv. Recomendaciones.

- ❖ Planifique la actividad con debida antelación, para que los resultados a obtener sean los deseados.
- ❖ Tenga en consideración que los aparatos tecnológicos deben encontrarse en óptimas condicione.
- ❖ Prevea el tiempo ideal, procurando no dejar la demostración para el día siguiente.
- ❖ Realice la demostración con términos que el estudiante comprenda de forma clara y sencilla.
- ❖ No obvie pasos, en la demostración pues los estudiantes están aprendiendo un nuevo procedimiento.

2.2. Estrategia Grupal[5]: La estrategia grupal proporciona al estudiante un ambiente de participación intensa y promueve el trabajo colaborativo y mancomunado con los otros miembros del salón de clase. Permite la expresión y el intercambio de criterios, juicios, ideas, opiniones, fortaleciendo además el respeto y la tolerancia hacia la forma de actuar y pensar de los demás. Estas estrategias utilizadas de forma adecuada permite la mejora en la administración del salón de clase. Son acciones coordinas por el profesor, con la finalidad de hacer activa la clase y que el aprendizaje sede de manera natural.

Las técnicas grupales fortalecen el aprendizaje de los alumnos, puesto que construyen conocimientos, las aportaciones de cada miembro del equipo son válidas, emplean su ingenio y creatividad, así como también se fortalece la interacción por el contacto que tiene el alumno con sus compañeros y les crea un sentido de pertenencia, pues el alumno se siente parte del grupo y es aceptado como tal. (María Esther Ocaña)

[5] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

i. **Taller:** Se inició como un seminario o colegio de ciencias donde se reunía un grupo de estudiosos para la enseñanza común. El taller puede definirse como un grupo de personas que trabajan teóricamente y prácticamente para resolver un problema concreto.

A. Ventajas

- Admite grupos de 10 a 30 alumnos que faciliten la interacción en lapsos de corta duración y de trabajo intenso.
- Admite la combinación de técnicas didácticas que proporcionan el conocimiento a través de la acción.
- En este se elabora un producto que puede ser indistintamente un sistema, un instrumento o una estrategia, pero que necesariamente debe ser evaluable, útil y aplicable.
- Se adapta a las necesidades de los estudiantes.

B. Metodología:

- Se selecciona el tema de trabajo y al profesor(o profesores) del grupo, quienes deben ser expertos en dicho campo. Se subdivide al grupo en grupos pequeños que no excedan 6.
- Los profesores preparan el programa: Al inicio del taller, el profesor explica al grupo la forma en que se determine trabajar y se explica que el únicamente dirigirá la actividad, pero que el verdadero aprendizaje es responsabilidad de cada participante. Se sugiere que en cada mesa se seleccione, entre ellos mismos, un líder, quien coordinará el trabajo, y que será substituido al terminar cada actividad.
- Para cada subtema, el profesor explica las tareas específicas a realizar por cada mesa, y que se espera que se elabore después de "x" cantidad de tiempo.
- El profesor permanece para orientar y resolver dudas. Transcurrido dicho tiempo, se pasa a un miembro de cada mesa a que exponga su trabajo. Después de que los representantes de cada mesa han hecho su exposición, se obtiene conclusiones acerca del subtema.

C. Sugerencias

- Es indispensable que los productos sean evaluados con las técnicas de evaluación de proyectos.
- El objeto más inmediato será que los miembros alcancen una formulación teórica del problema, debe existir una orientación en todas las tareas y dinamismo por parte del coordinador.

2.2.1. Equipos de Trabajo: Es un grupo reducido de alumnos que realizan un trabajo en clase. Los trabajos pueden ser: ejercicios de repetición, comprensión, análisis, síntesis .El final del trabajo propuesto debe consistir en una exposición o información a toda la clase de todo cuanto se ha realizado

I. Objetivos

- Estimular el estudio, la investigación, la creatividad, el compañerismo, la búsqueda bibliográfica y la recopilación de datos.
- Enriquecer la cooperación entre los miembros del grupo
- Proporcionar la oportunidad de expresión y desenvoltura

II. Metodología

- Dar una orientación general sobre la forma de ejecutar el trabajo y el interés del mismo.
- Forme los grupos considerando su ritmo de trabajo, espontaneidad y simpatía.
- Cada equipo debe proveerse de los útiles necesarios
- El equipo expone, a la clase, lo realizado con la participación de todos los integrantes.
- En los grupos diferenciados el coordinador del grupo expone a la clase lo realizado mediante un esquema general, luego, cada componente ayuda a este informe desarrollado la parte indicada con la ayuda de los demás (unos muestra los gráficos; otro las tablas, otro los ejercicios, etc.)
- El profesor y el resto de alumnos harán valoraciones de los trabajos llegando a conclusiones y síntesis

III. Sugerencias

- Planifique la actividad con debida antelación, para que los resultados a obtener sean los deseados.
- Desarrolle las capacidades y actitudes de los alumnos.
- Si va a utilizar aparatos tecnológicos estos deben encontrarse en óptimas condiciones.

2.3. Estrategia Individual: La estrategia individual promueve en el educando el desarrollo de un pensamiento independiente y original en la adquisición de conocimientos. Para lo cual se requiere del docente la planificación de actividades destinadas a cubrir las necesidades de cada estudiante en torno a su propio aprendizaje. De otro lado también permite al docente conocer los recursos con los cuales cuenta para su auto aprendizaje, sus limitaciones y fortalezas en el enfrentamiento de un trabajo individual, fomentando con cada actividad una mayor responsabilidad en su accionar educativo.

2.3.1. Trabajo Individual[6]: Es el estudio que realiza el alumno mediante a asignación de tareas, pueden ser de complementación para cubrir el programa instruccional diario, o de ampliación con el propósito de ampliar o enriquecer los contenidos desarrollados y analizados en el proceso enseñanza aprendizaje.

[6] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

i. Objetivos

- Identificar la relación entre los hechos aprendidos en clase y las aplicaciones en la vida diaria.
- Desarrollar hábitos de trabajo en los alumnos.
- Elaborar resúmenes, conclusiones, etc., de los contenidos elaborados en clase.
- Facilitar el desarrollo de actividades prácticas
- Conocer las deficiencias del alumno para solucionarlas a tiempo.

ii. Metodología

PROFESOR:

- Explicar claramente el contenido del trabajo.
- Anticipar dificultades, el profesor debe anticipar cualquier posible dificultad y hacer sugerencias de cómo solucionar los ejercicios o problemas.
- Supervisar al inicio
- Sugerir técnicas de estudio, el profesor sugerirá las técnicas de estudio más adecuados para los contenidos respectivos.
- Sugiera materiales, el profesor indicara donde se puede encontrar la información requerida.
- Calcular el tiempo, es importante calcular el tiempo que tomará el trabajo, considerando la extensión del mismo.
- Motivar al alumno, que es parte vital en la realización de los trabajos.

ESTUDIANTE:

- Asegurase de haber entendido el trabajo, es su responsabilidad realizar preguntas hasta comprender.
- Estudie inmediatamente, puede ser antes o después de clases.
- Utilice técnicas de estudio, según el contenido el estudiante puede utilizar las técnicas más convenientes (esquemas, mapas conceptuales)

iii. Sugerencias

- No olvide proporcionar experiencias previas, en el aula, para la realización de los trabajos.
- No permita que se pierda el tiempo por falta de información, guía adecuada, materiales, etc.
- No olvide que cuando el estudiante dedica su tiempo y esfuerzo para realizar un trabajo, lo menos que el profesor puede hacer es revisarlo.

CAPÍTULO 3

Modulo de aprendizaje
CÁLCULO DIFERENCIAL

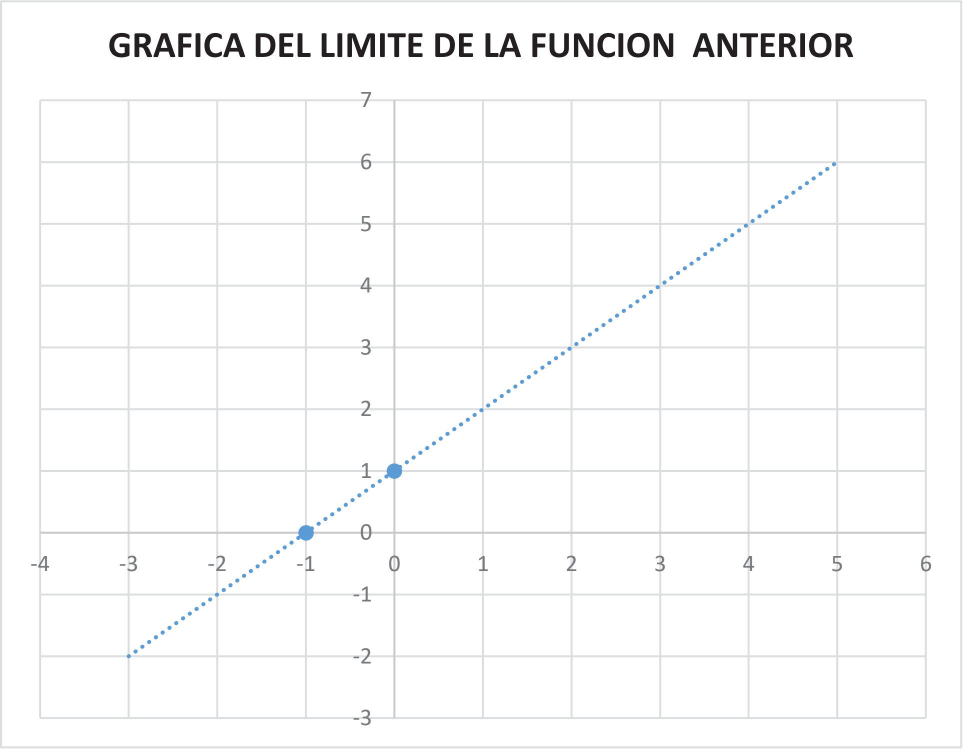
DESARROLLO DE LA TEMÁTICA

3 LIMITES DE FUNCIONES

3.1. NOCION INTUITIVA DE LÍMITE[7]

Considere la función $f_{(x)} = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales existentes excepto x = 3.
Nótese que f(3) no está definido, es decir, al evaluar 3 en la función obtendríamos $\frac{0}{0}$. Para analizar el porqué de esta situación podemos hacer un acercamiento en la función evaluándola en valores que se aproximen a 3 por la derecha y por la izquierda. La figura muestra que cuanto más se acerca x a 3, por la derecha o por la izquierda, los valores obtenidos para f(x) están acercándose más y más a 4. Por tanto decimos que, el límite de f cuando x tiende a 3 es 4. Esto se escribe.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = 4$$



[7] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

ANALICE DE LA GRAFICA ANTERIOR[8]

x	$f(x)$
2.9	3.9
2.99	3.99
2.999	3.999
↓	↓
3	?
↑	↑
3.001	4.001
3.01	4.01
3.1	4.1

Acercamiento por la izquierda

Tiende a 4

Acercamiento por la derecha

De aquí en adelante representaremos con **a** al valor al cual tiende f cuando se acerca a dicho número. De esta manera se denotará con $x \to a^-$ un acercamiento al número a por la izquierda y con $x \to a^+$ un acercamiento al número a por la derecha.

De manera que, si los límites unilaterales $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ tienen un valor común L, es decir $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Donde L es un número finito, se dice que el Lim f(x) existe y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

3.2. DEFINICIÒN DE LÍMITE

Por tanto se dice que: Si se hace un acercamiento tal que x se aproxime lo suficiente a un valor tanto por la derecha como por la izquierda, de manera que f(x) se aproxime a un número L, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Considerando nuevamente $f_{(x)} = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ para x = 3 se puede simplificar f mediante un proceso algebraico, quedando $f_{(x)} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = (x + 1)$, que al reemplazar el valor de x por tres es: 3+1 = 4

De esta manera muchas funciones pueden simplificarse, pero no siempre. Para ilustrar esto consideremos la función $f_{(x)} = \frac{\text{sen } x}{x}$, si queremos obtener el $\lim_{x \to 0} f(x)$

[8] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

no hay medio algebraico que pueda simplificar dicha función y evitar obtener una definición $\frac{0}{0}$. Por tanto, es de gran utilidad el hacer un acercamiento bilateral y obtener dicho límite, si es que existe.

La siguiente tabla muestra el acercamiento de x a 0 para $f_{(x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

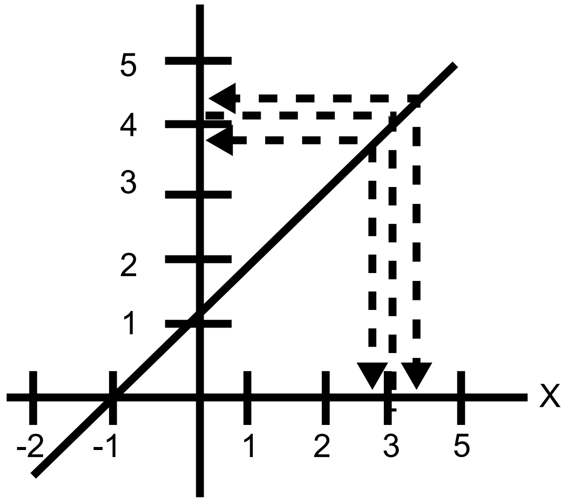
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
f(x) = $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0.99833	0.99998	0.99999	?	0.99999	0.99998	0.99833

$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ y $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Por tanto como ambos límites tienden a 1, se tiene que

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Grafica de definición de límite[9]



De esta manera podemos decir que:
La existencia del límite de una función f en un número a no depende de si f está definida en a, sino solamente si de f está definida para x cercana a a.

3.3. LIMITES LATERALES

El concepto de límite también es aplicable a funciones que están expresadas en secciones (funciones parte por parte).

Existen funciones que por la derecha de un punto tienen un comportamiento y por la izquierda del punto tienen otro comportamiento. Esto ocurre frecuentemente en funciones que tienen regla de correspondencia definida en intervalos y que su gráfica presenta un salto en un punto. Para expresar

[9] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

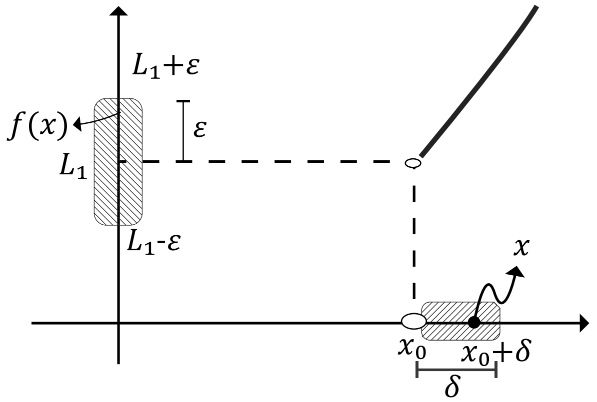
formalmente este comportamiento se hace necesario definir límites en un punto por una sola dirección.

3.3.1. LÍMITE POR DERECHA:

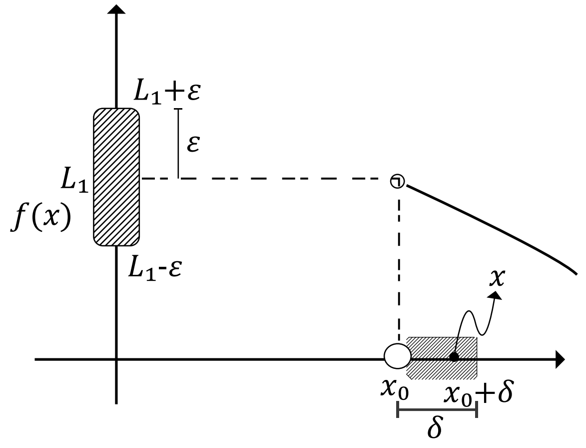
Cuando x se aproxima a tomar el valor de X_0 , pero sólo por su derecha ($X_0 < X < X_0 + \partial$), f se aproxima a tomar el valor de L_1; significa que f puede estar tan cerca de L_1 , tanto como se pretenda (∀ε), para lo cual deberá existir el correspondiente ∂, que indica el intervalo en el cual tomar x que nos garantice aquello. Es decir:

$$\left(\lim_{x \to X_0^+} f(x) = L_1\right) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \partial \text{ tal que } 0 < x - X_0 < \partial \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

UNA FUNCIÓN CRECIENTE[10] EN (X_0, ∞)



UNA FUNCIÓN DECRECIENTE[11] EN (X_0, ∞)



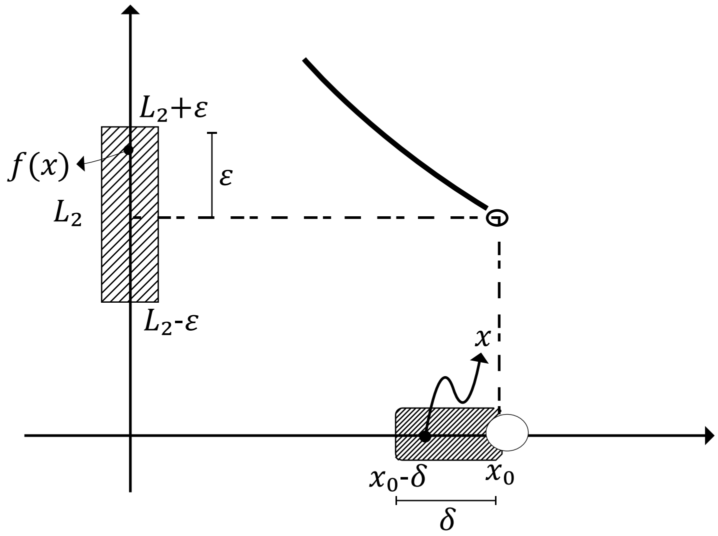
[10] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/
[11] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

3.3.2. LÍMITE POR IZQUIERDA:

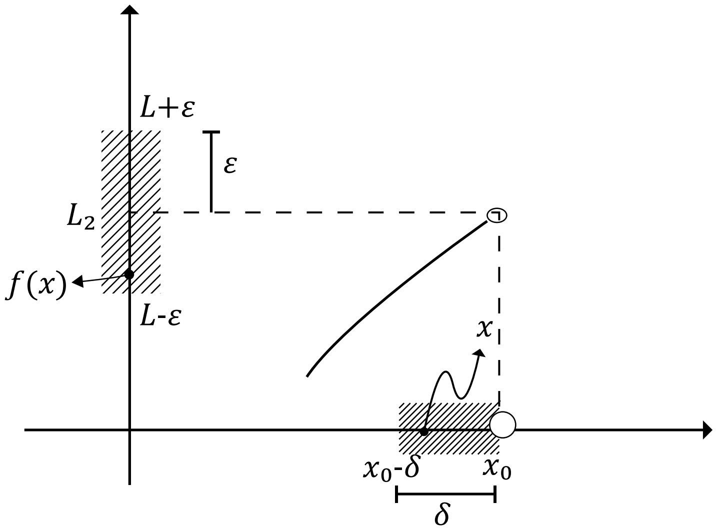
Cuando x se aproxima a tomar el valor de X_0, pero sólo por su izquierda ($X_0 - \partial < X < X_0$), f se aproxima a tomar el valor de L_2; significa que f puede estar tan cerca de L_1, tanto como se pretenda ($\forall\varepsilon$), para lo cual deberá existir el correspondiente ∂, que indica el intervalo en el cual tomar x que nos garantice aquello. Es decir:

$$\left(\lim_{x\to X_0^-} f(x) = L_2\right) \equiv \forall\varepsilon > 0, \exists\partial \text{ tal que } 0 < x - X_0 < \partial \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

UNA FUNCIÓN DECRECIENTE[12] EN (-∞ , X_0)



UNA FUNCIÓN CRECIENTE[13] EN (-∞ , X_0)



[12] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

[13] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

Note que lo que se ha hecho es no otra cosa que separar la definición de límite en un punto que fue dada al comienzo. De las definiciones anteriores y por el Teorema de Unicidad de Límite surge el siguiente teorema.
Si f es una función con límite en X_0 entonces se cumple que tanto por izquierda como por derecha f tiende a tomar el mismo valor. Es decir:

$$\left(\lim_{x\to X_0} f(x) = L\right) = \lim_{x\to X_0^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to X_0^+} f(x) = L$$

Si se da que $\lim_{x\to X_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to X_0^+} f(x)$, se dice que $\lim_{x\to X_0} f(x)$ no existe.

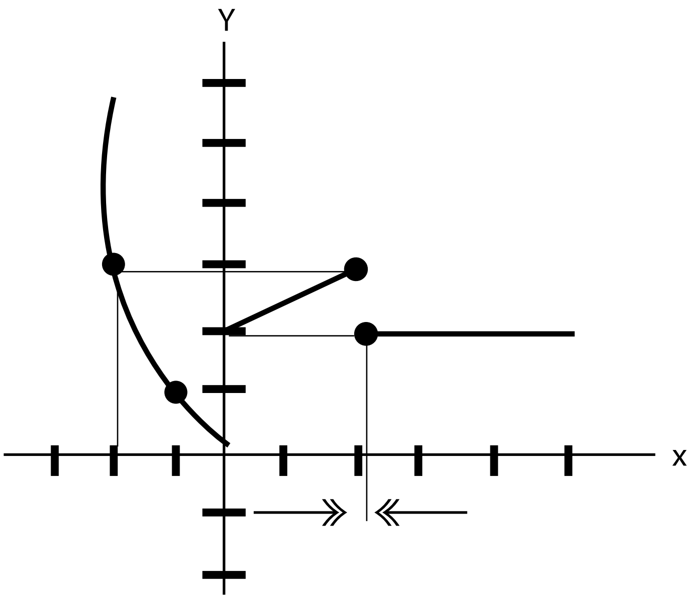
Ejemplo:
Si se considera la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \; si\; x = 0 \\ x+2, \; si\; o < x \leq 2 \\ 2, \; si\; x \geq 2 \end{cases}$$

Y se desea obtener el $\lim_{x\to 2} f(x)$

Tenemos que obtener primero el valor de los límites unilaterales y después compararlos para decir si el límite pedido existe o no y si existe expresar el valor.

GRAFICA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN A TROZOS[14]



[14] www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/

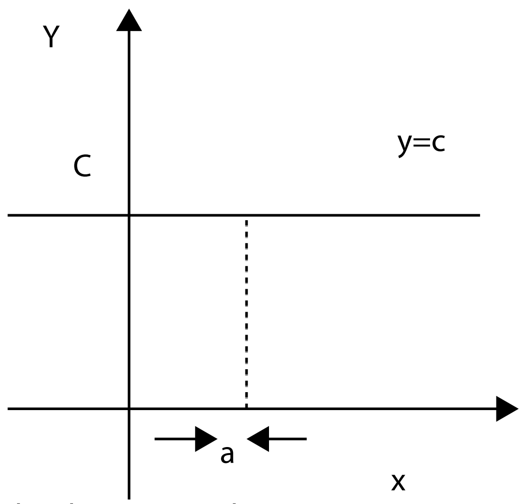
De manera que haciendo un acercamiento por la izquierda a partir de la gráfica dada (Ver fig.) tenemos que $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ = 4, mientras que del acercamiento a 2 por la derecha obtenemos $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ = 2, por lo tanto como: $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ decimos que el $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe

3.4. TEOREMAS DE LOS LÌMITES

A continuación estudiaremos los teoremas que pueden aplicarse a la obtención del límite de una función.

Si f es una función constante, existe un número real c tal que f(x)= c para todo x. La gráfica de f es la recta horizontal y= c

GRAFICA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE[15]



Es evidente que f(x) tiende a c cuando x se acerca a **a**, puesto que f(x) toma el valor de c para todo x. Por tanto:

3.4.1 Teorema 1

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Así se dice que el límite de una constante es la propia constante.

Ejemplo 1. Evaluar:

- $\lim_{x \to 5} -2$ = -2;
- $\lim_{x \to 0} 3$ = 3;
- $\lim_{x \to 4} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

[15] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

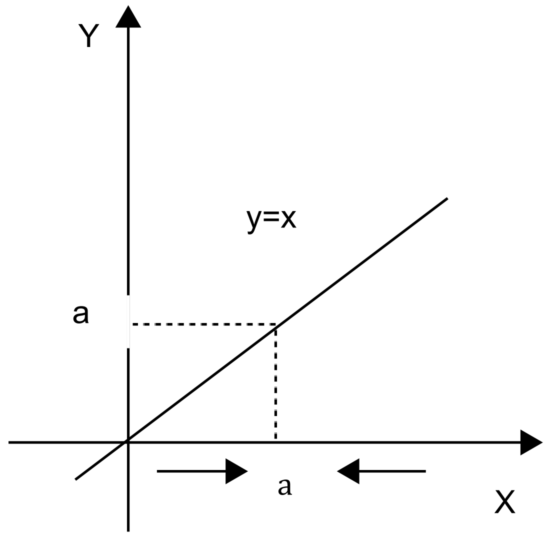
3.4.2 Teorema 2

Ahora consideremos la función lineal f dada por f(x) para todo x. La gráfica de f es la resta de y = x

De la gráfica deducimos que f(x) tiende a a. Por tanto:

$\lim_{x \to a} x = a$

GRAFICA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN LINEAL[16]



Ejemplo 2. Evaluar:

- ❖ $\lim_{x \to -2} x = -2$;
- ❖ $\lim_{x \to 0} x = 0$

3.4.3 Teorema 3

Los teoremas 1 y 2 sirven de base para la demostración de teoremas a cerca de límites que son un poco más complicados. Veamos algunos de ellos.

- ❖ Si c es una constante y f es una función, el límite del producto constante por función cuando x tiende a a, es igual al producto de la constante por el límite de la función.

Deducción: $\lim_{x \to a} [cf(x)] = \left[: \lim_{x \to a} c\right] \left[: \lim_{x \to a} f(x)\right] = cL$

Por tanto: $\lim_{x \to a} [cf(x)] = cL$

Ejemplo 3. Calcular:

- ❖ $\lim_{x \to 2} -2x = \left[\lim_{x \to 2} -2\right] \left[\lim_{x \to 2} x\right] = -2(2) = -4$

[16] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

- $\lim_{x \to 0} 3x = \left[\lim_{x \to 0} 3\right]\left[\lim_{x \to 0} x\right] = 3(0) = 0$

3.4.4 Teorema 4

Si f y g son funciones, el límite del producto de ambas cuando x tiende a a, es igual al producto de los límites de las funciones

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$

Ejemplo 4. Calcular:

$$\lim_{x \to -2} (-2x)\,(3x) = \left[\lim_{x \to -2} (-2x)\right]\left[\lim_{x \to -2} (3x)\right]$$

$= [-2(-2)][3(-2)] = (4)(-6) = -24$

3.4.5 Teorema 5

Sea f una función y n un entero positivo, entonces el límite de f con potencia n es igual al límite de f elevado a su potencia n.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

Ejemplo 5. Calcular:

- $\lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8$

- $\lim_{x \to -5} (3x-2)^2 = \left[\lim_{x \to -5} (3x-2)\right]^2$

  $= [3(-5)-2]^2 = (-15-2)^2 = (-17)^2 = 289$

3.4.6 Teorema 6

Si f y g son funciones, el límite de una suma o diferencia cuando x tiende a a es igual a la suma o diferencia de los límites de las funciones.

$$\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \pm \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$

Ejemplo 6. Calcular:

$$\lim_{x \to -1} (2x^3 - 5x) = \left[\lim_{x \to -1} (2x^3)\right] - \left[\lim_{x \to -1} (5x)\right]$$

$= [2(-1)^3] - [5(-1)] = -2 - (-5) = -2 + 5 = 3$

3.4.7 Teorema 7

Si f y g son funciones, el límite del cociente entre f y g cuando x tiende a a , será igual a cociente de los límites de las funciones; siempre y cuando el límite de la función del denominador sea diferente de cero.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \text{ si Lim } g(x) \neq 0$$

Ejemplo 7. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3-7X^2}{5-2X} = \frac{\lim_{x \to 0} (3-7X^2)}{\lim_{x \to 0} (5+2X)} = \frac{3-7(0)^2}{5+2(0)} = \frac{3-0}{5+0} = \frac{3}{5}$$

3.4.8 Teorema 8

Si f es una función, el límite de una raíz enésima de una función cuando x tiende a a es igual a la raíz enésima del límite de la función.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Ejemplo 8. Calcular:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt[2]{7 - 3x^2} = \sqrt[2]{\lim_{x \to 1} [7 - 3(1)^2]} = \sqrt[2]{7 - 3} = \sqrt[2]{4} = 2$$

El desarrollo de los ejemplos 4 al 7 puede hacerse aún más amplio si se aplican todos los teoremas dados.

Nótese que al sustituir directamente el valor al que tiende la variable independiente se obtuvo el límite buscado debido a que las funciones estuvieron totalmente simplificadas.

Si se desea obtener $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2-4}$ y se aplican la sustitución directa tenemos

$$\lim_{x \to 2} \frac{2^2 + 2 - 6}{2^2-4} = \frac{4+2-6}{4-4} = \frac{0}{0}$$

En este caso es necesario simplificar la expresión dada antes de sustituir directamente el valor al que tiende la variable, ya que el no hacerlo, da lugar a la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$. Para simplificar la expresión dada es necesario factorizar el numerador y también en este caso el denominador.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x+2} \text{, sustituimos } \lim_{x \to 2} \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{x^3-16x}{x^2+4x}$ cuando $x \to 0$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3-16x}{x^2+4x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2-16)}{x(x+4)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-4)(x+4)}{x(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to 0}(x-4) = \lim_{x \to 0}(0-4) = -4$$

2. Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ cuando $x \to 9$

Solución:

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$$

$$= \lim_{x \to 9} \sqrt{x} + 3 = \lim_{x \to 9} \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6$$

3.5. CÁLCULO DE LÍMITES.

Existen tres métodos para calcular el límite de una función, las cuales son:

3.5.1. Método numérico, en donde se basa en construir una tabla de valores.

3.5.2. Método gráfico, se basa en elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico

3.5.3. Método de racionalización: El método de racionalización consiste en multiplicar el numerador y denominador por el binomio conjugado del numerador (en este caso, pues ahí es donde se tiene la variable contenida en la raíz).

MÉTODOS GRÁFICO Y NUMÉRICO

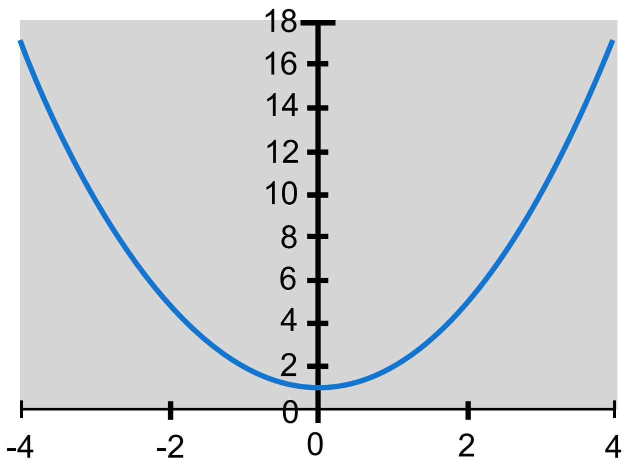
Ejemplo: $f(x) = x^2 + 1$

Límite de una función utilizando el método numérico [17]

[17] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

Acercándose a 3 por la izquierda		Acercándose a 3 por la derecha	
x	$f(x)$	**x**	$f(x)$
2.99	9.994	3.001	10.006
2.9991	9.9946	3.0009	10.0054
2.9992	9.9952	3.0008	10.0048
2.9993	9.9958	3.0007	10.0042
2.9994	9.9964	3.0006	10.0036
2.9995	9.997	3.0005	10.003
2.9996	9.9976	3.0004	10.0024
2.9997	9.9982	3.0003	10.0018
2.9998	9.9988	3.0002	10.0012
2.9999	9.9994	3.0001	10.0006

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO GRAFICO[18]



Por lo tanto el $\lim\limits_{x \to 3} x^2 + 1 = 10$

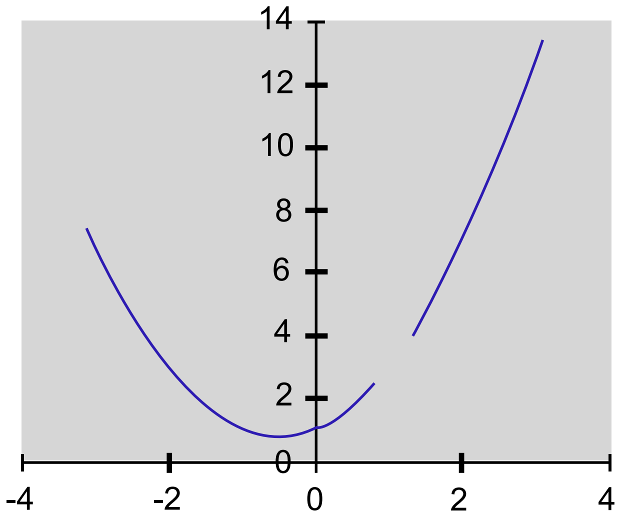
Ejemplo: $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

Límite indeterminado de una función utilizando el método numérico[19]

[18] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/
[19] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

Acercándose a 3 por la izquierda		Acercándose a 3 por la derecha	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.999	2.997	1.001	3.003
0.9991	2.9973	1.0009	3.0027
0.9992	2.9976	1.0008	3.0024
0.9993	2.9979	1.0007	3.0021
0.9994	2.9982	1.0006	3.00179
0.9995	2.9985	1.0005	3.0015
0.9996	2.9988	1.0004	3.0012
0.9997	2.9991	1.0003	3.00089
0.9998	2.9994	1.0002	3.0006
0.9999	2.9997	1.0001	3.0003

LÍMITE INDETERMINADO DE UNA FUNCIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO GRAFICO[20]



El límite es indeterminado y se emplea la factorización para quitar la indeterminación.
Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = \lim_{x\to 1}(1^2+1+1) = 1+1+1 = 3$$

[20] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

METODO DE RACIONALIZACION

Si se quiere obtener el límite de $f(x) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{3-x}$ cuando x→3, sustituyendo directamente tenemos como resultado la indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$. Para eliminar dicha indeterminación es necesario aplicar el artificio algebraico denominado

Racionalización.

Por tanto:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{3-x} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{3-x} . \frac{\sqrt{3}+\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to 3} \frac{3-x}{(3-x)(\sqrt{3}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Otros ejemplos de racionalización

a. Calcular el límite de $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{6-3x}$ cuando x→2

Solución:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-\sqrt{3x-2}}{6-3x} = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{6-3x} . \frac{2+\sqrt{3x-2}}{2+\sqrt{3x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{4-(3x-2)}{(6-3x)(2+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{6-3x}{(6-3x)(2+\sqrt{3x-2})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(2+\sqrt{3x-2})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(2+\sqrt{3(2)-2})} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

b. Calcular el límite de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$ cuando x→0

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3} . \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} = = \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+9}+3) = \lim_{x \to 0} (\sqrt{0+9}+3) = 3 + 3 = 6$$

3.6. PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LÍMITES

Ejemplo:

A Mariela, la dueña de un balneario le preocupa que en pleno fin de semana sus piscinas estén muy sucias ya que la noche anterior hizo bastante aire ocasionando que polvo y basura las ensuciara, Mariela quiere saber en qué tiempo quedarán limpias, para esto Jorge, el encargado de limpiarlas le dice que eso dependerá del tiempo que tarde en vaciarse cada una de las piscinas y se sabe (ya que él hace sus cálculos matemáticamente) que el volumen de vaciado de esas piscinas en específico, responde a la siguiente ecuación:

v = $\frac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}$ donde v es el volumen expresado en m^3 y t el tiempo en minutos. Mariela quiere las cosas demasiado rápidas (algo que casi nunca sucede) y pregunta ¿Cuál será el volumen del agua restante cuando el tiempo se aproxime a 7 minutos? De nuevo Jorge usa la matemática para contestarle a Mariela y le dice:

Calcularemos lo siguiente: $\lim\limits_{t\to 7}\frac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}$

Solución:

$$\lim_{t\to 7}\frac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}=\lim_{t\to 7}\frac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}.\frac{2+\sqrt{t-3}}{2+\sqrt{t-3}}=\lim_{t\to 7}\frac{4-(t-3)}{(t^2-49)(2+\sqrt{t-3})}=$$

$$=\lim_{t\to 7}\frac{7-t}{(t^2-49)(2+\sqrt{t-3})}=\lim_{t\to 7}\frac{-(t-7)}{(t-7)(t+7)(2+\sqrt{t-3})}=\lim_{t\to 7}\frac{-1}{(t+7)(2+\sqrt{t-3})}$$

$$=\lim_{t\to 7}\frac{-1}{(7+7)(2+\sqrt{7-3})}=\lim_{t\to 7}\frac{-1}{(14)(4)}=\frac{-1}{56}$$

Conclusión:
Cuando el tiempo se aproxima a 7 minutos el volumen del agua se aproximara a $\frac{-1}{56}$ m^3, que es un valor ya negativo, lo que nos quiere decir que en menos de 7 minutos quedará vacía la piscina. Por tanto la dueña del balneario tendrá lo que esperaba, que la piscina no tardará mucho en vaciarse.

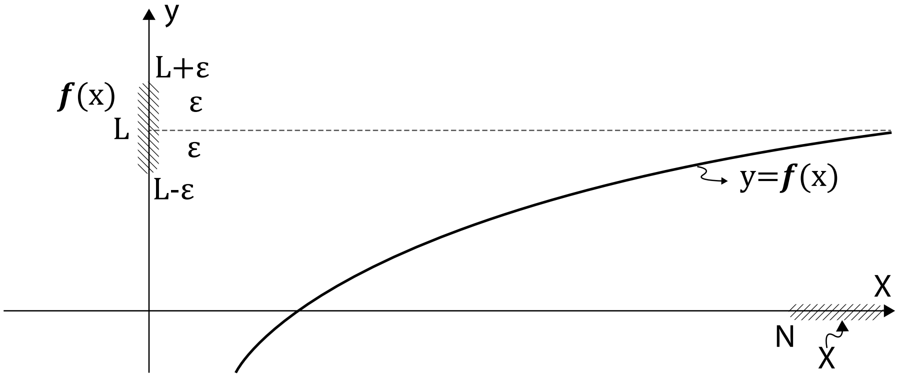
3.7. LÍMITES AL INFINITO

En ciertas ocasiones puede ser necesario estudiar el comportamiento de una función cuando la *x* toma valores muy grandes, diremos cuando *x* tiende al infinito.

i. Suponga que *f* se aproxima a tomar un valor *L* cuando la variable *x* toma valores muy grandes, este comportamiento lo escribiremos de la siguiente manera $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

EJEMPLO:

GRAFICA DEL LÍMITE AL INFINITO CRECIENTE CON VALORES MUY GRANDES[21]



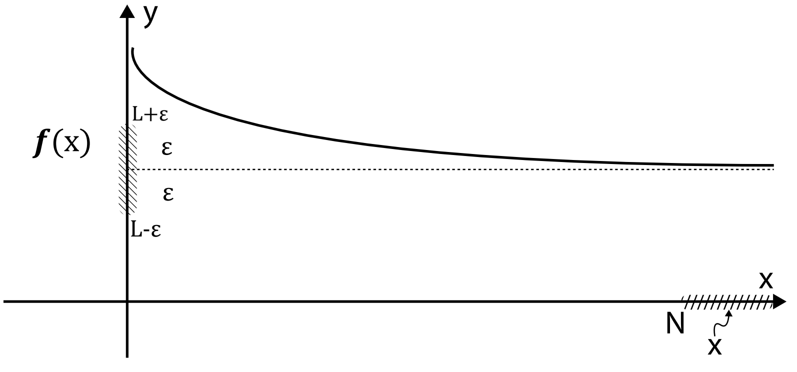
Formalmente sería:

Decir que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que *f* puede estar tan cerca de L, tanto como se pretenda estarlo ($\forall \varepsilon > 0$), para lo cual deberá poderse determinar el intervalo en el cual tomar a x, $\exists N$ (una cantidad muy grande), que lo garantice. Es decir:

$$\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = L\right) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tal que } x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

EJEMPLO:

GRAFICA DEL LÍMITE AL INFINITO DECRECIENTE CON VALORES MUY GRANDES[22]



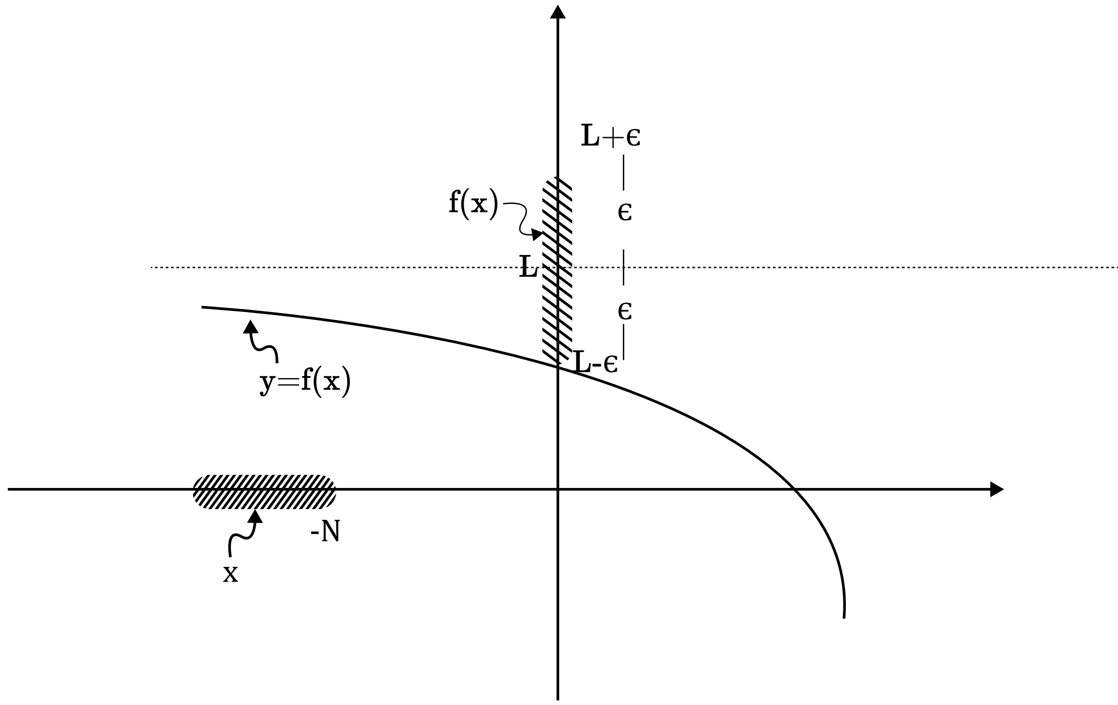
[21] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

[22] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

ii. Suponga ahora que *f* se aproxima a tomar un valor *L* cuando la *x* toma valores muy grandes, pero **NEGATIVOS**, este comportamiento lo escribiremos de la siguiente manera $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

EJEMPLO:

GRAFICA DEL LÍMITE AL INFINITO DECRECIENTE CON VALORES MUY GRANDES NEGATIVOS[23]



Formalmente sería:

Decir que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ L significa que *f* puede estar tan cerca de L, tanto como se pretenda estarlo, $\forall \varepsilon > 0$, para lo cual deberá poderse determinar el intervalo en el cual tomar a x , $\exists N$ (una cantidad muy grande), que lo garantice. Es decir:

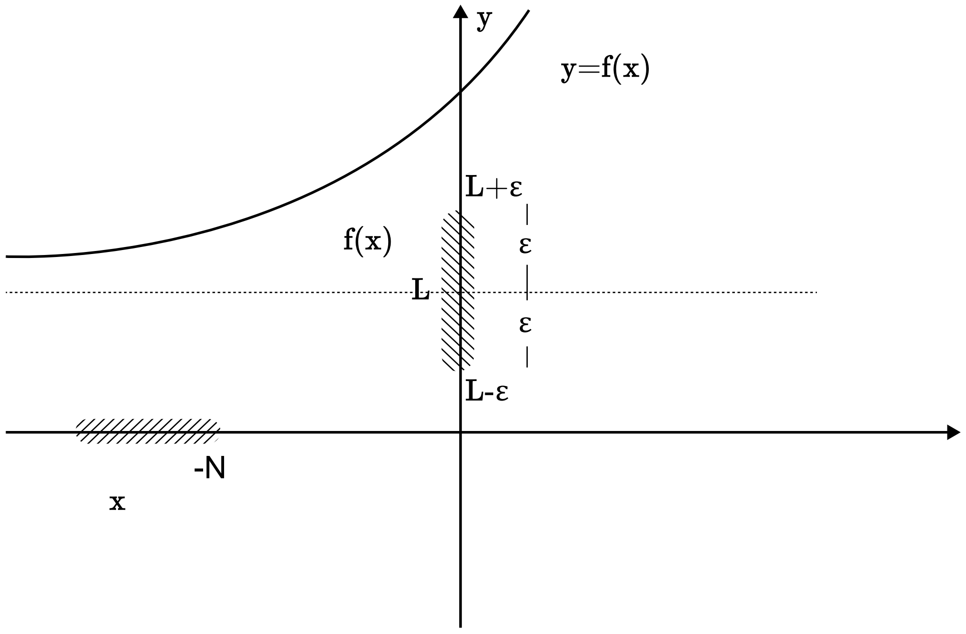
$\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L\right) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ tal que $x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

:

[23] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

EJEMPLO

GRAFICA DEL LÍMITE AL INFINITO CRECIENTE CON VALORES MUY GRANDES NEGATIVOS[24]



Observe que para los casos anteriores significa que la gráfica de *f* tiene una **asíntota horizontal** *y* = L.

iii. DEMOSTRACIONES AL INFINITO

Ejemplo 1:

Demostrar formalmente que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

SOLUCIÓN:

Empleando la definición tenemos:

$\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\right) \equiv \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$ tal que $x > N \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

Transformando el antecedente: $x > N$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{N}$$

Se observa que tomando $N = \frac{1}{\varepsilon}$ aseguraríamos el acercamiento.

Por ejemplo si se quisiera que $y = \frac{1}{x}$ esté a menos de $\varepsilon = 0.01$ de 0, bastaría con tomar a $x > \frac{1}{0.01}$, es decir que $x > 100$

[24] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

Para calcular límites al infinito, usualmente un recurso útil es dividir para x de mayor exponente si se trata de funciones racionales.

Entonces: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}$ como x es demasiado grande entonces es $\frac{0}{1} = 0$

Ejemplo 2:

Calcular: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{5x^2 + x - 1}$

SOLUCIÓN:

Aquí se presenta la indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$

Dividiendo numerador y denominador para x^2, tenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{2}{1} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{5}{1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+0-0}{5+0-0} = \frac{2}{5}$$

Ejemplo 3:

Calcular: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

Solución:

Ahora se presenta la indeterminación: $\frac{-\infty}{\infty}$

Aplicamos el concepto del límite de un cociente y a la vez de una raíz

$\frac{\lim\limits_{x \to -\infty} x-1}{\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}}$ Aquí hay que dividir numerador y denominador para –x

$$\frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{-x} - \frac{1}{-x}}{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{-x}} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{-x} - \frac{1}{-x}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1-0}{\sqrt{1+0+0}} = \frac{-1}{1} = -1$$

Este resultado indica que la gráfica de $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ tiene una asíntota horizontal y = −1 en el infinito negativo.

iv. PROPIEDADES DE LOS LIMITES AL INFINITOS[25]

A. Si k es una contante entonces: $\lim\limits_{x \to \infty} k = k$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$

[25] Límites al infinito de Miladis Becerra Ortiz. edumatematicas.pbworks.com/w/file/fetch/

B. Si n es un número natural par, entonces $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$

C. Si n es un número natural impar entonces $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

D. Si m es un número natural par, entonces $\lim_{x \to \infty} \sqrt[m]{x} = \infty$

E. Si m es un número natural impar entonces

$\lim_{x \to \infty} \sqrt[m]{x} = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[m]{x} = -\infty$

F. Si k es un número racional positivo y r es un número real arbitrario entonces $\lim_{x \to \infty} \frac{r}{x^k} = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{r}{x^k} = 0$, siempre que x^k esté definido

v. Estrategia para determinar límites ± ∞ de funciones racionales

1. Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces el límite de la función racional es 0.
2. Si el grado del numerador es igual al grado del denominador, entonces el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes dominantes.
3. Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, entonces el límite de la función no existe, por lo que es ∞.

3.8. LÍMITES INFINITOS[26]

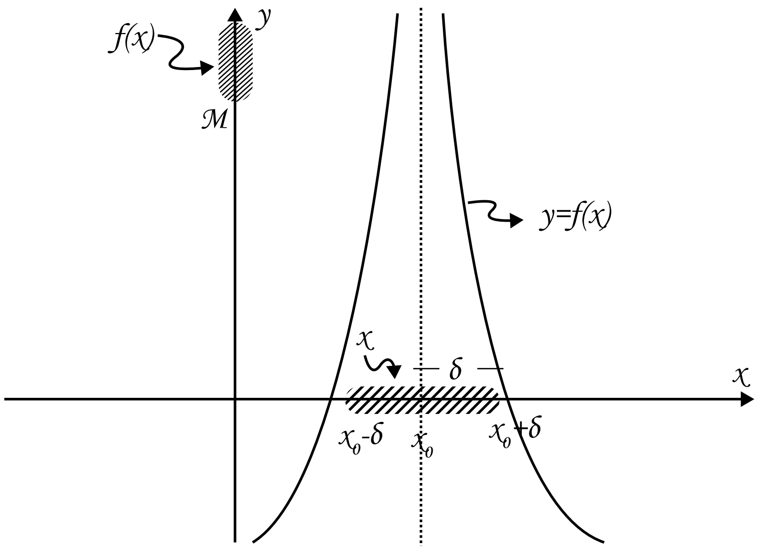
a. Suponga que cuando *x* toma valores próximos a un punto x_0, tanto por izquierda como por derecha, *f* toma valores muy grandes positivo; es decir $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Diremos, en este caso, que *f* **crece sin límite** o que *f* **no tiene límite en** x_0

- **Sea M una cantidad muy grande positiva.** Entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ significa que cuando a x está próxima a " x_0 ", a una distancia no mayor de ∂ ($0 < |x - x_0| < \partial$), f será mayor que M. Es decir: $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty\right) \equiv \forall M > 0, \exists\, \partial > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \partial \Rightarrow f(x) > M$

[26] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

Ejemplo:

GRAFICA DE LÍMITES INFINITOS CUANDO M UNA CANTIDAD MUY GRANDE POSITIVA Y ES +∞[27]



b. Puede ocurrir también que cuando la *x* toma valores próximos a un punto x_0, tanto por izquierda como por derecha, *f* toma valores muy grandes negativos; es decir = $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. Diremos, en este caso, que *f* **decrece sin límite** o que *f* **no tiene límite en** x_0. Es decir:

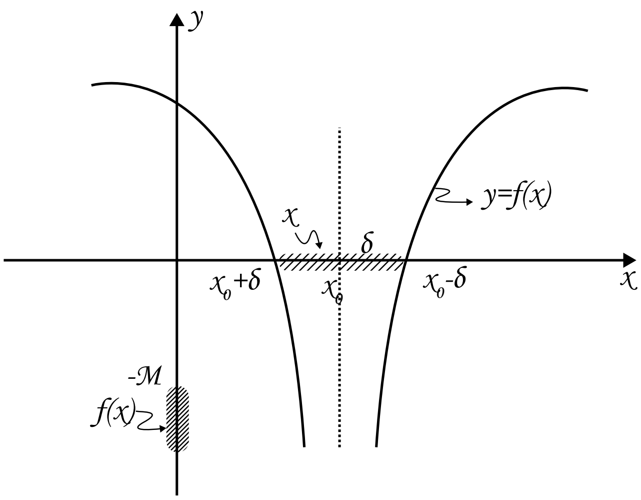
❖ **Sea M una cantidad muy grande positiva.**
Entonces:

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right) \equiv \forall M > 0, \exists\, \partial > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \partial \Rightarrow f(x) < -M$$

[27] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/
[28] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

Ejemplo:

GRAFICA DE LÍMITES INFINITOS CUANDO M UNA CANTIDAD MUY GRANDE POSITIVA Y ES $-\infty$[28]



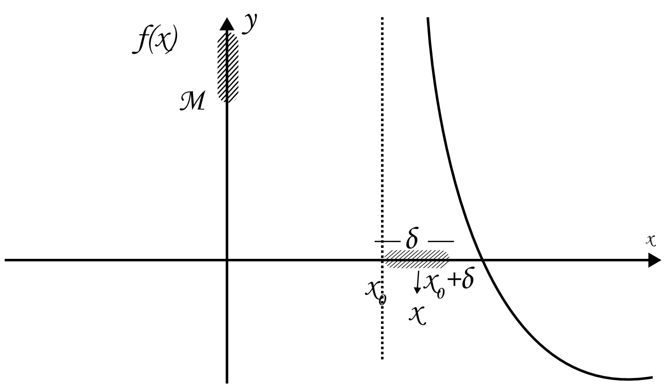
c. Para otro caso, puede ocurrir que cuando la x toma valores próximos a un punto 0 x , sólo por su derecha, f toma valores muy grandes; es decir $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ Lo cual significa:

Sea M una cantidad muy grande positiva.
Entonces:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \equiv \forall M > 0, \exists \partial > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \partial \Rightarrow f(x) > M$$

Ejemplo:

GRAFICA DE LÍMITES INFINITOS CUANDO M UNA CANTIDAD MUY GRANDE POSITIVA Y ES $-\infty$[29]



[29] Límites de funciones de una variable real de Moisés Villena Muñoz. https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

3.8.1. DEMOSTRACION DE LIMITES INFINITOS

EJEMPLO 1:

Calcular: $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+3}{x-2}$

Solución: empleando el teorema de sustitución:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2^+ + 3}{2^+ - 2} = \frac{5^+}{0^+} = +\infty \text{ (No existe)}$$

La gráfica de $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ tiene una asíntota vertical x = 2 y por su derecha la gráfica crece sin límite.

EJEMPLO 2:

Calcular: $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

Solución: empleando el teorema de sustitución

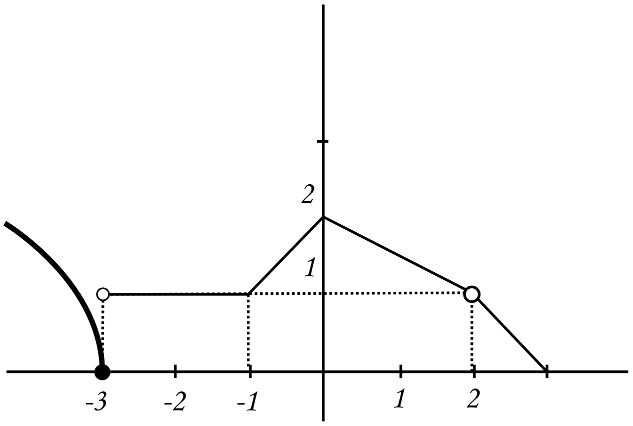
$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = +\infty \text{ (No existe)}$$

La gráfica de f(x) = $\frac{1}{(x-1)^2}$ tiene una asíntota vertical x =1 y tanto por izquierda como por derecha la gráfica crece sin límite.

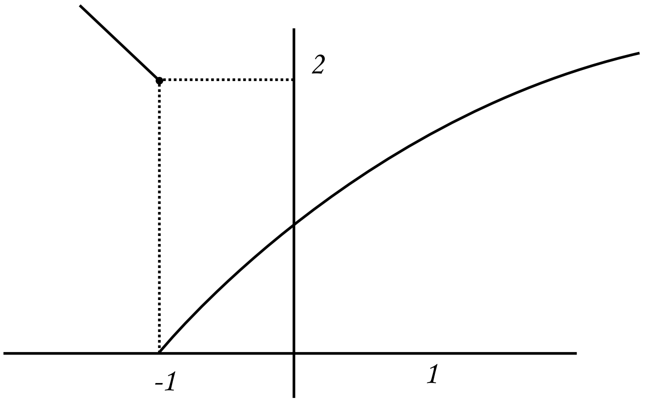
3.9. TALLER DE LÍMITES DE UNA FUNCION

A. Evalué los siguientes límites, y escriba que propiedad utilizó en cada caso:

1. Calcular los limites, si de la función cuya grafica es la siguiente, en los puntos x = -3, x = -1, y x = 2



2. $\lim_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim_{x \to -1^-} f(x)$, siendo la gráfica de *f* la siguiente:



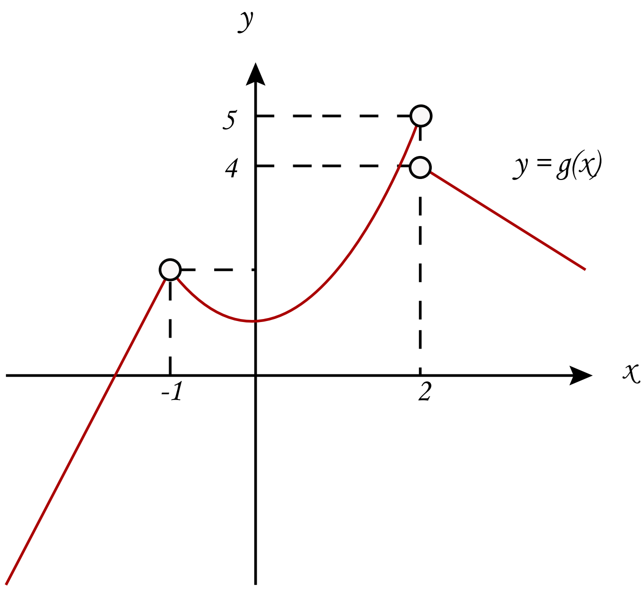
3. Responden con la siguiente gráfica. Hallar (en caso de existir) cada uno de los límites siguientes.

a. $\lim_{x \to -1^-} g(x)$

b. $\lim_{x \to -1^+} g(x)$

c. $\lim_{x \to 2^-} g(x)$

d. $\lim_{x \to 2^+} g(x)$



4. $\lim_{x \to 3} 77$
5. $\lim_{x \to 5} (3x - 7)$
6. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$
7. $\lim_{x \to 3} \frac{4x-5}{5x-1}$
8. $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$
9. $\lim_{x \to \frac{-3}{2}} \frac{4x^2-9}{2x+3}$
10. $\lim_{x \to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$
11. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$
12. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$
13. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
14. $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$
15. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$

B. Soluciona los siguientes problemas aplicando los limites

16. Ha Pablo le han comentado que en el lugar donde nació y que por cierto, le gusta mucho, están vendiendo unos terrenos rectangulares a un excelente precio, lo que le dio mucha alegría y está considerando comprar uno. Lo único malo, y raro además, es que la persona que le dio los datos de estos terrenos sólo sabía que el área estaba expresada de la siguiente manera: A = $\frac{a-16}{\sqrt{a}-4}$
Donde a es el ancho del terreno expresado en metros, el cual también se sabe se aproxima a los 16 metros.
Pablo que era muy bueno en cálculo de límites pensó: Si el área depende del ancho, y lo que me interesa saber es que tan pequeño es el terreno para ver si me conviene compararlo entonces hare que al ancho del terreno se acerque a 16 para tener en cuenta cual podría ser área del terreno con esta característica. Realiza, al igual que pablo los cálculos para ver a qué valor se aproxima el área del terreno cuando su ancho se aproxime a 16 metros.

17. En los últimos años a Melissa le han gustado mucho las motocicletas, pero como es mujer, muchas personas no lo ven de buena manera porque piensan que por esta razón no tiene habilidad para controlarla. En estos días se ha enterado que habrá una competencia de motocicletas donde ha decidido participar para demostrar que no solo por ser mujer no puede correr motocicletas. Después de unos días de práctica ella sabe que el recorrido en Km. que hace con la moto es de ***d*** = $\frac{t-1}{\sqrt{t}-1}$ donde t es el tiempo en horas. Si ella practica cerca de una hora, entonces, ¿A qué valor se aproxima la distancia recorrida?

18. En una clase de matemáticas Eustolio, el profesor de física quiere enseñarles a sus alumnos el concepto de trabajo. Para esto decidió que ellos vieran como funciona y o en que se puede utilizar este concepto y llevó una balanza a su clase. Uno de los alumnos dijo que eso de pesar objetos en una balanza no le causaba ningún reto y no entendía cuál era el objetivo de esa actividad. El profesor Eustolio entonces le contestó: como a ti lo que te importa es solo hacer cálculos y no aprender a fondo lo que vamos a ver más adelante, resuelve lo siguiente en base a lo que en hemos visto: El trabajo que realiza la balanza está dado por w = $\frac{f^2-1}{f-1}$ donde **f** es la fuerza que se ejerce sobre la balanza expresado en newton (N) ¿A qué valor se aproxima el trabajo de la balanza cuando la fuerza ejercida sobre ella se aproxima a 1N? Y ahora explícame como podrías usar esta información y en qué situación lo puedes aplicar.

C. Calcular los siguientes límites al infinito

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3-3x^2+4x-3}{x^3+3x+1}$

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x}{x^2-5x+1}$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

23. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{5x}{x-2}}$

24. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-5}{\sqrt{x^2+2}}$

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x} - x$

26. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

27. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

28. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x\, Ln\left(\frac{x+2}{x-5}\right)\right]$

D. Calcular los siguientes limites infinitos

29. $\lim\limits_{x \to 1^+} \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]$

30. $\lim\limits_{x \to 1^-} \left[\frac{x}{x-1}\right]$

31. $\lim\limits_{x \to 3^-} \left[\frac{x+3}{x^2-9}\right]$

32. $\lim\limits_{x \to -7^-} \left[\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}}\right]$

33. $\lim\limits_{x \to 4^+} \left[\frac{\sqrt{x^2-16}}{4-x}\right]$

CAPÍTULO 4

Modulo de aprendizaje

CÁLCULO DIFERENCIAL

4 CONTINUIDAD DE UNA FUNCION

La idea intuitiva de función continua en un punto es bien sencilla.
Una función continua en un punto es aquella que no “da saltos”, aquella que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Matemáticamente la definición de función continua es un poco más compleja. Dice así:

4.1. Definición: Una función *f*(*x*) es continua en un punto *x;* sí:
Dado ε > 0, existe *δ* > 0 tal que siempre que |*x* − *a*| < *δ,* entonces |*f*(*x*) − *f*(*a*)| < ε. Dicho de otra forma, si nos acercamos al punto *a*, entonces las imágenes se acercan a la imagen de *a*, f(a).

Si f(x) no es continua en *x* = *a* se dice que f(x) es discontinua en *a* o que tiene una discontinuidad en *x* = *a*.

4.2. Propiedades: Para que una función sea continua en un punto a es necesario y suficiente que:

a. Exista el valor de la función en el punto, f(a). Ósea este definida

b. Existan los limites laterales, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

$$\operatorname{Lim}_{x \to a^-} f(x)$$

c. y sean finitos e iguales entre si e iguales a f(a), es decir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Esta última propiedad proporciona una forma muy sencilla de saber si una función es continua o no en un punto.

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & si\ x > 2 \\ \frac{1}{x}, & si\ x \leq 2 \end{cases}$$

En primer lugar, señalemos que la mayoría de las funciones que estudiamos son continuas en todos los puntos salvo en algunos.
¿Cuáles son los posibles puntos de discontinuidad de una función?

Aquellos en los que no está definida la función (anulan el denominador, etc...) y aquellos en los que cambia la definición de la función. En todos los demás puntos las funciones son siempre continuas y no hace falta analizarlos.
En nuestro caso, si nos fijamos en f(x) encontramos 2 posibles puntos de discontinuidad.

El primero es aquel en el que cambia la definición de la función, $x = 2$. Además, como hay un denominador, que se anula para $x = 0$, y además estamos en el tramo de función para valores menores que 2, el punto $x = 0$ es otro posible punto de discontinuidad.
Analicemos si la función es continua o no en esos puntos.

Continuidad en x = 2:

$f(2) = \frac{1}{2}$

Pues debemos sustituir en la parte inferior de f(x), que es donde está el igual.
Limites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5$$

Como los límites laterales existen pero son diferentes, concluimos que f(x) es discontinua en x =2.

Continuidad en x = 0:

$f(0) = \nexists$

Quedaría un cero en el denominador.

Con esto ya sabemos que la función no puede ser continua en x = 0. De todos modos calculamos los límites laterales.

Observemos que cuando nos acercamos a 0, da igual por la derecha que por la izquierda, estamos siempre en la parte inferior de la función, luego:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Por otra parte

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Y f(x) también es discontinua en x = 0.
Por tanto f(x) es continua en todos los números reales salvo en x = 0 y x =2.

4.3. Tipos de discontinuidad

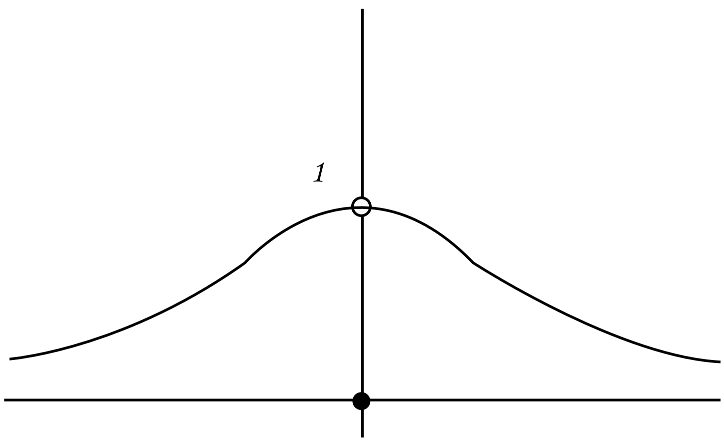
Analicemos los posibles casos que se pueden dar a la hora de estudiar la continuidad de una función en un punto.

4.3.1. Discontinuidad punto faltante

Existe f(a) y los limites laterales, que son iguales y finitos, pero distintos del valor de f(a). Una discontinuidad de este tipo se denomina discontinuidad evitable.

Nota: para que una función tenga discontinuidad punto faltante, no está definida pero si existe limite

GRÁFICA DE DISCONTINUIDAD PUNTO FALTANTE[30]



Observamos que los límites por la derecha y por la izquierda valen 1, ambos, mientras que f(0) = 0. Hay una discontinuidad evitable en x =0.

Ejemplo:
Determinar si la siguiente función es continua:
$f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + x}{x}$ en x = 0

Solución:

- ❖ $f(0) = \frac{3(0)^3 + 2(0) + 0}{0} = \frac{0}{0}$ entonces $f(0) = \nexists$
- ❖ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(3x^2+2x+1)}{x} = 3(0)^2 + 2(0) + 1 = 1$
- ❖ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(3x^2+2x+1)}{x} = 3(0)^2 + 2(0) + 1 = 1$

Conclusión: esta función no es continua por que no está definida pero si existe limite, por consiguiente presenta una discontinuidad punto faltante.

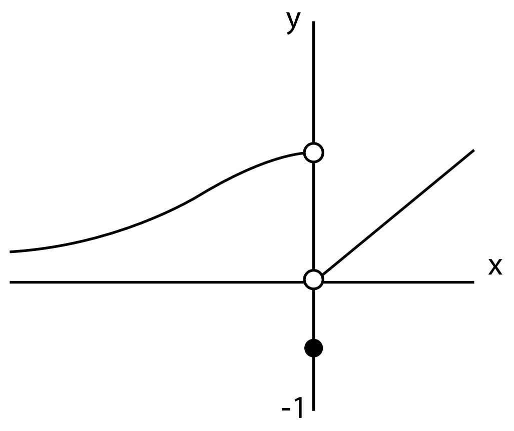
[30] Límite y continuidad de funciones, material de internet.
sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T09.pdf

4.3.2. Discontinuidad finita:

Existe f(a) y los limites laterales existen y son finitos, aunque distintos. Estamos ante una discontinuidad de salto finito.

Nota: para que una función tenga discontinuidad finita, f(a) está definida pero no existe limite

GRÁFICA DE DISCONTINUIDAD FINITA[31]:



En este caso el limite por la derecha es 1, el izquierdo es 0 y f(0) = $\frac{-1}{2}$, hay una discontinuidad evitable en x =0.

Ejemplo:

Determinar si la siguiente función es continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 6, si\ x \geq 2 \\ 2x + 1, \quad si \quad x \ < 2 \end{cases}$$

Solución:

- $f(2) = \begin{cases} 3(2)^2 - 4(2) + \ 6 = 10 \\ \quad 2(2) + 1 \ = \quad 5 \end{cases}$

  f(2) Si está definida

- $\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} 3(2)^2 - 4(2) + \ 6 = 10 \\ \quad \lim_{x \to 2^-} 2(2) + 1 \ = \quad 5 \end{cases}$

  No existe límite porque los límites laterales no son iguales.

  $\lim_{x \to 2^+} f(x) \ \neq \ \lim_{x \to 2^-} f(x)$

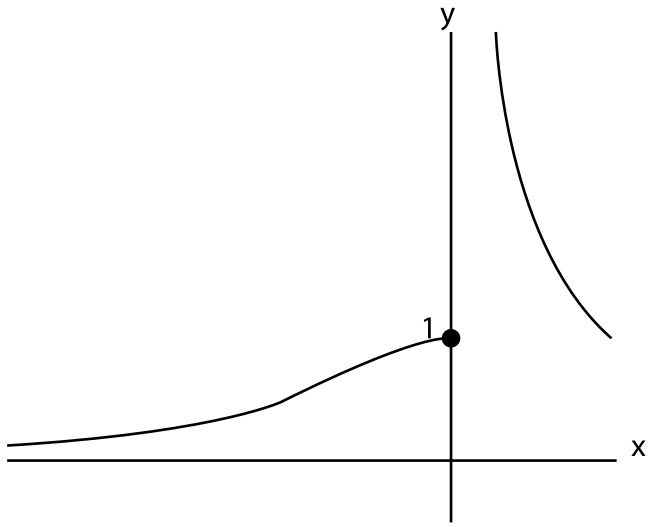
[31] Límite y continuidad de funciones, material de internet. sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T09.pdf

Conclusión: $f(x)$ no es continua porque aunque está definida no existe límite pero sus límites laterales son diferentes.

4.3.3. Discontinuidad infinita:

a) Existe f(a) y alguno de los límites laterales es infinito. En este caso hay una discontinuidad de salto infinito.

GRÁFICA DISCONTINUIDAD INFINITA[32]:



Ahora f (0) =1, el límite por la izquierda vale 1 también y el límite lateral por la derecha vale +∞. Discontinuidad de salto infinito en x =0.

Nota: en esta discontinuidad infinita se observa que está definida y existe límite por uno de sus lados laterales, pero por el otro lado no está definida y no existe límite.

Ejemplo:

Determinar si la siguiente función es continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, si\ x<0 \\ \frac{2}{x}, \quad si\ \ x\ \ \geq 0 \end{cases}$$

[32] Límite y continuidad de funciones, material de internet. sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T09.pdf

Solución:

❖ $f(0) = \begin{cases} 3(0)+1=1 \\ \frac{2}{0} = +\infty \end{cases}$

$f(0)$, está definida por la derecha pero por la izquierda no, es infinito positivo

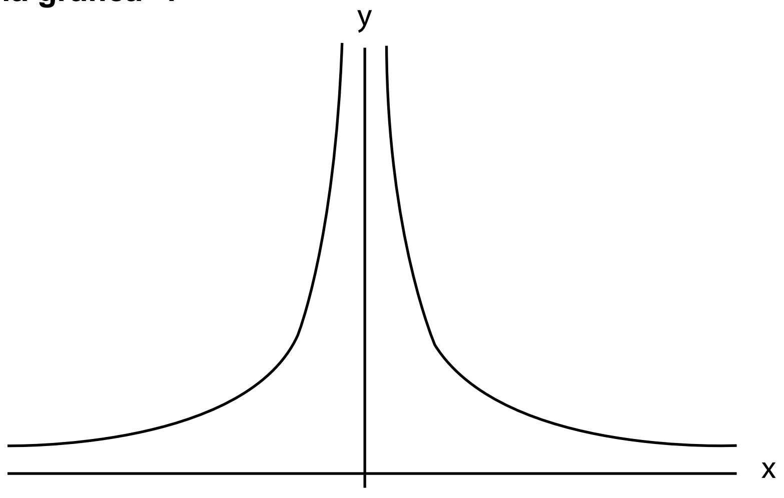
❖ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) 3(0)+1=1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \frac{2}{0} = +\infty \end{cases}$

No existe límite porque por la izquierda es uno y por la derecha infinito positivo

Conclusión: $f(x)$ no es continua porque no está definida por el lado derecho como tampoco existe límite, por consiguiente presenta una discontinuidad infinita.

b) No existe f(a) o alguno de los límites laterales. Se trata de una discontinuidad esencial.

De forma gráfica[33]**:**



Los límites laterales, ambos, son +∞, pero f(0) no existe. Hay una discontinuidad esencial en x =0.

Nota: en esta discontinuidad infinita se observa que no está definida y no existe límite por ninguno de sus lados laterales.

Ejemplo:
Determinar si la siguiente función es continua:

---

[33] Límite y continuidad de funciones, material de internet. sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T09.pdf

$f(x) = \frac{2}{x}$ en x = 0

Solución:

- ❖ $f(0) = \frac{2}{x}$ entonces $f(0) = \nexists$
- ❖ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2}{0^-} = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to +} \frac{2}{+} = +\infty$

  No existe límite por ninguno de los lados laterales

  Conclusión: $f(x)$ no es continua porque no está y no existe limite por ninguno de los lados laterales por consiguiente presenta una discontinuidad infinita.

4.4. Continuidad en un intervalo

Ya hemos estudiado la continuidad de una función f en un punto c, perteneciente a su dominio y se han establecido las condiciones para determinar dicha continuidad. Ahora, analizaremos lo que ocurre con la continuidad de una función cuando consideramos un intervalo, en vez de un punto

4.4.1. Continuidad en un intervalo abierto:

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto a $<$ x $<$ b, (a, b), si es continua en cada x del intervalo.

Dada una función $f: D \rightarrow R, D \subset R$, se dice que es continua en un intervalo abierto (a, b) $\subset$ D, si es continua para todo x $\in$ (a, b).

Es decir, una función es continua en un intervalo abierto cuando lo es en cada uno de los puntos. Esto supone que el grafico de la función en el intervalo estudiado es “trazo continuo”

Ejemplo:

Determinar si la siguiente función es continua en el siguiente intervalo abierto:

$f(x) = \frac{3x^2-4x+8}{x}$; en el intervalo 0$<$ x $<$ 5 = (0, 5) = {1, 2, 3, 4}

Solución:

$f(1) = \frac{3(1)^2-4(1)+8}{1} = 7$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1} \frac{3(1)^2-4(1)+8}{1} = 7$

$f(2) = \frac{3(2)^2-4(2)+8}{2} = 6$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2} \frac{3(2)^2-4(2)+8}{2} = 6$

$f(1) = \frac{3(3)^2-4(3)+8}{3} = \frac{23}{3}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 3} \frac{3(3)^2-4(3)+8}{3} = \frac{23}{3}$

$f(1) = \frac{3(4)^2-4(4)+8}{4} = 10$ $\lim_{x \to 4} \frac{3(4)^2-4(4)+8}{4} = 10$

Conclusión:
La función $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $0 < x < 5$

4.4.2. Continuidad en un intervalo cerrado:

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, [a, b] si $f(x)$ es continua en un intervalo abierto $a < x < b$, (a, b) y $f(x)$ se aproxima a $f(a)$ a medida que x se acerca al valor ***a*** por la derecha (Para $a < x$) y $f(x)$ se aproxima a $f(b)$ a medida que x tiende al valor b por la izquierda (para $x < b$).

Dada una función f: D → R, D ⊂ R, se dice que es continua en un intervalo cerrado [a, b] ⊂ D si es continua en (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Una función f: R → R es continua en el intervalo cerrado [a, b] contenido en el Dominio de f, si:
$f(x)$ es continua en todo punto del intervalo abierto (a, b)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Ejemplo:
Determinar si la siguiente función es continua en el siguiente intervalo cerrado:
$f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$; en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 4$ = [0, 4] = {0, 1, 2, 3, 4}

Solución:

$f(0) = \frac{(0)^2-5(0)+4}{0-4} = -1$ $\lim_{x \to 0} \frac{(0)^2-5(0)+4}{0-4} = -1$

$f(1) = \frac{(1)^2-5(1)+4}{1-4} = 0$ $\lim_{x \to 1} \frac{(1)^2-5(1)+4}{1-4} = 0$

$f(2) = \frac{(2)^2-5(2)+4}{2-4} = 1$ $\lim_{x \to 2} \frac{(2)^2-5(2)+4}{2-4} = 1$

$f(3) = \frac{(3)^2-5(3)+4}{3-4} = 2$ $\lim_{x \to 3} \frac{(3)^2-5(3)+4}{3-4} = 2$

$f(4) = \frac{(4)^2-5(4)+4}{4-4} = \frac{0}{0} = \nexists$ $\lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x-1)}{x-4} = \lim_{x \to 1} (1-1) = 0$

Conclusión:
La función $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $0 < x < 4$ = {1, 2, 3}

La función $f(x)$ no es continua en el intervalo cerrado 0≤ x ≤ 4 = {0, 1, 2, 3, 4}, porque cuando x = 4 no está definida así tenga limite

4.4.3. Continuidad en un intervalo semi abierto por la derecha:
Una función f es continua en el intervalo semi abierto por la derecha a ≤ x < b [a, b) si y solo si, se cumplen:

1. $f(x)$ es continua en todo punto del intervalo abierto (a ,b)

2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Ejemplo:
Determinar si la siguiente función es continua en el siguiente intervalo semi abierto por la derecha:
$f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x-2}$; en el intervalo semi abierto por la derecha
-3 ≤ x < 2 = [-3, 2) = {-3, -2, -1, 0, 1}

Solución:

$$f(-3) = \frac{2(-3)^2+5(-3)+1}{-3-2} = \frac{-4}{5} \qquad \lim_{x \to -3} \frac{2(-3)^2+5(-3)+1}{-3-2} = \frac{-4}{5}$$

$$f(-2) = \frac{2(-2)^2+5(-2)+1}{-2-2} = \frac{1}{4} \qquad \lim_{x \to -2} \frac{2(-2)^2+5(-2)+1}{-2-2} = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = \frac{2(-1)^2+5(-1)+1}{-1-2} = \frac{2}{3} \qquad \lim_{x \to -1} \frac{2(-1)^2+5(-1)+1}{-1-2} = \frac{2}{3}$$

$$f(0) = \frac{2(0)^2+5(0)+1}{0-2} = \frac{-1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2(0)^2+5(0)+1}{0-2} = \frac{-1}{2}$$

$$f(1) = \frac{2(1)^2+5(1)+1}{1-2} = -8 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{2(1)^2+5(1)+1}{1-2} = -8$$

Conclusión:
La función $f(x)$ es continua en el intervalo abierto -3 < x < 2 = {-2, -1 0, 1}
La función $f(x)$ es continua en el intervalo semi abierto por la derecha -3 ≤ x <2 = [-3, 2) = {-3, -2, -1, 0, 1}

4.4.4. Continuidad en un intervalo semi abierto por la izquierda:
Una función f es continua en el intervalo semi abierto por la izquierda a < x ≤b (a, b] si y solo si, se cumplen:

i. $f(x)$ es continua en todo punto del intervalo abierto (a ,b)

ii. $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Ejemplo: Determinar si la siguiente función es continua en el siguiente intervalo semi abierto por la izquierda:

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-3}$; en el intervalo semi abierto por la izquierda $0 < x \leq 3$ $= (0, 3] = \{1, 2, 3\}$

Solución:

$f(1) = \frac{\sqrt{1}-3}{1-3} = 2$ $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1}-3}{1-3} = 2$

$f(2) = \frac{\sqrt{2}-3}{2-3} = 1.58$ $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2}-3}{2-3} = 1.58$

$f(3) = \frac{\sqrt{3}-3}{-3} = \frac{-1.26}{0} = \nexists$ $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3}-3}{3-3} = \frac{-1.26}{0} = \nexists$

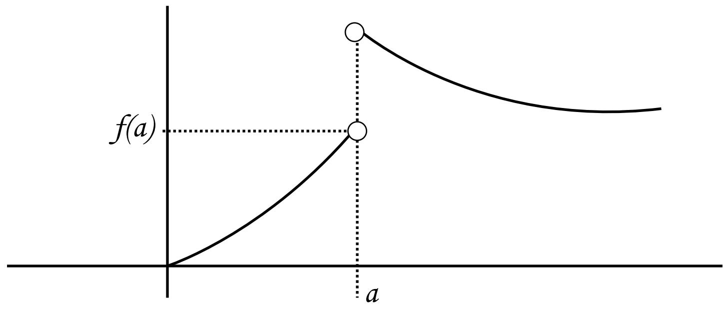
Conclusión:

- La función $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $0 < x < 3 = \{1, 2\}$
- La función $f(x)$ no es continua en el intervalo semi abierto por la izquierda $0 < x \leq 3 = (1, 3] = \{1, 2, 3\}$, porque cuando x = 3 no está definida y no tiene limite

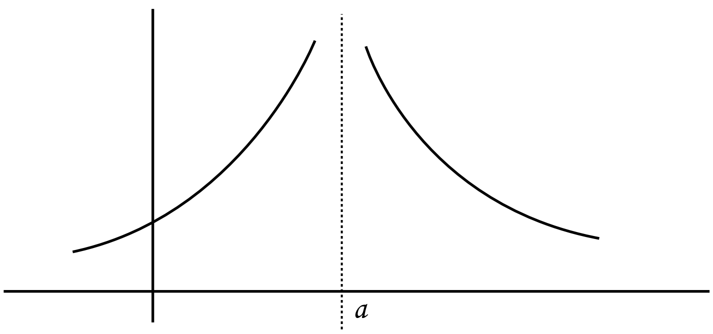
4.5. TALLER DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCION

A. Estudiar la continuidad en x = a de las funciones cuyas graficas son las siguientes

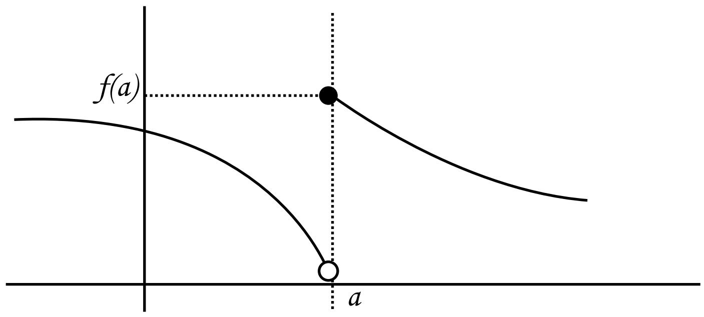
1.



2.



3.



B. Calcular el valor de a para que sean continuas en x = a las siguientes funciones:

4. $f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{ax-1} & \boldsymbol{si\ x \leq 1} \\ \boldsymbol{3x^2+1} & \boldsymbol{si\ x > 1} \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{ax^2 + 4x - 1} & \boldsymbol{si\ x \leq 1} \\ \boldsymbol{-x + 3} & \boldsymbol{si\ x > 1} \end{cases}$

C. Estúdiese para que valores de x son continuas las siguientes funciones:

6. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

8. $f(x) = e^{x^2+1}$

9. $f(x) = \mathrm{Ln}(\mathrm{x}+1)$

10. Calcula el valor de a para que $f(x)$ sea continua en x = 1, siendo

$$f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{\sqrt{1-x^2}} & \boldsymbol{si\ 0 \leq x \leq 1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{si\ x \geq 1} \end{cases}$$

D. Estudiar la continuidad en las siguientes funciones:

11. $f(x) = \begin{cases} \ln \mathrm{x}\ \mathrm{si}\ 1 \leq x < 2 \\ \mathrm{e^x}\ si\ x \geq 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}\ \mathrm{si}\ x \neq 1 \\ \boldsymbol{1}\ si\ x = 1 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ \mathrm{si}\ x \neq 1 \\ \boldsymbol{1}\ si\ x = 0 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} x & si\ x < 1 \\ 2 & si\ x = 1 \\ ln(x+1) & si\ x > 1 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$

16. $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$ en x = 2

17. $f(x) = \mathrm{x} - \frac{3}{x^2}$ en x = 0

18. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ en x = 4

19. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ en x = 3

20. $f(x) = \dfrac{(x+\ 2)^2-4}{x}$ en x = 0

21. $f(x) = \dfrac{(x-\ 3)^3-\ 27}{x}$ en x = 0

22. Encuentre el valor de A y B para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2+5x-9 & si\ x<1 \\ B & si\ x=1 \\ Ax^2+2x-3 & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

E. Analice la continuidad de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

23. $f(x)=\dfrac{x\ -\ 3}{4+\ x}$ en el intervalo abierto -4$< x < 1$ y en el intervalo cerrado -4 $\leq x \leq 1$

24. $f(x)=$ x$\left(1+\frac{1}{x}\right)$ en el intervalo abierto 0$< x < 1$ y en el intervalo cerrado 1 $\leq x \leq 1$

25. $f(x)=\begin{cases} x^2-3x\ si\ x<2 \\ 4+2x\ \ si\ \ x\geq 2 \end{cases}$ en el intervalo abierto 0 $< x < 2$ y en el intervalo cerrado 0$\leq x \leq 2$

26. $f(x)=\begin{cases} x(x-1)\ si\ \ <3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} \quad si\ x\geq 3 \end{cases}$ en el intervalo abierto 0$< x < 3$ y en el intervalo cerrado 0 $\leq x \leq 3$

CAPÍTULO 5

Modulo de aprendizaje
CÁLCULO
DIFERENCIAL

5 DERIVADAS DE FUNCIONES

El concepto de derivada fue desarrollado en el siglo XVII simultáneamente por dos matemáticos: Isaac Newton y Gottfried Leibniz. Sus trabajos dieron origen a una nueva rama de la matemática: el cálculo infinitesimal. Esto generó una disputa entre ellos, pues cada uno suponía que el otro había plagiado su trabajo.

Newton necesitaba resolver un problema de la física. Estaba interesado en encontrar el modo de calcular las velocidades instantáneas de los cuerpos en movimiento. Es decir de poder determinar la velocidad con la que se mueve un cuerpo en un instante determinado.

Liebniz, en cambio, estaba interesado en hallar un método que le permitiera encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado. Como puede verse, el problema de Leibniz era un problema matemático. Además, a él se debe la creación de la notación que permanece en la actualidad.

5.1. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

El concepto de derivada puede ser interpretado geométricamente. A continuación desarrollaremos esta interpretación. Pero antes recordemos algunos conceptos de función lineal que nos serán necesarios para comprender el desarrollo de la interpretación geométrica.

1. Las funciones lineales son aquellas cuya representación gráfica es una recta y tienen por fórmula general $y = mx + b$ donde m y b representan números cualesquiera. Por ejemplo: $y = 2x + 3$ es la ecuación de una recta donde $m = 2$ y $b = 3$; $y = -x$ es la ecuación de otra recta donde $m = -1$ y $b = 0$

2. En la fórmula $y = mx + b$, b recibe el nombre de ordenada al origen e indica el punto donde la recta corta al eje y.

3. En la fórmula $y = mx + b$, m recibe el nombre de pendiente e indica la inclinación de la recta.

Para entender los resultados del Cálculo diferencial es necesario, antes que nada, comprender la idea básica del mismo: el concepto de derivada. La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón "instantánea" de cambio.

5.2. Tangente a una curva[34]

A principios del siglo XVII no se sabía cómo calcular la tangente a una curva en un punto de la misma. Este problema se presentaba con frecuencia en mecánica, en óptica y en geometría.

[34] mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/perez-calculo1.pdf

Vamos a estudiar el concepto general de tangente a una curva en un punto dado. En general, no es un asunto sencillo hallar la pendiente de esta tangente. La razón es que, en principio, se necesita para ello otro punto, además del de tangencia.

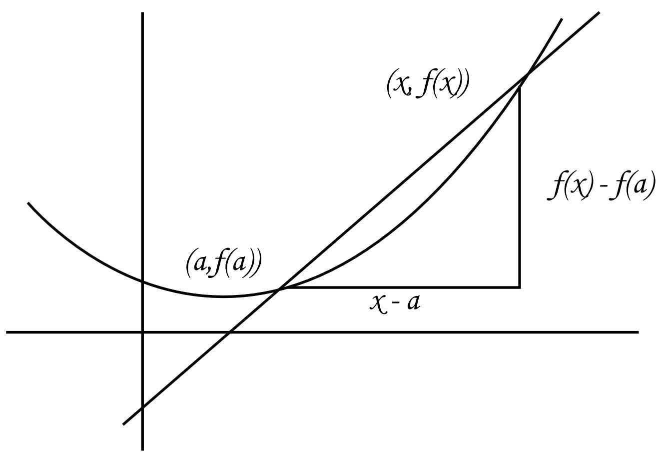
Supongamos que queremos hallar la tangente a la curva de ecuación cartesiana y = f(x) en el punto (a, f(a)). La estrategia, usada primero por Pierre de Fermat y más tarde por Newton, consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente.

En particular, considérese la recta que une el punto (a, f(a)) con un punto cercano, (x, f(x)), de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho número suele llamarse cociente incremental de f en a.

GRAFICA DE LA INTERPRETACION GEOMETRICA DE DERIVADA[35]



Nótese que una secante es una buena aproximación de la tangente, siempre que el punto (x, f (x)) esté muy próximo a (a, f (a)). Estas consideraciones llevan a definir la tangente a la gráfica de f en el punto (a, f (a)) como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es igual al límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista

[35] mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/perez-calculo1.pdf

5.3. Razón de cambio[36]

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable "dependiente" y con otra variable "independiente" x, lo que suele escribirse en la forma y = f(x). Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de f(a) a f(x). La razón de cambio promedio de y = f(x) con respecto a x en el intervalo [a, x] es:

Razón de cambio promedio = $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "razón de cambio puntual de y = f(x) con respecto a x en el punto a" como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El ejemplo más conocido de esto que decimos es el de una partícula que se mueve a lo largo de una recta sobre la cual hemos elegido un origen. Sea f(t) la distancia de la partícula al origen en el tiempo t. La razón de cambio promedio tiene en este caso una interpretación física natural. Es la velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo considerado.

Parece intuitivo que, en cada instante, la partícula se mueve con una determinada velocidad instantánea. Pero la definición corriente de velocidad es en realidad una definición de velocidad media; la única definición razonable de velocidad instantánea es como la razón de cambio puntual. Es importante darse cuenta de que la velocidad instantánea es un concepto teórico, y una abstracción, que no corresponde exactamente a ninguna cantidad observable.

Notación. En lo que sigue las letras I, J representan intervalos no vacíos de números reales.

Definición: Se dice que una función f: I →R es derivable en un punto a ∈ I, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Explícitamente, f es derivable en a si hay un número L ∈ R verificando que para cada número $\varepsilon > 0$ existe algún número $\partial > 0$ tal que para todo x ∈ I con x ≠ a y | x − a |< ∂ se tiene que:

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L\right| \leq \varepsilon$$

[36] mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/perez-calculo1.pdf

Dicho número L se llama la derivada de f en a y suele representarse por f''(a) (notación debida a Lagrange) y también, a veces, por $\frac{df(x)}{dx}$, donde x = a (notación de Leibnitz).

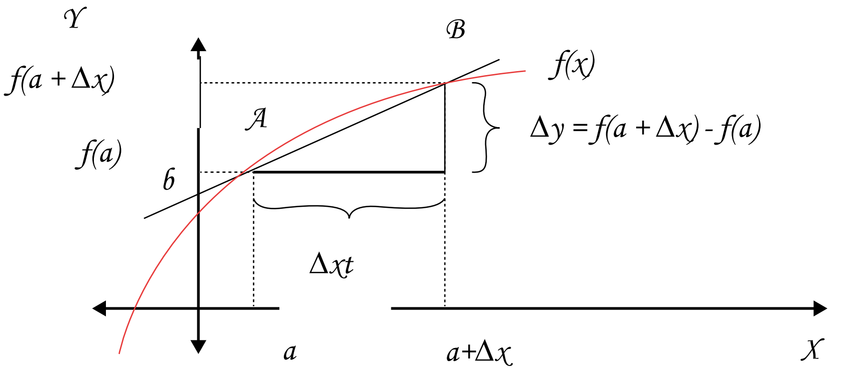
Observaciones:

i. El límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se escribe también en la forma $\lim_{x \to h} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ii. La derivabilidad de f en un punto a ∊ I es una propiedad local, depende solamente del comportamiento de f en los puntos de I próximos al punto a. Concretamente, si J es cualquier intervalo abierto que contiene el punto a, se verifica que f es derivable en a, sí, y sólo si, la función restricción $f_{|I \cap J|}$ es derivable en a y, por supuesto, en tal caso ambas funciones tienen la misma derivada en a.

Sea f(x) una función cualquiera cuyo gráfico figura a continuación.

GRAFICA DE LA INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA RAZON DE CAMBIO[37]



Si en el gráfico anterior unimos los puntos A y B obtenemos una recta.
Recordemos que la ecuación de la recta es: y = mx + b donde m es la pendiente, es decir, el valor que indica la inclinación de la recta y b la ordenada al origen, es decir, el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

Recordemos que la pendiente de una recta puede calcularse como el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con lo cual podemos escribir: m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

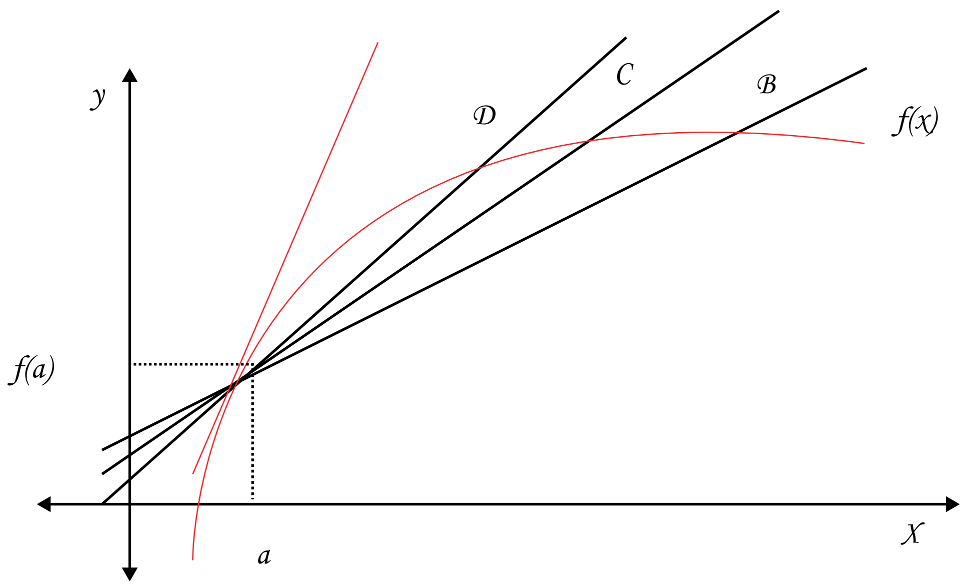
Vemos, entonces, que la pendiente de la recta AB coincide con la variación media de la función en el intervalo (a; a + Δx)
Por lo tanto la ecuación de la recta AB puede escribirse:

[37] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}.x + b$$

Si tomamos Δx cada vez más pequeños, las rectas pasaran por los puntos C y D, que están cada vez más cerca de A.

GRAFICA DE LA RECTA SECANTE A LA RECTA TANGENTE[38]



Cuando Δx tienda a cero se obtendrá una recta tangente a la función en el punto A (las rectas tangentes a una curva en un punto son aquellas que tocan a la curva sólo en ese punto) cuya pendiente estará dada por la fórmula:

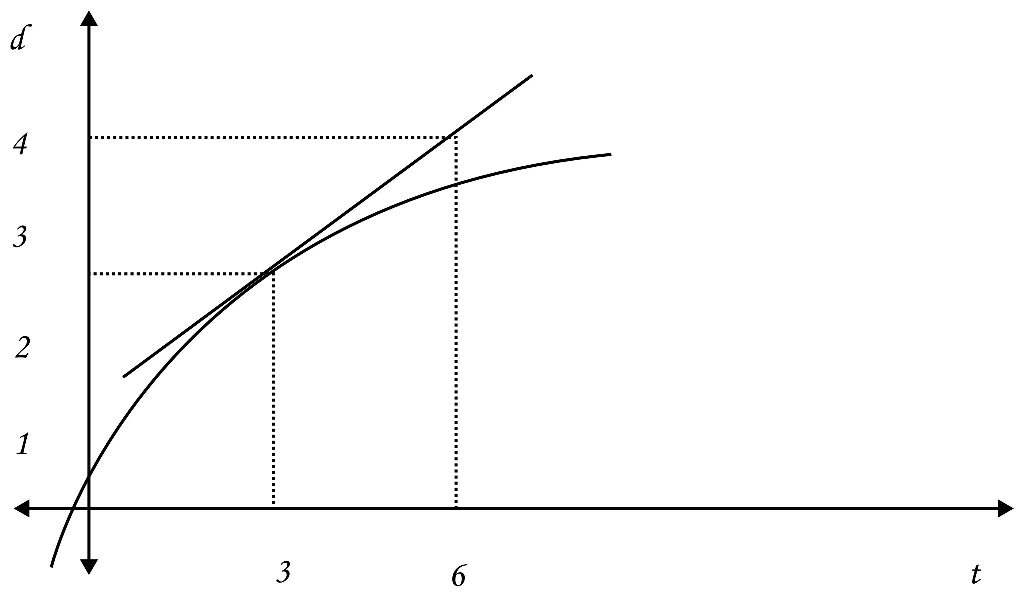
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

La derivada de una función f en un punto a es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (a; f(a))

Ejemplo:
Si queremos calcular la velocidad instantánea en t = 3 debemos trazar la recta tangente a la gráfica en t = 3 y calcular su pendiente.

---

[38] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/
[39] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/



Para ello trazamos la recta tangente a la función en t = 3. Es decir, tracemos una recta que toque a la gráfica de la función sólo en el punto t = 3

Es importante tener en cuenta que estamos utilizando un método gráfico y como todo método gráfico éste nos dará una información aproximada. Cuanto mejor trazada esté la tangente, más cercano al valor exacto estará la velocidad instantánea.

A continuación marcamos sobre la recta tangente otro punto cuyas coordenadas puedan leerse con facilidad en el gráfico. Por ejemplo, el punto (6, 4).

Ahora calculamos la pendiente de la recta con la fórmula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{6-3} = \frac{1}{3}$$

Para recordar

Como el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en un punto coincide con el valor de la derivada en ese punto, o sea con el valor de la variación instantánea de la función en ese punto, en este caso la velocidad instantánea en t = 3 es aproximadamente igual a $\frac{1}{3}$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la función f (x) = $3x^2$ en x = 2

Solución:

La ecuación de una recta cualquiera es: y = m x + b

Para resolver nuestro problema debemos hallar los valores de m y b y reemplazarlos en la ecuación general.

Como la recta que estamos buscando es tangente a la función en x = 2, el valor de su pendiente coincidirá con el valor de la derivada de la función en ese punto.

Calculamos el valor de la derivada de f (x) = 3x² en x = 2

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x^2+2x.\Delta x+\Delta x^2) - 3x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2+6x\Delta x+\Delta x^2 - 3x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 0 \Rightarrow f'(a) = m = 6(2) = 12$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente buscada será m = 12

Ahora debemos hallar el valor de b.
Para ello necesitamos conocer algún punto de la recta tangente, es decir algún punto de coordenadas (x, y) que hagan verdadera la igualdad y = 12x + b

Ahora bien, el punto donde la recta tangente toca a la función es un punto que pertenece a la recta y a la función. Utilicemos entonces la fórmula de la ecuación para obtener la coordenada **y** que corresponde a **x = 2**
Reemplazando en la función dada **x** por 2, obtenemos y = 3(2)² = 3 .4 = 12

Esto significa que el punto (2, 12) es el punto donde la tangente que estamos buscando toca a la función.

Reemplazando estos valores en la **x** y la **y** de la ecuación de la recta podemos averiguar el valor de b.
y = m x + b
12 = 12∗2 + b
12 = 24 + b
12 – 24 = b
-12 = b

Luego la ecuación de la recta tangente buscada será **y = 12x - 12**

A modo de síntesis:

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado debemos:

1. Calcular la derivada de la función en ese punto para obtener la pendiente de la recta tangente.
2. Hallar las coordenadas del punto de tangencia, reemplazando la x del punto en la fórmula de la función dada.
3. Reemplazar la pendiente y las coordenadas del punto en la ecuación general de la recta y = m x + b para obtener el valor de la ordenada al origen de la recta, es decir el valor de b
4. Escribir la ecuación de la recta reemplazando los valores hallados de m y b en la ecuación y = m x + b

Ejemplo:
Hallar la ecuación de la recta tangente a la función
$f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $x = -2$

Solución:
Recordemos que la fórmula para calcular la derivada de una función en un punto es: $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

Reemplacemos en esta fórmula, “a” por “x”

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 2 - (x^2 - 3x + 2)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x + 2 - x^2 + 3x - 2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 3)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} 2x + 0 - 3$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

Hemos partido de la expresión de una función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y obtenido la expresión de otra función **$f'(x) = 2x - 3$** que llamaremos función derivada y que permite calcular la derivada de una función en cualquier punto

$$f'(a) = m = 2(-2) - 3 = -7$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente buscada será m = -7
Ahora debemos hallar el valor de b.
Para ello necesitamos conocer algún punto de la recta tangente, es decir algún punto de coordenadas (x, y) que hagan verdadera la igualdad y = -7x + b

Ahora bien, el punto donde la recta tangente toca a la función es un punto que pertenece a la recta y a la función. Utilicemos entonces la fórmula de la ecuación para obtener la coordenada **y** que corresponde a **x = -2**
Reemplazando en la función dada **x** por -2, obtenemos:
$y = (-2)^2 -3(-2) + 2 = 12$
Esto significa que el punto (-2, 12) es el punto donde la tangente que estamos buscando toca a la función.

Reemplazando estos valores en la **x** y la **y** de la ecuación de la recta podemos averiguar el valor de b.
$y = m x + b$
$-12 = -7(-2) + b$
$-12 = 14 + b \Longrightarrow b = -14 - 12 \Longrightarrow$ **b = -26**

Luego la ecuación de la recta tangente buscada será **y = -7x - 26**

Ejemplo:
Hallar la ecuación de la recta tangente a la función
$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$ En x = 1

Solución:

Recordemos que la fórmula para calcular la derivada de una función en un punto es: $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6} - \sqrt{x^2-4x+6}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6} - \sqrt{x^2-4x+6}}{\Delta x} * \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6} + \sqrt{x^2-4x+6}}{\sqrt{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6} + \sqrt{x^2-4x+6}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-4x+6}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x^2-4x+6}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6 - (x^2-4x+6)}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6} + \sqrt{x^2-4x+6}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4x - 4\Delta x + 6 - x^2 + 4x - 6}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6} + \sqrt{x^2-4x+6}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 4)}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 6} + \sqrt{x^2-4x+6}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+0-4)}{\left(\sqrt{(x+0)^2-4(x+0)+6} + \sqrt{x^2-4x+6}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x-4}{\left(\sqrt{x^2-4x+6} + \sqrt{x^2-4x+6}\right)} = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x+6}}$$

f '(x) = $\mathbf{\frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+6}}}$

Esta es la derivada de la función inicial, ahora hallamos la pendiente cuando x = 1

$$f'(a) = m = \frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+6}} = f'(1) = m = \frac{(1-2)}{\sqrt{1^2-4(1)+6}} = m = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathbf{m = \frac{-\sqrt{3}}{3}}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente buscada será m = $\mathbf{\frac{-\sqrt{3}}{3}}$

Ahora debemos hallar el valor de b.

Para ello necesitamos conocer algún punto de la recta tangente, es decir algún punto de coordenadas (x, y) que hagan verdadera la igualdad y =$\mathbf{\frac{-\sqrt{3}}{3}}$ x + b

Ahora bien, el punto donde la recta tangente toca a la función es un punto que pertenece a la recta y a la función. Utilicemos entonces la fórmula de la ecuación para obtener la coordenada **y** que corresponde a **x = 1**

Reemplazando en la función dada **x** por 1, obtenemos:

y = $\sqrt{1-4(1)+6}$ = $\sqrt{3}$

Esto significa que el punto (1, $\sqrt{3}$) es el punto donde la tangente que estamos buscando toca a la función.

Reemplazando estos valores en la **x** y la **y** de la ecuación de la recta podemos averiguar el valor de b.

y = m x + b

$\sqrt{3}$ = $\mathbf{\frac{-\sqrt{3}}{3}}$(1) + b

b = $\sqrt{3}$ + $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Luego la ecuación de la recta tangente buscada será y = $\frac{-\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Usted habrá notado que todas las funciones con las que hemos trabajado son funciones polinómicas. El cálculo de la derivada de una función mediante el límite del cociente de los incrementos puede aplicarse también en el caso de funciones que no sean polinómicas. Sin embargo resulta, en la mayoría de los casos, extenso y complicado. Para evitar tener que hacer estos cálculos existen reglas que permiten realizar el cálculo directo de la derivada.

Estas reglas pueden ser demostradas pero no lo haremos porque el objetivo de este módulo es avanzar en las aplicaciones.
Trataremos de encontrar una regla para derivar funciones polinómicas a partir de la observación de los resultados de la actividad anterior

5.4. REGLA GENERAL DE LA DERIVADA

La regla general para derivación es fundamental, puesto que se deduce directamente de la definición de derivada, y es muy importante que el estudiante se familiarice completamente con ella. Sin embargo, el procedimiento de aplicar la regla en la resolución de problemas es largo o difícil; por consiguiente, se han deducido de la regla general, a fin de facilitar la tarea, reglas especiales para derivar ciertas fórmulas normales que se presentan con frecuencia.

Es cómodo expresar estas reglas especiales por medio de fórmulas de las cuales se da a continuación una lista. El estudiante no sólo debe aprender de memoria cada fórmula cuando se ha deducido, sino también poder enunciar en palabras la regla correspondiente. Aquí se aplica la estrategia demostración en las formulas.

Podemos observar que en cada término de la función derivada el coeficiente se obtiene multiplicando el coeficiente del término de la función por su exponente y el exponente de cada término de la función derivada se obtiene restando 1 al exponente de ese término de la función.

Por ejemplo:
En la función $f(x) = 3x^2 + 2x$ el primer término tiene como coeficiente 3 y como exponente 2, luego el coeficiente del primer término de la función derivada será 3 por 2 = 6.

Por otra parte, como el exponente del primer término de la función era 2, se resta 1 por lo tanto el exponente del primer término de la función derivada será 1. En el segundo término de la función el coeficiente era 2 y el exponente 1, luego el coeficiente del segundo término de la función derivada será 2 por 1 = 2.

En cuanto al exponente, en el segundo término de la función era 1, luego en la función derivada el exponente del segundo término será 0.
$f(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow \mathbf{f'(x)} = 3*2x^{2-1} + 2*1x^{1-1} \Rightarrow \mathbf{f'(x) =} 6x^1 + 2x^0$
$\Rightarrow \mathbf{f'(x) =} 6x + 2$

Para recordar

Recuerde que todo número elevado a la cero es uno por lo tanto x^0 =1 y no hace falta escribirlo.

Apliquemos esta regla a la función 5x + 4

En el primer término el coeficiente es 5 y el exponente es 1, Luego el coeficiente del primer término de la función derivada será 5 y el exponente, 0.
En el segundo término el coeficiente es 4 y el exponente 0, luego el coeficiente del segundo término de la función derivada será 4. 0 = 0 y por lo tanto no se escribe.

f(x) = $5x^1$ + $4x^0$
$\mathbf{f'(x)} = 5*1x^{1-1} + 4*0x^{0-1}$
$\mathbf{f'(x)} = 5x^0 + 0*x^{-1}$
$\mathbf{f'(x)} = \mathbf{5}*1 + 0 = 5$

Por lo tanto siempre que los términos de una función sean de la forma: ax^n los términos de la función derivada serán de la forma: $a*nx^{n-1}$

$$\mathbf{f(x) = ax^n \implies f'(x) = a*nx^{n-1}}$$

5.5. TECNICAS DE DERIVACIÓN

5.5.1. Derivada de una constante

La derivada de una constante es cero.

Sea f(x) = c .Aplicando la definición de derivada tenemos:

$$: f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Luego $\frac{d}{dx}c = 0$

Ejemplo 1:

f(x) = 5 $\Longrightarrow$ f '(x) = 0

Ejemplo 2:

f(x) = 6abc $\Longrightarrow$ f '(x) = 0

5.5.2. Derivada de una variable con respecto a si misma

La derivada de una variable con respecto a si misma es la unidad

Ejemplo:

f(x) = x $\Longrightarrow$ f '(x) = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 \Longrightarrow$ 1

f '(x) = 1

5.5.3. Derivada de una constante con respecto a una variable

La derivada de una constante con respecto a una variable es igual a la constante

f(x) = ax $\Longrightarrow$ f '(x) = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a\,\Delta x}{\Delta x} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} a$ = a

f(x) = ax $\Longrightarrow$ f '(x) = a

Ejemplo:

f(x) = -3x $\Longrightarrow$ f '(x) = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-3(x + \Delta x) - (-3x)}{\Delta x} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-3x - 3\Delta x + 3x}{\Delta x}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x} \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} -3$ = -3

f(x) = -3x $\Longrightarrow$ f '(x) = -3

5.5.4. Derivada de una raíz

Antes de comenzar el proceso de la derivada se debe transformar la función radical en una función exponencial teniendo en cuenta la siguiente propiedad de potenciación de números reales:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$$

Por consiguiente la derivada de la función es:

f(x) = $\boldsymbol{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \Longrightarrow}$ **f '(x) =** $\boldsymbol{\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}}$

Ejemplo:

Derivar la siguiente función f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$

Solución:

Transformamos la función radical a una función exponencial

f(x) = $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

f '(x) = $\frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}}$

Como el exponente es negativo y fraccionario, se debe transformar a positivo y a raíz.

f '(x) $= \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}$

Por consiguiente la derivada de la función es:

f(x) = $\sqrt[3]{\mathrm{x}^2} \Longrightarrow$ **f '(x) =** $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}\sqrt[3]{\boldsymbol{X}}}$

5.5.5. Derivada de una constante sobre una variable:

Antes comenzar a realizar el proceso de la derivada debemos tomar la variable del denominador y pasarla al numerador lo que hace que el signo del exponente de la variable cambia de signo así:

$$\frac{k}{x^n} = \mathrm{k}x^{-n}$$

Entonces la derivada de esta función será:

f(x) = $\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x^n}}$ **=** $\mathbf{k}\boldsymbol{x}^{-n} \Longrightarrow$ **f '(x) = -n.k**$\mathbf{x}^{-\mathbf{n}-\mathbf{1}}$

Ejemplo:

Derivar la siguiente función f(x) = $\frac{-5}{x^4}$ = - 5x^{-4}

Solución:

Transformamos la función para después derivar

f(x) = $\frac{-5}{x^4}$ = -5x^{-4}

f '(x) = -5(-4) x^{-4-1} = 20x^{-5}

Como el exponente es negativo lo transformamos a positivo y la derivada de la función queda así:

f(x) = $\frac{-5}{x^4} \Longrightarrow$ f '(x) = $\frac{20}{x^5}$

5.5.6. Derivada de una suma y diferencia de funciones

Una demostración semejante es válida para la suma algebraica de cualquier número de funciones

La derivada de la suma algebraica de un número finito n de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones

$$(f \pm g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \pm g)(x + \Delta x) - (f \pm g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)] - [f(x) \pm g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] \pm [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$= f'(x) \pm g'(x)$

Ejemplo:
Calcular la derivada de la siguiente función:
$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 8x + 7$

Solución:
$f'(x)$ $= 4*3x^{3-1} - 3*2x^{2-1} + 8x^{1-1} + 0$
$f'(x)$ $= 12x^2 - 6x + 8$

5.5.7. Deriva del producto de dos funciones:

La derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera

Se puede derivar la regla usando las características del límite y la definición de la derivada como el límite del cociente de la diferencia.

Se comienza con: $f(x) = g(x).h(x)$

Suponiendo que g y h son diferenciables en la variable x. Entonces

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x).h(x+\Delta x) - f(x)h(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x).\big(h(x+\Delta x) - h(x)\big) + h(x).(g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

f '(x) = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x).(h(x+\Delta x)-h(x))}{\Delta x} + \frac{h(x).(g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

f '(x) = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x).(h(x+\Delta x)-h(x))}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x).(g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

f '(x) = $\lim_{\Delta x \to 0} g(x).\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} h(x).\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$

$$f'(x) = g(x).h'(x) + h(x).g'(x)$$

Ejemplo:
Calcular la derivada del producto de las siguientes funciones:
$f(x) = (3x^2 - x + 4)(x^3 + 2x)$

Solución:
f '(x) = $(3x^2 - x + 4)(x^3 + 2x)' + (x^3 + 2x)(3x^2 - x + 4)'$

f '(x) = $(3x^2 - x + 4)(3x^2 + 2) + (x^3 + 2x)(6x - 1)$

Ahora realizamos una multiplicación de polinomios

f '(x) = $9x^4 + 6x^2 - 3x^3 - 2x + 12x^2 + 8 + 6x^4 - x^3 + 12x^2 - 2x$

Agrupamos términos semejantes:
$f'(x) = 15x^4 - 4x^3 + 30x^2 - 4x + 8$

5.5.8. Derivada de un cociente de dos funciones

La derivada del cociente de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es igual a la derivada de $f(x)$ por $g(x)$ sin derivar menos la derivada de $g(x)$ por $f(x)$ sin derivar, todo sobre $g(x)$ al cuadrado
Entonces:

$$(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

A partir de la definición de derivada

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$; donde $h(x) \neq 0$ y g(x) y f(x) son derivables. Entonces:

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{g(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)} - \frac{g(x)}{h(x)}}{\Delta x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{g(x+\Delta x).h(x) - h(x+\Delta x).g(x)}{h(x+\Delta x).h(x)}\right]$$

Sumo y resto $g(x)h(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{g(x+\Delta x).h(x) - g(x)h(x) - h(x+\Delta x).g(x) + g(x)h(x)}{h(x+\Delta x).h(x)}\right]$$

Agrupo términos semejantes y aplico factor común

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{g(x+\Delta x).h(x) - g(x)h(x) - h(x+\Delta x).g(x) + g(x)h(x)}{h(x+\Delta x).h(x)}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{h(x)\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)h(x) - g(x)\big(h(x+\Delta x) - h(x)\big)}{h(x+\Delta x).h(x)}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}h(x) - \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}g(x)}{h(x+\Delta x).h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)h(x) - g(x)\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}\right)}{h(x)h\left(\lim_{\Delta x \to 0}(x+\Delta x)\right)}$$

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{\mathbf{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}}{[\boldsymbol{h(x)}]^{2}}$$

Ejemplo:

Calcular la derivada de: f(x) = $\frac{4x^3 - 5x^2}{3x^2 - 4}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(4x^3 - 5x^2)'(3x^2 - 4) - (3x^2 - 4)'(4x^3 - 5x^2)}{(3x^2 - 4)^2}$$

f '(x)= $\dfrac{\left(12x^{2}-\ 10x\right)\left(3x^{2}-\ 4\right)-\ (6x)\left(4x^{3}-\ 5x^{2}\right)}{(3x^{2}-\ 4)^{2}}$

f '(x)= $\dfrac{36x^{4}-48x^{2}-30x^{3}+40x-24x^{4}+30x^{3}}{(3x^{2}-\ 4)^{2}}$

f '(x)= $\dfrac{12x^{4}-72x^{2}+40x}{(3x^{2}-\ 4)^{2}}$

5.5.9. Derivación de la función logarítmica

1. **Derivada de logaritmo natural:** La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función (o la derivada de la función multiplicada por su reciproca)

   Sea y = ln v

   Derivando considerando v como una función de variable independiente x, tenemos:

   $\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$ **= y' =** $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}}\dfrac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$ **=** $\dfrac{\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}}$

   Ejemplo:
   Derivar la siguiente función logaritmo natural
   y = lnx
   y' = $\dfrac{(\mathrm{x})'}{x}=\dfrac{1}{x}$

   Ejemplo:
   Derivar la siguiente función logaritmo natural
   y = ln(3x² - 4x + 1)

   Solución:
   y' = $\dfrac{(3\mathrm{x}^{2}-4\mathrm{x}+1)'}{3\mathrm{x}^{2}-4\mathrm{x}+1}=\dfrac{6x-4}{3\mathrm{x}^{2}-4\mathrm{x}+1}$

2. **Derivada de logaritmo de base:** La derivada del logaritmo de base de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función por el logaritmo de base de Euler
   Sea y = Log v = $\log e$. Ln v

   Entonces = $\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$ **= y' =** $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}}\dfrac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}\ \mathbf{log}\,\boldsymbol{e}$ **=** $\dfrac{\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}}\ \mathbf{log}\,\boldsymbol{e}$

Ejemplo:
Derivar la siguiente función logaritmo de base:
y = Log(x^2 + 3x + 1)

Solución:

$$y' = \frac{(\mathbf{x^2 + 3x + 1})'}{\mathbf{x^2 + 3x + 1}} \log e = \frac{\mathbf{2x + 3}}{\mathbf{x^2 + 3x + 1}} \log e$$

5.5.10. Derivación de la función exponencial

La derivad de una constante elevada a un exponente variable es igual al producto del logaritmo natural de la constante por la constante elevada al exponente variable y por la derivada del producto.

1. **y = a^v**; siendo a una constante y v una función.

   Tomando logaritmos de base e en ambos miembros, obtenemos
   ln y = ln a^v ⇒ ln y = v.ln a

   Ósea que v = $\frac{\ln y}{\ln a} = \frac{1}{lna} . \ln y$

   Derivando con respecto a y según la formula x, resulta:
   $$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{lna} \cdot \frac{1}{y}$$

   De las funciones inversas, obtenemos
   $\frac{dy}{dv} = lna.y.$ ósea que $\frac{dy}{dv} = lna.\ a^v$

   Puesto que v es una función de x y queremos hallar la derivada de a^v con respecto a x. Así obtenemos:

   $$\frac{dy}{dx} = lna.\ a^v . \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = lna.\ a^v.\ v'$$

   Ejemplo:
   Derivar la siguiente función exponencial:
   y = 3^{5x^2-4}

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = ln3.\ 3^{5x^2-4}(5x^2 - 4)' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ln3.\ 3^{5x^2-4}(10x)$$

2. Cuando a = e, In a = In e =1, entonces:
y = e^{v}; siendo e la constante de Euler y v una función
Entonces: $\frac{dy}{dx} = lne.\ e^{v}.\ v' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{v}.\ v'$

Derivar la siguiente función exponencial:
y = $e^{\frac{3x-1}{x+2}}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = e^{e^{\frac{3x-1}{x+2}}}.\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{e^{\frac{3x-1}{x+2}}}.\left[\frac{(3x-1)'(x+2)-(x+2)'(3x-1)}{(x+2)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{e^{\frac{3x-1}{x+2}}}.\left[\frac{3(x+2)-1(3x-1)}{(x+2)^2}\right] = e^{e^{\frac{3x-1}{x+2}}}.\left[\frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{e^{\frac{3x-1}{x+2}}}.\left[\frac{7}{(x+2)^2}\right]$$

5.6. REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena se enuncia si se tiene una función y = f(u) derivable de u, y u = g(x), es decir, derivable de x, entonces se puede afirmar que y = f[g(x)] siendo función derivable de x, con

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \text{ Que es lo mismo } \frac{d}{dx}[f(g)(x)] = f'\ [g(x)]g'(x)$$

Es decir, la derivada de y con respecto a x es la derivada de y con respecto a u multiplicada por la derivada de u con respecto a x

Ejemplo:
Aplicar la regla de la cadena para derivar las siguientes funciones:
y = u^2 - 4u + 2 u = e^{x+1}

Solución:

$\frac{dy}{du}$ = 2u – 4 $\quad$ $\frac{du}{dx} = e^{x+1}$

Aplicando la formula $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$ = (2u – 4)(e^{x+1})

Sustituimos el valor de u
$\frac{dy}{dx}$ = [2(e^{x+1})– 4].(e^{x+1})

5.7. REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES EXPONENCIALES

De acuerdo a la función y = $[f(x)]^n$, la derivada de la regla de la cadena con respecto a x, el exponente de la función pasa a multiplicar a la función y a este exponente se le resta uno, todo por la multiplicación de la función.

Entonces:

$$y = [f(x)]^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n. [f(x)]^{n-1}[f(x)]'$$

Ejemplo:
Aplicar la regla de la cadena para derivar la siguiente función:

y = $[5x^3 - 4x^2 + 6]^4$

Solución:
$\frac{dy}{dx} = 4[5x^3 - 4x^2 + 6]^{4-1}[5x^3 - 4x^2 + 6]'$

$\frac{dy}{dx} = 4[5x^3 - 4x^2 + 6]^3[15x^2 - 8x] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = [5x^3 - 4x^2 + 6]^3[60x^2 - 32x]$

Ejemplo:
Aplicar la regla de la cadena para derivar la siguiente función:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3}{x + 1}}$$

Solución

Transformamos la función radical a una función exponencial y comenzamos a aplicar la derivada de regla de la cadena.

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2-3}{x+1}} = \left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)^{\frac{-2}{3}}\left[\frac{(x^2-3)'(x+1)-(x+1)'(x^2-3)}{(x+1)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)^{\frac{-2}{3}}\left[\frac{2x(x+1)-1(x^2-3)}{(x+1)^2}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)^{\frac{-2}{3}}\left[\frac{2x^2+2x-x^2+3}{(x+1)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)^{\frac{-2}{3}}\left[\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\right]$$

Como el exponente es negativo y fraccionario se transforman

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left[\frac{x+1}{x^2-3}\right]^2}\left[\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\right]$$

5.8. DERIVADA IMPLÌCITA DE UNA FUNCIÓN

Derivar implícitamente es considerar uno de los términos (y) de una igualdad como función del otro término (x), para que después de tener la ecuación resultante se despeje el valor de dy / dx.

Para realizar dicho procedimiento se recomienda utilizar los siguientes pasos:

- Derivar a los dos lados de la igualdad de la ecuación respecto a x cada termino
- Derivar a los dos lados de la igualdad de la ecuación respecto a y cada termino agregando $\frac{dy}{dx}$ al término derivado
- Aislar los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo de la ecuación y los demás en el lado derecho
- Factorizar $\frac{dy}{dx}$
- Despejar $\frac{dy}{dx}$ dividiendo al polinomio del lado derecho de la ecuación por el factor del lado izquierdo
- Recordar que cuando se deriva con respecto a una variable la otra es constante, ose se conserva tal cual está en el término derivado

Ejemplo:

Derivar la siguiente función de manera implícita
$3x^2y^3 - 4xy^2 + 5x - y = 7x^2y - x + 8$

Solución:
$6xy^3 + 9x^2y^2\frac{dy}{dx} - 4y^2 - 8xy\frac{dy}{dx} + 5 - 1\frac{dy}{dx} = 14xy - 7x^2\frac{dy}{dx} - 1$
$9x^2y^2\frac{dy}{dx} - 8xy\frac{dy}{dx} - 1\frac{dy}{dx} + 7x^2\frac{dy}{dx} = - 6xy^3 + 14xy + 4y^2 - 5 - 1$
$\frac{dy}{dx}(9x^2y^2 - 8xy - 1 + 7x^2) = - 6xy^3 + 14xy + 4y^2 - 6$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6xy^3 + 14xy + 4y^2 - 6}{9x^2y^2 - 8xy - 1 + 7x^2}$$

5.9. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Las funciones son una herramienta que se utiliza para modelar situaciones en disciplinas como la física, la economía, la biología y otras. En esos casos se plantea la función que modela la situación y a continuación se realiza un estudio de esa función.

La aplicación de las derivadas en la física, para calcular velocidades y aceleraciones a partir de las funciones que describen la posición de un móvil en función del tiempo. Asimismo, el análisis de las funciones derivadas permite realizar un estudio más profundo de las funciones y por lo tanto estar en condiciones de tomar decisiones relativas a la disciplina en cuestión.

Por ejemplo, en economía, cuando una empresa debe decidir qué cantidad de productos fabricar para minimizar los costos las derivadas también resultan una herramienta útil para dar respuesta a este problema
.
Pero antes debemos tener claros algunos conceptos que nos permitirán, más adelante, abordar la resolución de problemas concretos donde la derivada permite estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función. También la relación que existe entre la derivada de una función en un punto y la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en ese punto.

Dentro de las aplicaciones de las derivadas quizás una de las más importantes es la de conseguir los valores máximos y mínimos de una función. También la derivada es una herramienta muy útil para graficar funciones. Estos serán dos de los temas que trataremos en este capítulo.

5.9.1. EXTREMOS ABSOLUTOS Y PUNTOS CRÍTICOS

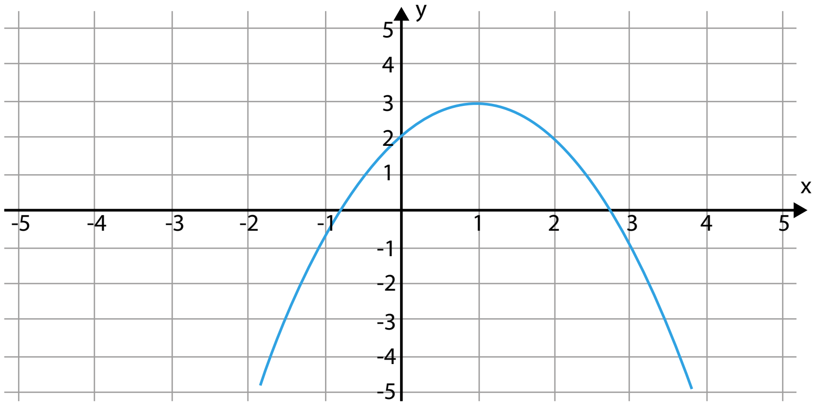
Un problema de mucho interés es buscar la mejor alternativa frente a muchas posibilidades de decisión. En términos matemáticos, muchas veces este planteamiento se traduce en buscar el máximo o el mínimo de una función y donde se alcanza este máximo o mínimo. Cuando la función es cuadrática se pueden determinar estos valores buscando el vértice de la gráfica de este tipo de función. Para funciones más generales, la derivada puede ayudar a resolver este problema.

Recordemos primero la definición de valor máximo y mínimo

- **MAXIMO RELATIVO[40]:**
  Decimos que un punto de una función es un máximo relativo si existe algún intervalo al cual pertenezca ese punto en el que el valor de la función en ese punto es mayor que cualquier otro valor de la función en ese intervalo.

  Cuando una función alcanza un máximo relativo pasa de ser creciente a ser decreciente.

  Si f(c) es el valor máximo de f en **I** entonces se dice que f alcanza su valor máximo en x = c. En la figura, el punto (c, f(c)) es el punto más alto de la gráfica de la función en **I**= (a, b).

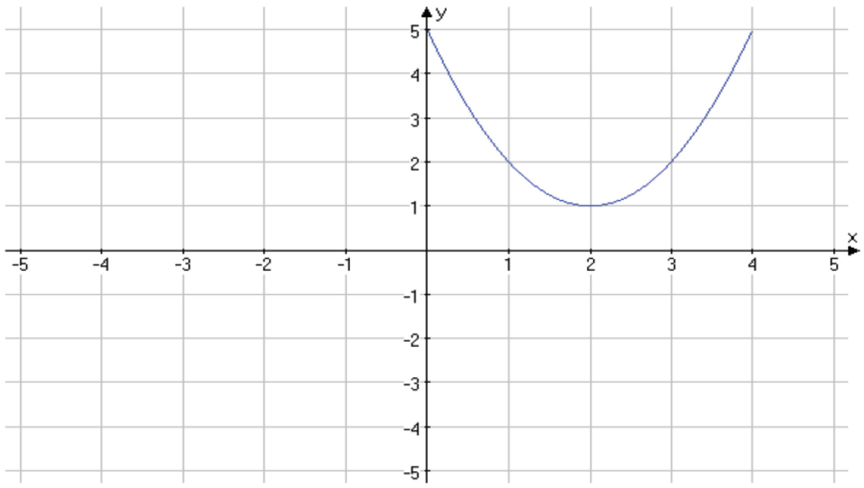


  Esta función tiene un máximo relativo en el punto (1; 3)

- **MINIMO RELATIVO[41]:**
  Decimos que un punto de una función es un mínimo relativo si existe algún intervalo al cual pertenezca ese punto en el que el valor de la función en ese punto es menor que cualquier otro valor de la función en ese intervalo.

  Cuando una función alcanza un mínimo relativo pasa de ser decreciente a ser creciente

[40] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/
[41] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/



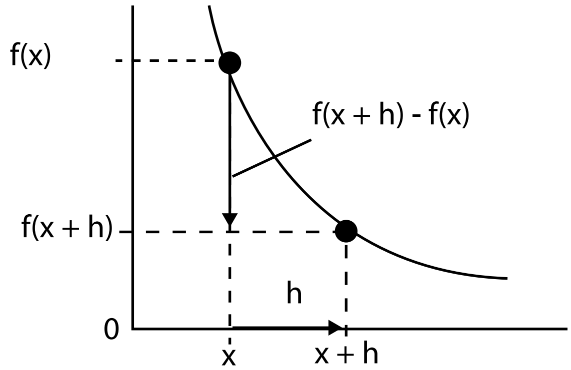
Esta función tiene un mínimo relativo en el punto (2; 1)

5.9.2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

- **DECRECIMIENTO DE UNA FUNCION:**
  Una función es decreciente en un intervalo si para todo par de valores a y b de ese intervalo se cumple que si a < b entonces f(a) > f(b)

  Esto significa que una función es decreciente en un intervalo si a medida que vamos tomando valores x del intervalo cada vez mayores, los valores de f(x) son cada vez menores.

GRAFICA DE DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN[42]



$$\text{Si } x < x + h \Rightarrow f(x) > f(x + h)$$

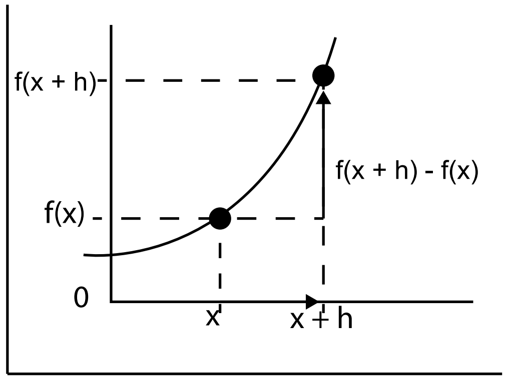
[42] https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/concepto-de-funcic3b3n.pdf

- **CRECIMIENTO DE UNA FUNCION:**

  Una función es creciente en un intervalo si para todo par de valores a y b de ese intervalo se cumple que si a < b entonces f(a) < f(b).

  Esto significa que una función es creciente en un intervalo si a medida que vamos tomando valores x del intervalo cada vez mayores, los valores de f(x) también son cada vez mayores.

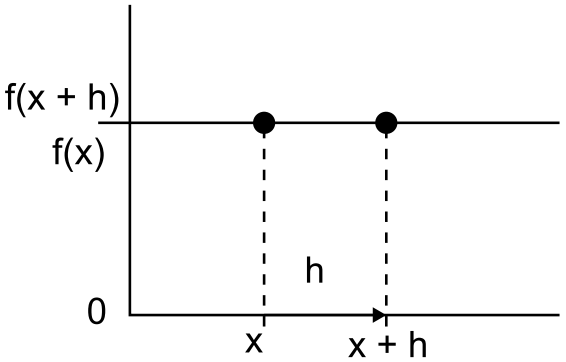
GRAFICA DE CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN[43]



$$\text{Si } x < x + h \Rightarrow f(x) < f(x + h)$$

- **FUNCION CONSTANTE:** Una función f(x) es constante en un intervalo si para todo par de valores $x < x + h$ entonces se verifica que $f(x) = f(x + h)$

GRAFICA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE[44]



$$\text{Si } x < x + h \Rightarrow f(x) = f(x + h)$$

[43] https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/concepto-de-funcic3b3n.pdf
[44] https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/concepto-de-funcic3b3n.pdf

CRITERIOS DE LA DERIVADA PARA INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

1. Si $f'(x) > 0$ en el intervalo $a < x < b$, entonces f(x) es creciente en este intervalo

2. Si $f'(x) < 0$ en el intervalo $a < x < b$, entonces f(x) es decreciente en este intervalo

3. Si $f'(x) = 0$ en el intervalo $a < x < b$, entonces f(x) es constante

   Ejemplo:
   Graficar la siguiente función y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

   Solución:

❖ **Crecimiento de la función:**

$f'(x) = 2x - 6 > 0 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow (3,\infty)$

La función crece de 3 hasta el infinito

❖ **Decrecimiento de la función:**

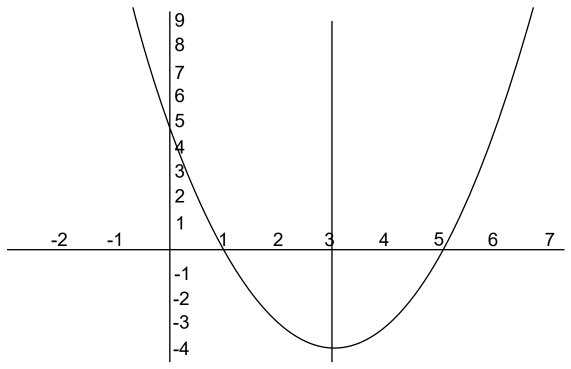
$f'(x) = 2x - 6 < 0 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow (-\infty,3)$

La función decrece desde menos infinito hasta 3

GRAFICA DEL CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN[45]:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	5	0	-3	-4	-3	0	5



45 http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

5.9.3. PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN

Un punto x_0 se denomina punto crítico de la curva f(x) si la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto es igual a cero

Teniendo como base la derivada de una función, x_0 es un punto crítico si f'(x) = 0
Los máximos y los mínimos relativos de una función pueden ocurrir en puntos críticos.

Ejemplo:
Teniendo en cuenta el ejemplo anterior hallemos los puntos críticos
$f(x) = x^2 - 6x + 5$

Solución:
$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \mathbf{3}$
Observamos que cuando x = 3 es un punto crítico y la función alcanza un mínimo relativo

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Igual que la primera derivada, la segunda derivada proporciona información acerca del comportamiento de una función y de su gráfica.

La segunda derivada nos brinda información sobre la concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica.

5.9.4. CONCAVIDAD DE UNA FUNCIÓN

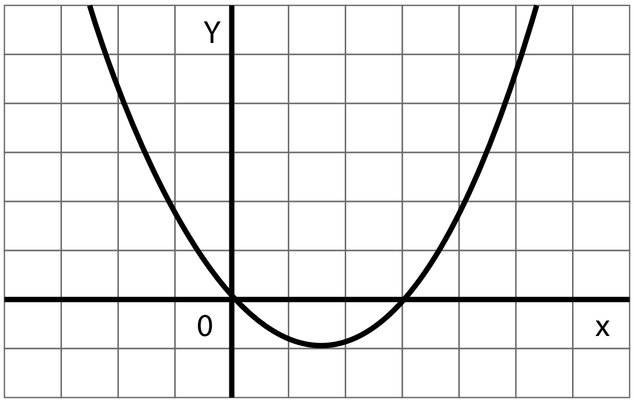
La curva de una gráfica se le denomina concavidad. El criterio para determinar la clase de concavidad de la gráfica de una función nos la ofrece la segunda derivada

- **Concavidad hacia arriba:**

Una función es cóncava hacia arriba en un punto (c. f(c)) si existe f'(c) y un intervalo abierto que contiene a c tal que para todos los valores de $x \neq c$ en el intervalo, el punto (x, f(x)) de la gráfica está arriba de la recta tangente a la gráfica (c. f(c))

Entonces si $f''(x) > 0$ en el intervalo $a < x < b$ entonces f(x) es continua hacia arriba en este intervalo

GRAFICA DE UNA FUNCIÓN CÓNCAVA HACIA ARRIBA[46]

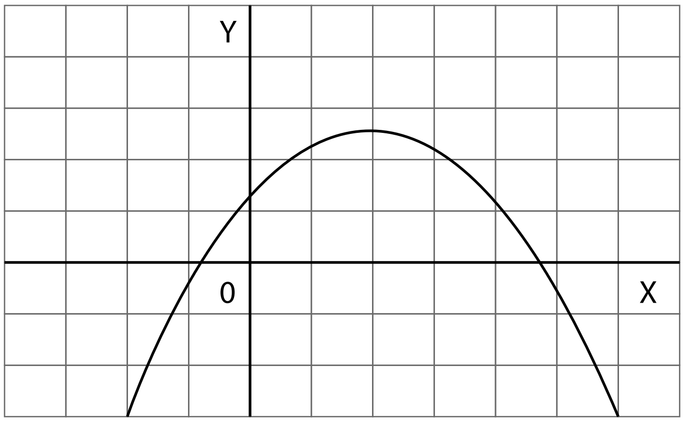


- **Concavidad hacia abajo:**

Una función es cóncava hacia abajo en un punto (c. f(c)) si existe f'(c) y un intervalo abierto que contiene a c tal que para todos los valores de $x \neq c$ en el intervalo, el punto (x, f(x)) de la gráfica está debajo de la recta tangente a la gráfica en (c. f(c))

Entonces si $f''(x) < 0$ en el intervalo $a < x < b$ entonces f(x) es continua hacia abajo en este intervalo

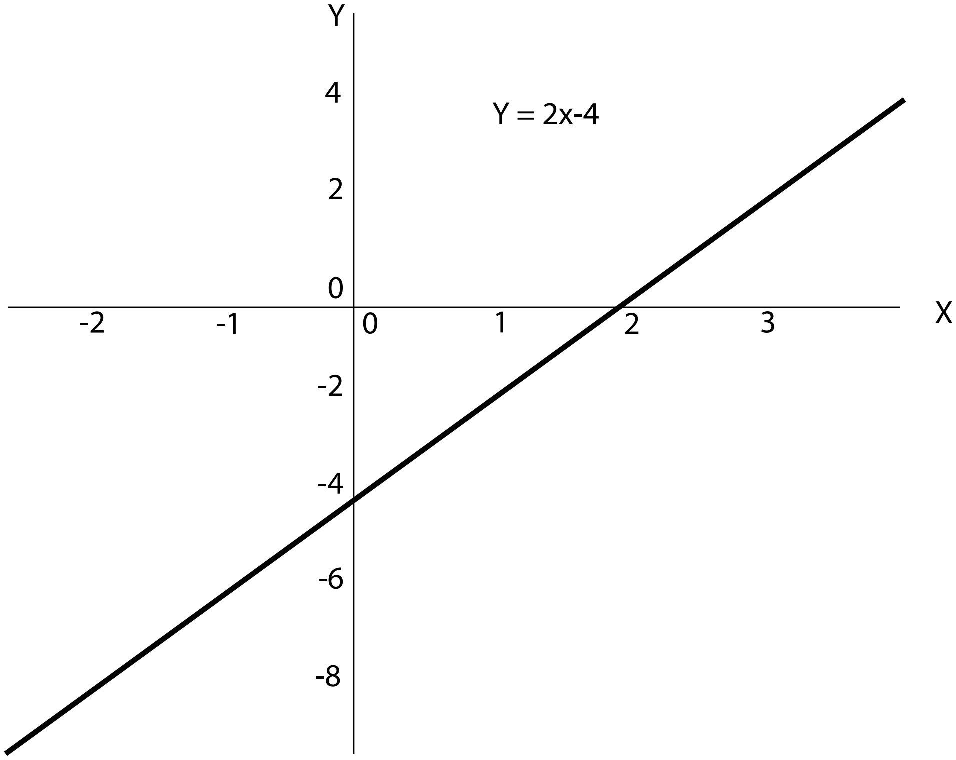
GRAFICA DE UNA FUNCIÓN CÓNCAVA HACIA ABAJO[47]



Si $f''(x) = 0$ no se puede decir acerca de la concavidad porque es una función lineal.

[46] https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/concepto-de-funcic3b3n.pdf
[47] https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/concepto-de-funcic3b3n.pdf

GRAFICA DE UNA FUNCIÓN SIN CONCAVIDAD [48]



5.9.5. PUNTO DE INFLEXION

Los puntos de inflexión son aquellos en los que la función cambia su estado de concavidad.

Suponga que la función es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c y (c, f(c)) es un punto de inflexión de la gráfica de f. Entonces si f''(c) existe, f''(c) = 0

Ejemplo:
Graficar la siguiente función y hallar los intervalos de concavidad y el punto de inflexión $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

Solución:
$f'(x) = 3x^2 -8x + 5 = 0$

Factorizamos
$3\,\frac{3x^2 - 8x + 5}{3} = \frac{9x^2 - 8(3x) + 15}{3} = \frac{(3x-5)(3x-3)}{1\,x\,3} = (3x-5)(x-1)$
Igualamos a cero y despejamos a x
$(3x - 5)(x - 1) = 0$

[48] https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/concepto-de-funcic3b3n.pdf

$3x - 5 = 0 \land \; x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \; \land x = 1$

$x = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \; \land x = 1$ estos son los puntos críticos

Aplicando la formula cuadrática:
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

a = 3; b = -8 y c = 5 entonces

$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2-4(3)(5)}}{2(3)} = \frac{8 \;\pm\; \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \;\pm\; 2}{6}$

PUNTOS CRITICOS $\begin{cases} \boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{8+2}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \\ \boldsymbol{x_2} = \frac{\mathbf{8-2}}{\mathbf{6}} = 1 \end{cases}$

Ahora hallamos la segunda derivada

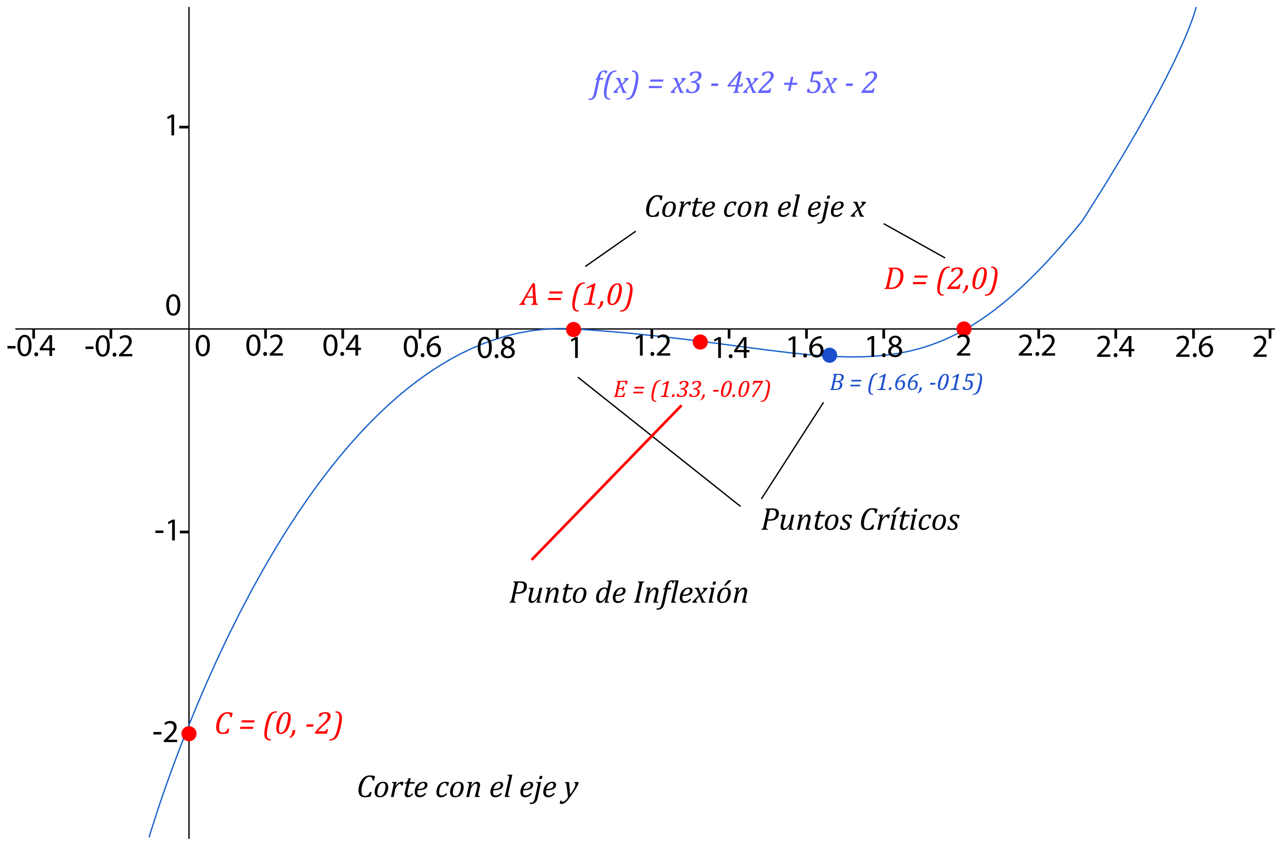
$f''(x) = 6x - 8$
Igualamos a cero y despejamos a x

Punto de inflexión:
$6x - 8\ 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

Concavidad hacia arriba:
$f''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 8 > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3} \Rightarrow (\frac{4}{3}, \infty)$
La función es cóncava hacia arriba de $\frac{4}{3}$ hasta infinito

Concavidad hacia abajo:
$f''(x) < 0 \Rightarrow 6x - 8 < 0 \Rightarrow x < \frac{4}{3} \Rightarrow (-\infty, \frac{4}{3})$
La función es cóncava hacia abajo desde $-\infty$ hasta $\frac{4}{3}$

ANALISIS DE GEOMETRICAMENTE UNA FUNCION[49]



5.9.6. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

MÁXIMO:
Es el tope más alto que puede alcanzar una curva cóncava hacia abajo.
Suponga que f(x) es continua en un intervalo en el cual x = a y es un punto crítico de primer orden y que $f'(a) = 0$

Aplicando el criterio de la segunda derivada, si $f''(a) < 0$ entonces f(a) sería un máximo absoluto de la función en el intervalo.

MINIMO:
Es el tope más bajo que puede alcanzar una curva cóncava hacia arriba.
Suponga que f(x) es continua en un intervalo en el cual x = a y es un punto crítico de primer orden y que $f'(a) = 0$

[49] www.bdigital.unal.edu.co/12613/1/43263449.2014.pdf

Aplicando el criterio de la segunda derivada, si $f''(a) > 0$ entonces f(a) sería un mínimo absoluto de la función en el intervalo.

Ejemplo:
Graficar la siguiente función y hallar los máximos y mínimos.
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Solución.
$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5 = 0$

No se puede factorizar entonces aplicamos la formula cuadrática
$3x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a = 3; b = -4 y c = -5 entonces

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$\textbf{PUNTOS CRITICOS} \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{4+\sqrt{76}}}{\boldsymbol{6}} = \boldsymbol{2.11} \\ \boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{4-\sqrt{76}}}{\boldsymbol{6}} = \boldsymbol{-0.78} \end{cases}$$

Ahora hallamos la segunda derivada
$f''(x) = 6x - 4$

Reemplazamos los puntos críticos:

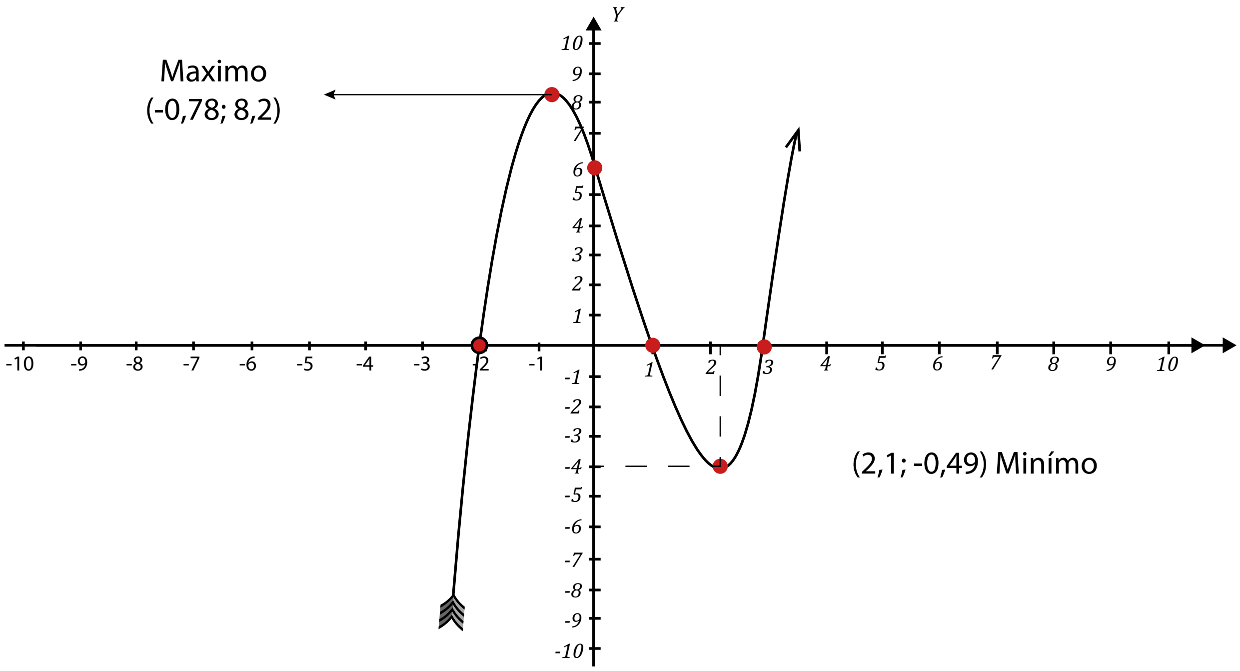
$f''(2.11) = 6(2.11) - 4 = 8.66 \Rightarrow$ **es un mínimo absoluto cuando x = 2.11**

$f''(-0.78) = 6(-0.78) - 4 = -8.68 \Rightarrow$ **es un máximo absoluto cuando x = - 0.78**

GRAFICA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN[50]

x	-3	-2	-1	-0.78	0	1	2	2.11	3
F(x)	-24	0	8	8.2	6	0	-4	-4.06	0

[50] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/



Ejemplo:
Graficar la siguiente función y determinar los puntos críticos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y de concavidad y los máximos y mínimos.
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 3$

Solución:
$f'(x) = x^2 - 9 = 0$

Puntos críticos
$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x - 3 = \ \wedge\ x + 3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 3}\ \wedge\ \mathbf{x = -3}$ puntos críticos

Punto de inflexión:
$f''(x) = 2x = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 0}$, punto de inflexión

Grafica de Máximos, mínimos y Punto de inflexión[51]

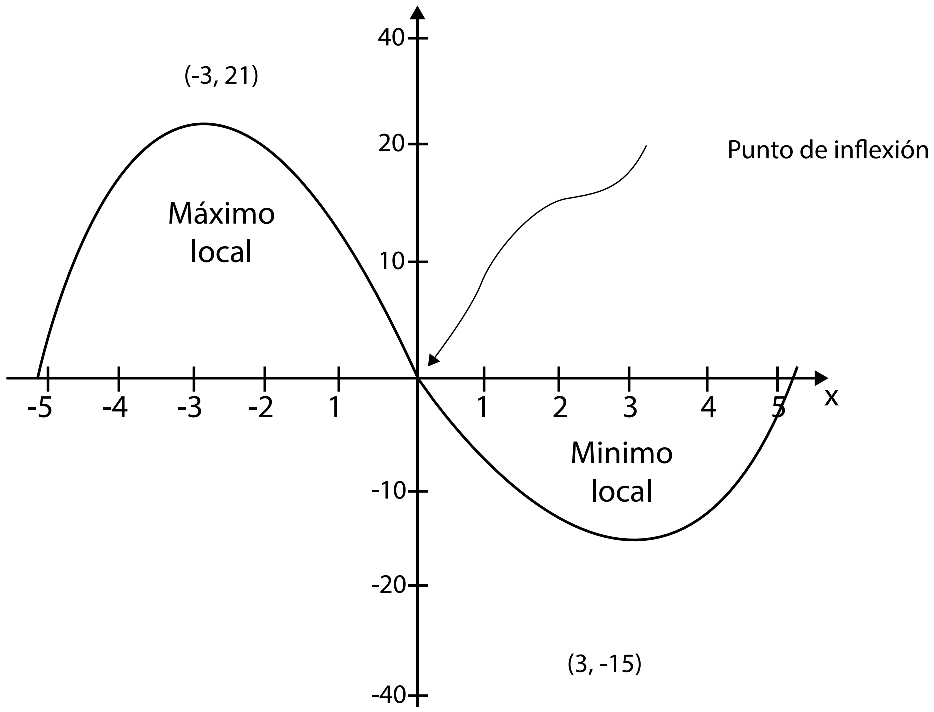
$f''(3) = 2(3) = 6 \Rightarrow$ es un mínimo cuando $x = 3$

$f''(-3) = 2(-3) = -6 \Rightarrow$ es un máximo cuando $x = -3$

Graficar:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F(x)	19/3	53/3	21	55/3	35/3	3	-17/3	-37/3	-15	-35/3	-1/3

[51] gc.initelabs.com/recursos/files/r157r/w13091w/Mate2_Lic_4aEd_06.pdf



ANALISIS DE LA GRAFICA

- **Puntos críticos:**
  x = 3
  x = -3

- **Crecimiento de la función:**
  $(-\infty, -3) \wedge (3, \infty)$

- **Decrecimiento de la función**
  (-3, 3)

- **Punto de inflexión:**
  x = 0

- **Intervalos de concavidad:**
  - Concavidad hacia abajo $(-\infty, 0)$
  - Concavidad hacia arriba $(0, \infty)$

- **Máximos y mínimos:**
  - Máximo: $f''(-3) = 2(-3) = -6 \Rightarrow$ es un máximo cuando x = -3
  - Mínimo: $f''(3) = 2(3) = 6 \Rightarrow$ es un mínimo cuando x = 3

5.10. PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA DERIVADAS EN ECONOMIA

5.10.1. LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

a. RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

Si y = f(x) y la razón de cambio instantánea de y con respecto a x está dada por la derivada de f(x), es decir

$$\textbf{Razón de cambio: } f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo:

Se estima que dentro de x meses la población de cierta comunidad será
$P(x) = x^2 + 20x + 8000$

i. ¿ Cuál será la razón de cambio de la población con respecto al tiempo dentro de 15 meses

Solución:

$P'(x) = 2x + 20 \implies P'(15) = 2(15) + 20 = 50$, esto significa 50 personas al mes

ii. En cuanto cambiara realmente la población durante el mes numero 16

Solución:

Cambio de población
$P(16) - P(15) = [(16)^2 + 20(16) + 8000] - [(16)^2 + 20(16) + 8000]$
$P(16) - P(15) = 8576 - 8525 =$ **51 PERSONAS**

b. RAZÓN DE CAMBIO PORCENTUAL

$$100.\frac{\textbf{Razon de cambio de la cantidad}}{\textbf{tamaño de la cantidad}}$$

Si y = f(x) y la razón de cambio porcentual de y con respecto a x está dada por la fórmula:

$$\textbf{Razón de cambio porcentual} = 100.\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ejemplo:

El producto nacional Bruto (PNB) de cierto país era $N(t) = t^2 + 5t + 106$ miles de millones de dólares, t años después de 1.980

i. ¿A qué razón de cambio el PNB con respecto al tiempo en 1.988?

Solución:
N'(t) = 2t + 5
N'(8) = 2(8) + 5 = 21.
La razón de cambio el PNB con respecto al tiempo en 1.988 es de 21 millones de dólares.

ii. ¿A qué razón de cambio porcentual cambia el PNB con respecto al tiempo en 1.988?

Solución:

Razón de cambio porcentual = $100.\frac{N'(x)}{N(x)}$

Razón de cambio porcentual = $100.\frac{2t+5}{t^2+5t+106}$

Razón de cambio porcentual = $100.\frac{2(8)+5}{(8)^2+5(8)+106}$ = $100\left(\frac{21}{210}\right)$ = 10%

La razón de cambio porcentual cambia el PNB con respecto al tiempo en 1.988 en un 10% anual

5.10.2. OPTIMIZACIÓN EN ECONOMÍA

Hay una gran variedad de problemas en administración y economía donde se emplea la derivada para encontrar máximos y mínimos. Particularmente a una empresa le interesa el nivel de producción donde se alcanza la máxima utilidad o el máximo ingreso o a un fabricante le interesaría saber el nivel de producción en que su costo promedio por unidad es mínimo. Además de estos problemas en esta sección estudiaremos en detalle el problema de control de inventario.

Para ello es necesario que definamos algunos conceptos de la economía.

5.10.2.1. FUNCIÓN COSTO TOTAL, INGRESO Y UTILIDAD

A. Función costo total:
Llamamos función costo total a la función que relaciona los gastos totales de producción con la cantidad k de artículos fabricados. A la función costo total la simbolizaremos CT y es igual a los costos fijos más los costos variable **C(x) = CF + CV**

Costos Fijos (CF): son aquellos factores que no varían en el corto plazo, es decir, que son independientes del nivel de producción (como la maquinaria, el alquiler del edificio...

Costos Variables (CV): Son aquellos costes que aumentan cuando aumentamos el producto total (como son las materias primas o materiales, y la mano de obra o factor trabajo)

B. Función costo medio

Llamaremos función costo medio a la función que resulta de dividir la función costo total por la variable k.
Esta función permite conocer el costo de cada uno de los artículos fabricados.
A la función costo medio la simbolizaremos CM.

Luego $\overline{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{C}(\mathbf{x})}{x}$

C. Función costo marginal

Es la derivada del costo total y se simboliza CM

CM = C'(x)

D. Función costo medio marginal

Es la derivada del costo medio y se simboliza $\overline{C}$M

$\overline{C}$**M =** $\overline{\mathbf{C}}'(\mathbf{x})$

E. Función ingreso

Es la cantidad de dinero que ingresamos con la venta de nuestros productos. Se calcula multiplicando el precio de venta del producto por el nº de unidades producidas. Se simboliza I

Luego I **= (Precio por unidad).(Número de unidades)** $\Rightarrow$ I **= p.q**

F. Función ingreso marginal

Variación del ingreso total al incrementarse la producción (más específicamente, al incrementarse en una unidad). En otras palabras es la derivada de la función derivada I**M =** I'

G. Función utilidad

Grado de satisfacción derivado del uso o consumo de un bien o servicio.

(Cs. Contables) Diferencia entre los ingresos y los costos en la gestión del negocio o emprendimiento**. U =** I **- C**

H. Función utilidad marginal: Incremento de la utilidad derivado del consumo de una unidad adicional del bien en cuestión. En otras palabras es la derivada de la función utilidad. **UM = U'**

Ejemplo 1:

El costo total de producir q unidades de un artículo está dado por

$C(q) = 5000 + 4q + \frac{1}{2}q^2$

a. ¿Cuántas unidades deberá producirse a fin de obtener el mínimo costo promedio por unidad?
b. ¿Cuál es ese mínimo costo promedio?

Solución:
a. Primero debemos obtener el costo promedio. Este se calcula dividiendo el costo total entre q

$\overline{\mathrm{C}}(q) = \dfrac{5000 + 4q + \frac{1}{2}q^2}{q} = \dfrac{5000}{q} + \dfrac{4q}{q} + \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{q} = \boldsymbol{\dfrac{5000}{q} + 4 + \dfrac{1}{2}q}$

Ahora calculamos la derivada de $\overline{\mathrm{C}}(q)$

$\overline{\mathrm{C}}'(q) = \left(5000q^{-1} + 4 + \frac{1}{2}q\right)' = -5000q^{-2} + \frac{1}{2}$

Igualamos a cero para hallar los valores críticos
$-5000q^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{5000}{q^2} \Longrightarrow q^2 = 2(5000) \Longrightarrow q = \pm\sqrt{10000}$
$q = \pm 100 \Longrightarrow q_1 = 100 \;\wedge\; q_2 = -100$

Eliminamos la solución negativa pues carece de sentido.
Tenemos que clasificar q = 100 que es el único valor crítico en el intervalo [0,∞).

Usaremos el criterio de la segunda derivada
$\overline{\mathrm{C}}''(q) = 10000q^{-3} \Longrightarrow \overline{\mathrm{C}}''(q) = \frac{10000}{q^3} \Longrightarrow \overline{\mathrm{C}}''(100) = \frac{10000}{100^3} > 0$
Cuando se producen 100 unidades tendremos el costo promedio mínimo

b. $\overline{\mathrm{C}}(100) = \frac{5000}{100} + 4 + \frac{1}{2}(100) = 104$ UM
El mínimo costo promedio es 104 UM

Ejemplo 2:
El costo total de producir q unidades de un artículo está dado por $C(q) = 1000 + 300q + \frac{1}{20}q^2$. Si la ecuación de demanda está dada por $p = 400 – 0.1q$
a. ¿Cuántas unidades deberá producirse a fin de obtener la máxima utilidad?
b. ¿Cuál es el precio en que se tiene la máxima utilidad?
c. ¿Cuál es la utilidad máxima posible?
d. Si el gobierno impone un impuesto de 10UM por unidad ¿Cuál es el nuevo nivel de producción que maximiza la utilidad?

Solución:
Primero se debe conseguir la función utilidad U = I - C
En este caso, como $I = p.q = (400 – 0.1q).q = 400q – 0.1q^2$, tenemos

$U(q) = I – C \Longrightarrow U(q) = (400q – 0.1q^2) – (1000 + 300q + \frac{1}{20}q^2)$

$U(q) = 400q – 0.1q^2 - 1000 - 300q - \frac{1}{20}q^2$

$U(q) = - \frac{3}{20}q^2 + 100q - 1000$

a. Ahora derivamos la utilidad

$U'(q) = - \frac{6}{20}q + 100$

Se plantea U'(q) = 0 0para conseguir los puntos críticos

$- \frac{6}{20}q + 100 = 0 \Longrightarrow 100 = \frac{6}{20}q \Longrightarrow q = 100.\frac{20}{6} \Longrightarrow q = \frac{1000}{3}$

Se tiene un único punto crítico. Se usa el criterio de la segunda derivada para clasificar el posible extremo.

$U''(q) = - \frac{6}{20} = - \frac{3}{10}$

Como la segunda derivada (U''(q)) es siempre negativa, así lo es en el número crítico. Por tanto en $q = \frac{1000}{3}$ se alcanza un máximo relativo y por existir un único extremo, éste es absoluto

b. Se sustituye en la ecuación de demanda para obtener el precio de venta máximo.

$p = 400 - 0.1(\frac{1000}{3}) \Longrightarrow p = \frac{1100}{3} \approx 367$ UM.

c. Se consigue el valor máximo de la función utilidad.

$U(q) = - \frac{3}{20}q^2 + 100q – 1000 \Longrightarrow U\left(\frac{1000}{3}\right) = - \frac{3}{20}\left(\frac{1000}{3}\right)^2 + 100\left(\frac{1000}{3}\right) – 1000$

$U\left(\frac{1000}{3}\right) = \frac{47000}{3} \approx 15.667$UM

d. Al imponer un impuesto de 10 UM por unidad los costos totales aumentan en 10q. La nueva función de costos está dada por

$C_i(q) = 1000 + 310q + \frac{1}{20}q^2$.

Y la función de utilidad queda

$U_i(q) = - \frac{3}{20}q^2 + 90q – 1000$

Derivamos

$U'_i(q) = - \frac{6}{20}q + 90$

Se plantea $U'_i(q) = 0$ para conseguir los puntos críticos:

$- \frac{6}{20}q + 90 \Longrightarrow 90 = \frac{6}{20}q \Longrightarrow q = 90.\frac{20}{6} \Longrightarrow q = \frac{900}{3} \Longrightarrow q = 300$

$U''_i(q) = - \frac{3}{10}$

De nuevo, se tiene un único punto crítico $U''_i(q) = -\frac{3}{10}$ y, se concluye de manera similar que arriba: En q = 300 se alcanza un máximo de la función utilidad con impuesto. Para obtener el precio en que se alcanza la máxima utilidad se sustituye en

p = 400 - 0.1(300)

p = 370

Y para la utilidad máxima se sustituye en la función utilidad con impuesto

$U_i(q) = -\frac{3}{20}q^2 + 90q - 1000 \Longrightarrow U_i(300) = -\frac{3}{20}(300)^2 + 90(300) - 1000$

$U_i(q)$ 12.500

Ahora la utilidad máxima es de 12.500UM. Observe que el nuevo precio es de 370 UM.

Ejemplo 3

Un gimnasio tiene la cuota mensual en 100UM. A ese precio se inscriben mensualmente un promedio de 550 clientes. Se quiere subir los precios y se estima que por cada aumento de 2UM se pierden 5 clientes ¿Qué precio se deberá fijar a fin de que el gimnasio obtenga el máximo ingreso?

Solución:

En este caso el ingreso viene dado por

Ingreso = (Número de clientes).(cuota mensual)

Definimos como

x = Número de aumentos de 2 UM.

Es claro que x tiene que ser mayor o igual a cero. Con esta definición tenemos:

Cuota mensual=100 + 2x

Número de clientes= 550 - 5x

Note que el número de clientes dado por esta fórmula es una cantidad no negativa si $x \leq 110$

Sustituyendo en la función ingreso obtenemos

$I(x) = (550 - 5x)(100 + 2x)$

$I(x) = 55000 - 500x + 1100x - 10x^2 = 55000 + 600x - 10x^2$

$I(x) = 10(-x^2 + 60x + 5500)$, donde $x \in [0,110]$

Ésta es la función a maximizar. A fin de determinar donde se alcanza el máximo se deriva la función ingreso y se iguala a 0

$I'(x) = -2x + 60 = 0 \Longrightarrow 60 = 2x \Longrightarrow x = 30$

La solución de esta ecuación, x = 30, es el único valor crítico de la función ingreso.

Una manera de determinar el máximo absoluto en [0,110] es evaluar la función de ingreso en el valor crítico y en los extremos del intervalo:
$I(0) = 10[-(0)^2 + 60(0) + 5500) = 55000$
$I(30) = 10[-(30)^2 + 60(30) + 5500) = 64000$
$I(110) = 10[-(110)^2 + 60(110) + 5500) = 0$

Entonces el máximo del ingreso ocurre en x = 30 y es de 64000UM. Recuerde que x es el número de incrementos de 2UM y la cuota mensual donde se alcanza el máximo ingreso está dada por

Cuota mensual=100 + 2(30) = 160
Con esta cuota se tendrá que
Número de clientes= 550 - 5(30) = 400.

Ejemplo 4
Suponga que el costo total en dólares, de fabricación de q unidades de cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + q + 48$

a. ¿En qué nivel de producción es más pequeño el costo medio por unidad?
b. ¿En qué nivel de producción el costo medio por unidad es igual al costo marginal?
c. En el mismo conjunto de ejes, elabore las gráficas de las funciones de costo medio y costo marginal.

Solución:

a. El costo medio por unidad $\overline{C}(q)$ es el costo total dividido por el número de unidades producidas. Es decir:

$$\overline{C}(q) = \frac{3q^2 + q + 48}{q} = 3q + 1 + \frac{48}{q}$$

El objetivo es hallar el mínimo absoluto del costo medio en el intervalo q > 0, y lo hacemos a través de la primera derivada

$$\overline{C}'(q) = 3 - \frac{48}{q^2} = 0 \Rightarrow 3q^2 = 48 \Rightarrow q^2 = \frac{48}{3} \Rightarrow q = \pm\sqrt{16} \Rightarrow q_1 = 4 \wedge q_2 = -4$$

La cual es cero en el intervalo q > 0 solo cuando q = 4. Como la segunda derivada $\overline{C}''(q) = \frac{96}{q^3}$ es positiva cuando q > 0, se concluye el criterio de la segunda derivada que el costo medio $\overline{C}(q)$ es mínimo cuando q > 0 cuando q = 4; es decir, cuando se producen cuatro unidades

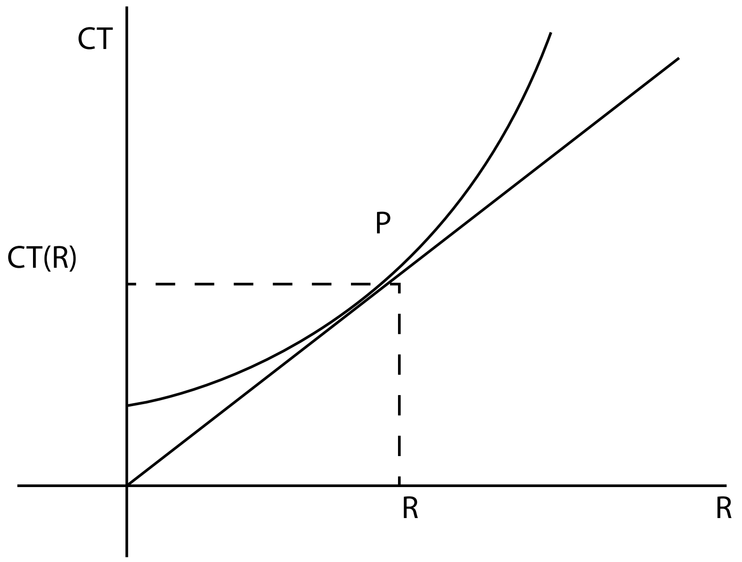
b. El costo marginal es la derivada $C'(q) = 6q + 1$ de la función del costo total y es igual al costo medio cuando

$$C'(q) = \overline{C}(q) \Longrightarrow 6q + 1 = 3q + 1 + \frac{48}{q} \Longrightarrow 6q - 3q + 1 - 1 = \frac{48}{q}$$

$$3q.q = 48 \Longrightarrow q^2 = \frac{48}{3} \Longrightarrow q = \pm\sqrt{16} \Longrightarrow q_1 = 4 \wedge q_2 = -4$$

Que es el mismo nivel de producción del literal a para el cual el costo medio es el mínimo. Esto quiere decir que el nivel de producción el costo medio por unidad es igual al costo marginal es 4 unidades.

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES DE COSTO MEDIO Y COSTO MARGINAL[52]



5.10.2.2. RELACION ENTRE COSTO MEDIO Y COSTO MARGINAL

Suponga CP Y CM denotados como costo medio y costo marginal, respectivamente. Entonces:

- ✓ **CP** es decreciente cuando **CM** $<$ **CP**
- ✓ **CP** es creciente cuando **CM** $>$ **CP**
- ✓ **CP** tiene un punto crítico de primer orden (usualmente un mínimo relativo) cuando **CM = CP**

5.10.2.3. RELACION GENERAL ENTRE CANTIDADES MEDIA Y MARGINAL

Suponga QP Y QM representan valores medio y marginal, respectivamente, de alguna cantidad Q. entonces:

- ❖ **QP** es decreciente cuando **QM** $<$ **QP**
- ❖ **QP** es creciente cuando **QM** $>$ **QP**
- ❖ **QP** tiene un punto crítico de primer orden cuando **QM** $=$ **QP**

---

[52] http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

5.10.2.4. CONTROL DE INVENTARIOS

Una aplicación importante de la teoría de optimización dada en la administración y economía es el problema de control de inventarios. En términos de negocios este problema lo podemos plantear de la siguiente manera: Se tiene una demanda fija de k unidades de un producto al año, la cual es vendida de una manera uniforme a lo largo del año. El negocio enfrenta dos costos: los costos de almacenamientos y los costos de envío. Si el tamaño del pedido es grande el costo de almacenamiento así lo será, pero se incurrirá en menos costos de envío.

Por otra parte, si el tamaño del pedido es pequeño se tendrán que hacer muchos pedidos al año incurriendo en costos de envío elevados. En la producción de una industria se tienen problemas con planteamientos similares: una fábrica que necesita alguna materia prima, donde están presentes estos dos costos. También una industria que produce los productos en apenas unas horas, pero que el costo de almacenamiento es elevado y presenta por otro lado un costo en cada proceso de producción.

Ejemplo:

Una tipografía utiliza 6.000 resmas de pliego de papel al año. El costo de envío de pedido es de 30UM. Independientemente de la cantidad de resmas pedidas. La resma se compra a 10,5UM la unidad. Suponga que cada pedido llega justo cuando se ha acabado el inventario del anterior pedido. El costo de almacenamiento es de 1UM por resma al año y las resmas son utilizadas de manera uniforme a lo largo del año. Determinar el tamaño del lote que minimiza el costo total.

Solución:

Sea x =número de resmas de papel en cada pedido.

En este problema de control de inventarios se han hecho las suposiciones:

1. La utilización de resmas por parte de la tipografía se hace de manera uniforme.
2. Justo cuando se acaba el pedido anterior llega el siguiente.

Estas dos suposiciones llevan a intuir que en el almacén existe en promedio $\frac{x}{2}$ resmas de papel al año. Por ejemplo si se hacen 2 pedidos al año. Cada pedido es de 3.000 resmas. El día que llega un pedido hay 3.000 resmas de papel, justo llegan cuando se acaban las anteriores y el último día hay 0 resmas. En promedio hay 1.500 resmas en el almacén en cada periodo y durante el año. Esta cuenta intuitiva puede ser demostrada de manera formal usando la teoría de integración.

Tenemos entonces que:

$$\textbf{Costo de almacenamiento} = \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{almacenamiento}\\ \text{por resma}\end{pmatrix} \mathbf{x} \begin{pmatrix}\text{Número medio}\\ \text{de resma}\\ \text{almacenadas}\end{pmatrix} = \mathbf{1}.\frac{x}{2}$$

Si el tamaño del pedido es x entonces el número de pedidos es $\frac{600}{x}$. Podemos entonces obtener

$$\textbf{Costo por envió} = \begin{pmatrix}\text{Número}\\ \text{de pedidos}\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{un envio}\end{pmatrix} = \frac{6.000}{X}.\ 30 = \frac{180.000}{X}$$

Finalmente:

$$\textbf{Costo total} = \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{almacenamiento}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo por}\\ \text{envió}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo total}\\ \text{por compra de}\\ \text{6.000 resmas}\end{pmatrix}$$

Si denotamos por C(x) el costo total cuando los pedidos son de x resmas entonces tenemos:

$C(x) = \frac{x}{2} + \frac{180.000}{x} + 6000(10.5)$

$C(x) = \frac{x}{2} + \frac{180.000}{X} + 63.000$

Debemos entonces encontrar el mínimo absoluto de C(x) en (0,6000]
Buscamos primero los puntos críticos dentro del intervalo, para ello derivamos y planteamos donde la derivada se anula:

$C'(x) = \frac{1}{2} - \frac{180.000}{X^2} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{180.000}{X^2} \Longrightarrow x^2 = 2(180.000) \Longrightarrow x^2 = 360.000$
$X = \pm 600$

Las soluciones de esta ecuación son $x = \pm 600$. Sólo tomamos la solución positiva.
Para clasificar usamos el criterio de la segunda derivada

$C''(x) = \frac{360.000}{X^3}$

$C''(600) = \frac{360.000}{600^3} > 0$

Así en $x = 600$ se alcanza un mínimo relativo y por existir un único extremo en el intervalo este mínimo es absoluto. En conclusión se deben pedir lotes de 600 resmas.

5.10.2.5. ELASTICIDAD DE LA DEMANDA

Grado de respuesta de la función (de demanda) a los cambios en el precio. La amplitud del cambio permitirá definir la demanda como elásticas (gran amplitud) o inelásticas (poca amplitud); la elasticidad o inelasticidad de la función de demanda dependerá fundamentalmente de: **a)** la existencia o inexistencia de sustitutos; **b)** la participación en el presupuesto del consumidor; **c)** el horizonte temporal considerado.

ELASTICIDAD PRECIO (De la demanda): Es el cambio porcentual en la cantidad demanda ante un cambio del 1% en los precios; se la representa por el símbolo η y su fórmula es:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

5.10.2.6. NIVELES DE ELASTICIDAD

El valor de la elasticidad permite clasificar los bienes según su sensibilidad ante variaciones de su precio. Se distinguen tres tipos de demanda atendiendo a este valor:

1. **Demanda elástica**, si la elasticidad de la demanda con respecto a su precio es superior a la unidad ($\eta > 1$). La variación de la cantidad demandada es porcentualmente superior a la del precio.
2. **Demanda inelástica**, si la elasticidad de la demanda con respecto a su precio es inferior a la unidad ($\eta < 1$). La variación de la cantidad demandada es porcentualmente inferior a la del precio.
3. **Demanda de elasticidad unitaria**, si la elasticidad de la demanda de un bien con respecto a su precio es igual a la unidad ($\eta = 1$). La variación de la cantidad demandada es porcentualmente igual a la del precio.

Ejemplo:

Suponga que la demanda q y el precio p de cierto articulo están relacionados mediante la ecuación $q = 240 - 2p$ (para $0 \leq p \leq 120$)

a. Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p

b. Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio $p = 100$. Explique su respuesta

c. Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio $p = 50$. Explique su respuesta.

d. ¿En qué precio la elasticidad de la demanda es iguala -1? ¿Cuál es la interpretación económica de este precio?

SOLUCION:

a. La elasticidad de la demanda es

$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \Longrightarrow \eta = \frac{p}{q}(-2) \Longrightarrow \eta = -\frac{2p}{240-2p} \Longrightarrow \boldsymbol{\eta} = -\frac{p}{120-\mathrm{p}}$

b. Cuando el precio p = 100 la elasticidad de la demanda es:
$\boldsymbol{\eta} = -\frac{100}{120-100} \Longrightarrow \boldsymbol{\eta} = -\frac{100}{20} \Longrightarrow \boldsymbol{\eta} = -5$

Es decir cuando el precio p = 100 con un incremento del 1% en el precio genera una disminución del 5% en la demanda, aproximadamente.

c. Cuando el precio p = 50 la elasticidad de la demanda es:
$\boldsymbol{\eta} = -\frac{50}{120-50} = -0.71$
Es decir cuando el precio p = 50 con un incremento del 1% en el precio genera una disminución del 0.71% en la demanda, aproximadamente.

d. La elasticidad de la demanda será igual a -1 cuando
$-\mathbf{1} = -\frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{120-p}} \Longrightarrow -1(120 - p) = -p \Longrightarrow -120 + p = -p \Longrightarrow p + p = 120$
$\Longrightarrow 2p = 120 \Longrightarrow p = \frac{120}{2} \Longrightarrow \mathbf{p} = 60$
En este precio p = 60 con un incremento del 1% en el precio genera una disminución en la demanda, de aproximadamente el mismo porcentaje.

5.10.2.7. ELASTICIDAD DE INGRESO:
Variación porcentual en la cantidad demandada en relación a la variación porcentual en el ingreso (R); R = pq. Donde R es el ingreso, p el precio por unidad y q la cantidad de unidades vendidas (es decir la demanda).

El nivel de elasticidad de la demanda con respecto al precio suministra información útil acerca del ingreso total obtenido de la venta del producto presentándose las siguientes situaciones:

a. Si la demanda es inelástica (**$\boldsymbol{\eta} < 1$),** el ingreso total se incrementa a medida que aumenta el precio.

b. Si la demanda es elástica (**$\boldsymbol{\eta} > 1$**), el ingreso total disminuye a medida que aumenta el precio.

Para comprender porque el nivel de elasticidad de la demanda determina el incremento o la disminución del ingreso total, se comienza con la ecuación de ingreso.

$$R = pq$$

Y se deriva ambos miembros de manera implícita con respecto a p para obtener

$$\frac{dR}{dp} = p\frac{dq}{dp} + q$$

Para obtener la elasticidad $\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ en el cuadro simplemente multiplique la expresión del miembro de la derecha por $\frac{q}{q}$ como sigue:

$$\frac{dR}{dp} = \frac{q}{q}\left(p\frac{dq}{dp} + q\right) \Longrightarrow q\left(\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} + 1\right) \Longrightarrow q(\eta + 1)$$

Si η **< 1.** Entonces η **> -1, (**de nuevo, puesto que η es negativo) y

$$\frac{dR}{dp} < q(-1 + 1) = 0$$

Ed decir la derivada de R con respecto a p es positiva y por tanto el ingreso es una función creciente del precio.

Si η **> 1** entonces η **< -1 (**de nuevo, puesto que η es negativo) y

$$\frac{dR}{dp} < q(-1 + 1) = 0$$

Lo cual implica que el ingreso es una función decreciente del precio:

Ejemplo:

Suponga que la demanda q y el precio p de cierto articulo están relacionados por la ecuación q = 300 - p^2 (para $0 \leq p \leq \sqrt{300}$)

- **a.** Determina donde la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria con respecto al precio
- **b.** Utilice los resultados del literal a, para describir el comportamiento del ingreso total como una función del precio
- **c.** Halle la función de ingreso total en forma explícita y emplee la primera derivada para determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y el precio al cual se maximiza el ingreso

Solución:

a. La elasticidad de la demanda es

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{300-P^2}(-2p) = -\frac{2p^2}{300-P^2}$$

- La demanda es de elasticidad unitaria cuando η = 1, es decir cuándo:

$$\frac{2p^2}{300-P^2} = 1 \Longrightarrow 2p^2 = 1(300 - p^2) \Longrightarrow 2p^2 + p = 300 \Longrightarrow 3p^2 = 300$$

$p^2 = \frac{300}{3} \Longrightarrow p = \pm\sqrt{100} \Longrightarrow p = \pm 10$

Del cual p = 10 está en el intervalo pertinente $0 \leq p \leq \sqrt{300}$ si $0 \leq p \leq 10$

$$\eta = \frac{2p^2}{300-P^2} < \frac{2(10)^2}{300-(10)^2} = 1$$

- Por consiguiente la demanda es inelástica en el intervalo $0 \leq p \leq 10$

Si $10 \leq p \leq \sqrt{300}$

$$\eta = \frac{2p^2}{300-P^2} > \frac{2(10)^2}{300-(10)^2} = 1$$

- Por consiguiente la demanda es elástica en el intervalo $10 \leq p \leq \sqrt{300}$

b. El ingreso total es una función creciente de p cuando la demanda es inelástica, es decir, está en el intervalo $0 \leq p \leq 10$ y una función decreciente de p cuando la demanda es elástica, esto es, está en el intervalo $10 \leq p \leq \sqrt{300}$. Al precio p = 10 de elasticidad unitaria, la función de ingreso tiene un máximo relativo.

c. La función de ingreso es

R =p.q
R (p) = p (300 - p²) = 300p - p³
Su derivada es
$R'(p) = 300 - 3p^2 = 0 \Longrightarrow 3(10 - p)(10 + p) = 0 \Longrightarrow p = 10 \vee p = -10$
Del cual solo p = 10 porque está en el intervalo pertinente $0 \leq p \leq \sqrt{300}$

En el intervalo $0 \leq p \leq 10$, R'(p) es positiva y por tanto R(p) es creciente. En el intervalo $10 \leq p \leq \sqrt{300}$, R'(p) es negativa y por tanto R(p) es decreciente. En el valor critico p = 10, R(p) deja de ser creciente y comienza a ser decreciente y por consiguiente tiene un máximo relativo.

5.11. TALLER DE DERIVADAS

A. Calcular las siguientes derivadas aplicando la técnica que corresponda:

1. $y = 5$
2. $y = \frac{3}{4}$
3. $y = x$
4. $y = 3x$
5. $y = x^4$
6. $y = 3x^3$
7. $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$
8. $y = \frac{3}{x^4}$
9. $y = \sqrt[4]{x^3}$
10. $y = \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^3}$
11. $y = \frac{4x^3 - 5x^2 + 1}{3x^2}$
12. $y = (x^2 - 1).(x^3 + 3x)$
13. $y = \left(\frac{3}{5x^4} + 7x^2 + 1/2\right)(x^2 - 2x + 3)$
14. $y = (3\sqrt{x} + 2x)(x^3 - 4x^2 + 5)$
15. $y = \frac{x+3}{x-1}$
16. $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x}$

B. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \text{Ln } 3x^2$
2. $y = \text{Ln } x^3$
3. $y = \text{Ln } 5$
4. $y = \text{Ln } (x^2 + 5x - 1)$
5. $y = \text{Ln } \sqrt{x}$

6. y = Log $5x^2$

7. y = Log (x^3 - 4)

8. y = e^{3x}

9. y = e^{x^2-3x+5}

10. y = e^{Ln5x}

11. y = $e^{\sqrt{x}}$

12. y = $e^{Ln\sqrt{x}}$

13. y = Ln(e^{5x})

14. y = $e^{\frac{3x-5}{x+3}}$

15. y = $7^{(x^2-3)(2x+1)}$

16. y = $25^{e^{x^2}}$

17. y = $\left(\frac{3}{2}\right)^{Ln\ 3x^2}$

18. y = (x^2 - x + 3)(e^{x^2})

19. y = $\frac{Ln(3x+1)}{3x-1}$

20. y = $\frac{3^x}{6^x}$

21. y = Log_3 x^3

22. y = Log_2 (x^2 - 3x + 4)

C. Derivar las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena

1. y = u^2 + 1; u = 3x – 2

2. y = $\sqrt{\mathrm{U}}$; u = x^2 -2x + 3

3. y = $2u^2$ - u + 5; u = Ln(3x – 4)

4. y = $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{U}}}$; u = e^($x^2$-3x)

5. y = Ln(5u + 1) ; u = π^(3x+4)

6. y = $\sqrt[3]{5u^2 - 7u}$; u = 2^{x^2-3}
7. y = $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^3$; u = $\sqrt{u^2 - 3}$

D. Derivar las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena para potencias

1. f(x) = $(3x^2 - 4x + 1)^3$
2. f(x) = $\sqrt{5x^4 - 2x}$
3. f(x) = $\sqrt[3]{\frac{3x+1}{2x-1}}$
4. f(x) = $\left(3x^2 - \sqrt{1 - x^2}\right)^3$
5. f(x) = Ln$\sqrt{x - 2}$
6. f(x) = $\sqrt{e^{3x}}$
7. f(x) = $\sqrt{\frac{e^{Ln(x\pi)}}{5^{3x}}}$
8. f(x) = $\frac{Ln\sqrt{x}}{(e^x)}$
9. f(x) = $\frac{(1-2x)^2}{(3x+1)^3}$
10. f(x) = $(x^2 - 3)^5\ (2x - 1)^3$
11. f(x) = $\sqrt{(3x)(e^{Log3x})}$

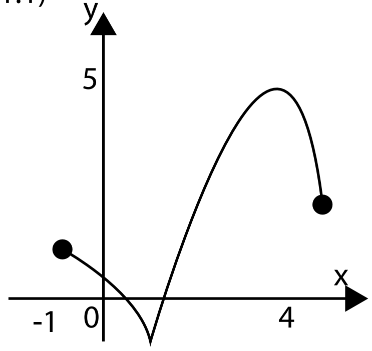
E. Halle la derivada de las siguientes funciones mediante la derivación implícita.

1. $x^2 + y^2 = 25$
2. $y^2 + 2xy^2 - 3x + 1 = 0$
3. $(x^2 + 3y^2)^4$ = 2x – 3y
4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
5. e^{3xy^2} = Ln(2x + 3y)
6. $\sqrt{\frac{5X+3}{e^{y+3}}} = 5x^2$
7. $\mathrm{Ln}(3x - 2y) = 5xy^3$
8. Log(x^3 -2xy) = 3x -3y

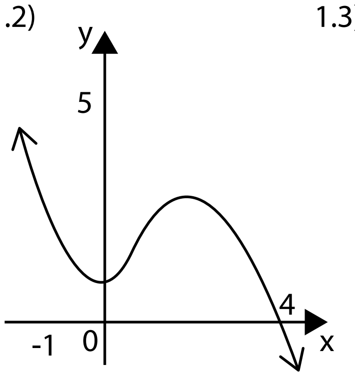
Situaciones de aplicaciones de la derivada

F. Dada la gráfica de la función, estime los intervalos de crecimiento, decrecimiento, donde se alcanza los máximos y mínimos relativos. Estime además los puntos de cortes con los ejes

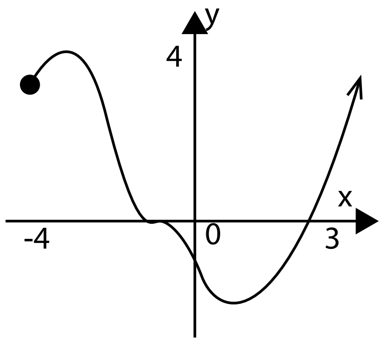
1.1)



1.2)



1.3)



G. Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función dada y dibuje la gráfica.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$
2. $f(x) = x^3 - 3x - 4$
3. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$
4. $f(x) = (x - 1)^3$
5. $f(x) = (x^3 - 1)^4$
6. $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$
7. $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$
8. $f(x) = 2x + \frac{18}{x} + 1$
9. Elabora la gráfica de una función que téngalas siguientes propiedades:
   - **a.** $f'(x) > 0$ cuando $x < -5$ y cuando $x > 1$
   - **b.** $f'(x) < 0$ cuando $-5 < x < 1$
   - **c.** $f(-5) = 4$ y $f(1) = -1$

10. Trace la gráfica de una función que téngalas siguientes propiedades:
    - **a.** $f'(x) > 0$ cuando $x > 2$
    - **b.** $f'(x) < 0$ cuando $x < 0$ y cuando $0 < x < 2$
    - **c.** $x = 0$ no está en el dominio de f

H. Determine donde la función dada es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Halle los extremos relativos y los puntos de inflexión y dibuje la gráfica.

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$

2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$
3. $f(x) = (x^2 - 5)^3$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
5. $f(x) = 2x(x + 4)^3$
6. $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$

7. Elabora la gráfica de una función que téngalas siguientes propiedades:
   a. $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 3$
   b. $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 3$
   c. $f''(x) < 0$ cuando $x < 2$
   d. $f''(x) > 0$ cuando $x > 2$

I. Halle el máximo y el mínimo absoluto (si existen) de la función dada en el intervalo especificado.
1. $f(x) = x^2 + 4x + 5$; $-3 \leq x \leq 1$
2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$; $-3 \leq x \leq 2$
3. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$; $0 \leq x \leq 5$
4. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; $-2 \leq x \leq -1/2$
5. $f(x) = (x^2 - 4)^5$

J. PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA DERIVADA
1. La ecuación de demanda de un producto es $p = 12 – 0.01q^2$. ¿Cuál es el precio en que se obtiene el máximo ingreso?
2. La función de demanda para un determinado artículo es $p = 20e^{\frac{-q}{10}}$.
   a. Encuentre el valor de p en que el ingreso es máximo para $0 \leq q \leq 20$
   b. Encuentre el valor de p en que el ingreso es máximo para $0 \leq q \leq 5$

3. La ecuación de demanda de un determinado artículo es $p = 200 - 2q$ y la función de costo es $c = 200 + 4q$. ¿En qué nivel de producción se maximizará la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

4. La ecuación de demanda de un determinado artículo es $p = \frac{150}{\sqrt{q}}$ y la función de costo total es $c = 200 + 25q$. ¿Cuál es el precio que dará la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

5. El costo unitario de un producto es 3 UM y la ecuación de demanda es $p = 200 - 3q$. ¿Cuál es el precio que dará la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad

máxima? Demuestre que el máximo ocurre cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal.

6. La ecuación de demanda de un determinado artículo es p = $\frac{8000}{\sqrt{q}}$ y la función de costo promedio es $\overline{c}$ = 50 + $\frac{100}{q}$. **a)** ¿Cuál es el precio y el nivel de producción que dará la utilidad máxima? **b)** Demuestre que en este nivel el ingreso marginal es igual al costo marginal.

7. Se ha determinado que la función de costo promedio para un determinado artículo es $\overline{c}$ = q + 32 + $\frac{400}{q}$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción que minimiza el costo promedio si la empresa no puede fabricar más de 30 artículos? **b)** ¿Cuál es el nivel de producción que minimiza el costo promedio por unidad si la empresa no puede fabricar más de 15 artículos?

8. La función de costos totales de un fabricante es $c = 0.04q^2 + 100$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción para el cuál el costo promedio es mínimo? **b)** ¿Cuál es el nivel de producción para el cuál el costo marginal es mínimo?

9. Los costos totales fijos de una empresa son 1000UM, el costo variable por unidad es de 5UM y la ecuación de demanda es p = $\frac{40}{\sqrt{q}}$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción que maximiza la utilidad? ¿Cuál es el precio que hay que fijar para que la utilidad sea máxima? **b)** Si el gobierno fija un impuesto de 3UM por unidad, ¿cuál será ahora el precio que maximiza la utilidad? Compare precios óptimos, producción y utilidad con y sin impuesto.

10. Un editor sabe que tiene una venta de 5.000 ejemplares de un libro si lo vende a 25UM. El estima que por cada UM que aumente deja de vender 25 ejemplares. Si la función de costos totales por editar q libros es $C(q)=-0.001q^2+2q+20.000$. ¿Cuál es el precio que maximizará la utilidad?

11. Un hotel de 100 habitaciones dobles cobra 80UM por noche, con este precio normalmente se alquila 40 habitaciones. La gerencia estima que por cada 5 UM de rebaja conseguirá alquilar 4 habitaciones más. ¿Cuál es el precio que maximizará el ingreso?

12. Si la función de utilidad de un producto está dada por u = $\frac{1}{3}q^3 + 2.5qv^2 + 500q - 5000$. Determine el nivel de producción en que la utilidad es máxima considerando. a) Que la empresa no puede producir más de 50 artículos. b) Que la empresa no puede producir más de 20 artículos.

13. Si una compañía gasta x UM en publicidad, el número de artículos que venderá está dado por q = $400\frac{x}{x+1}$. Sin incurrir en los gastos de publicidad, la

compañía tiene unos beneficios de 100UM por artículo. Determine el valor de q y el gasto en publicidad que maximiza la utilidad.

14. Una concesionaria de carros vende 5000 vehículos al año y los pide a la fábrica en lotes de tamaño q. Cada pedido cuesta 250 UM y el costo de almacenaje cuesta 50 UM. por auto, independientemente del tiempo en que estará en el almacén. Determine el tamaño óptimo del lote, (esto es, el que minimiza la suma de los costos de almacenamiento y pedido).

15. El costo de producir un artículo es 150+t UM, donde t es el impuesto por unidad producida. La ecuación de demanda del artículo está dada por p = 300 - 3q. **a)** Diga en términos de t, el nivel de producción que maximiza las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la máxima utilidad? **b)** Si t = 30, ¿cuál es el nivel de producción que maximiza la utilidad y cuál es esas utilidad? Repita con t = 60. **c)** Determine el impuesto por unidad t que debe imponerse para obtener una máxima recaudación.

16. El ingreso total por producir q artículos está dado por 2 $I(q) = 4375q - 25q^2$ y su función de costo es $C(q) = 100 + 55q - q^2$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción en que se produce la máxima utilidad si la fábrica tiene una capacidad para elaborar 100 artículos? **b)** ¿Cuál es el nivel de producción en que se produce la máxima utilidad si la fábrica tiene una capacidad hasta elaborar 80 artículos?

17. La ecuación de demanda para q unidades de un producto está dada por $p = \frac{40}{\sqrt{q}}$ y el costo promedio es $\overline{c} = \frac{100}{q} + 5$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción que maximiza la utilidad? ¿Cuál es el precio que hay que fijar para que la utilidad sea máxima? **b)** El gobierno decide dar un subsidio de 1UM por unidad, ¿cuál será ahora el precio que maximiza la utilidad? Compare precios óptimos, producción y utilidad con y sin subsidio. **c)** ¿Cuánto le cuesta al estado este subsidio?

18. Un museo cobra la admisión a grupos de acuerdo a la siguiente política. Para los grupos con 40 o menos personas el precio es de 50UM por persona, pero por cada persona adicional el precio por persona disminuirá en 1UM (por ejemplo si el grupo es de 42 personas el precio para cada una es de 48UM). **a)** Exprese el ingreso del museo en función del tamaño del grupo. **b)** ¿Cuál es el tamaño del grupo para el cuál el museo obtiene el máximo ingreso?

19. Un museo cobra la admisión a grupos de acuerdo a la siguiente política. Para los grupos con 40 o menos personas el precio es de 50UM por persona, y el ticket de las personas por encima de 40 disminuirán en 1 UM por cada persona por encima de 40. (Es decir si el tamaño del grupo es 42 entonces las primeras 40 tickets costarán 50 y los tickets 41 y 42 costarán 48) **a)** ¿Cuál es el tamaño del grupo para el cual el museo obtiene el máximo ingreso? b) ¿Cuál es ese ingreso?

20. Una ferretería tiene una demanda promedio de 400 cajas de bombillos tubulares tipo X al año. El costo de envío desde la fábrica es de 50UM independientemente de la cantidad de cajas pedidas hasta un máximo de 400 cajas. El costo de adquisición de cada caja es de 100UM y el costo de almacenamiento es de 8UM por caja por año. Suponga que las cajas son vendidas de manera constante durante el año y cada pedido llega justo cuando se acabó el anterior, determine el tamaño del lote que minimiza los costos totales.

21. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 60 - 0.1p$ (para $0 \le p \le 10)$

a. Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p
b. Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio p = 200. Explique su respuesta
c. ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a -1?

22. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 200 - 2p^2$ (para $0 \le p \le 600)$

a. Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p
b. Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio p = 6. Explique su respuesta
c. ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a -1?

23. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 500 - 2p$ (para $0 \le p \le 250)$

a. Determine donde la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria con respecto al precio.
b. Emplee los resultados del literal a, para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función ingreso y el precio al cual se maximiza el ingreso
c. Halle la función de ingreso total en forma explícita y utilice la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el precio al cual se maximiza el ingreso.
d. Trace las gráficas de las partes relevantes de las funciones de demanda y de ingreso.

24. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 120 - 0.1p^2$ (para $0 \le p \le \sqrt{1200})$

a. Determine donde la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria con respecto al precio.

b. Utilice los resultados del literal a, para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función ingreso y el precio al cual se maximiza el ingreso
c. Halle la función de ingreso total en forma explícita y emplee la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el precio al cual se maximiza el ingreso.
d. Elabora las gráficas de las partes relevantes de las funciones de demanda y de ingreso.

25. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es q = $\frac{a}{p^m}$, donde a y m son constantes positivas. Demuestre que la elasticidad de la demanda es igual a –m para todos los valores de p. explique este resultado

26. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es lineal, es decir q = b - ap (para $0 \leq p \leq \frac{b}{a}$), donde a y b son constantes positivas.
a. Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p
b. Demuestre que la demanda es elasticidad unitaria en el punto intermedio p = $\frac{b}{2a}$ del intervalo pertinente $0 \leq p \leq \frac{b}{a}$
c. Halle los intervalos en los cuales la demanda es elástica o inelástica.
d. Halle la función de ingreso total en forma explicite y emplee la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento
e. Elabora las gráficas de las partes relevantes de las funciones de demanda y de ingreso.

27. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es q = 600 – 2p² (para $0 \leq p \leq \sqrt{300}$)
a. Exprese la elasticidad de la demanda como una función de q y determine donde $\eta = 1$, $\eta < 1$, y $\eta > 1$
b. aplique los resultados del literal a, para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del ingreso como una función de la demanda q. ¿A qué nivel de demanda es máximo el ingreso?
c. Exprese el ingreso total en forma explícita como una función de q y emplee la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la demanda al cual se maximiza el ingreso

BIBILOGRAFIA

Carl B Alendoerfer, Cletus o. Oakley. Matemáticas Universitarias. Cuarta Edición. Edit. Mc. Graw Hill. Bogotá 1996

Raymond A. oBarnett. Michael R. ziegler. Kart E. Byleen. Precalculo “Funciones y graficas” Cuarta edición. Edit. Mc. Graw Hill. México 1999.

Leithold Louis. El cálculo con Geometría Analítica. Harla Harper & Row Latinoamericana. México. 1982.

Serie Schaum. Fundamentos de Matemáticas I. Edit. Mc. Graw Hill. México 1999.

Lowell J. Paige y J. Dean Swift. Elementos de Algebra lineal. Edit. Reverte S.A. 1967 Barcelona España.

Juan de Burgos. Algebra Lineal. Edit. Mc. Graw Hill. Madrid España 1993

Stanley i. Grossman. Algebra Lineal. Quinta Edición. Edit. Mc. Graw Hill. Colombia 1998.

Luís Postigo. Matemáticas. Edit. Ramón Sopena S.A. biblioteca Hispana. Barcelona.

I Suvorov. Curso de Matemáticas Superiores. Cuarta Edición. Edit. Mir. Moscú. 1973.

Carl B. Allendoerfer. Matemáticas Universitarias, 4 ed. Mcgraw-Hill. Bogotá. 1998.

Luis Leithold. Cálculo con geometría analítica.

Leed y Bittinger. Algebra y trigonometría. Fondo educativo Interamericano.

Goldstein, Larry. Cálculo y sus aplicaciones. Prentice-Hall, 1990.

Shirley, O; Hockett, Steinstein. Calculo a objetivos.

Swokowski, Earl; Algebra y Trigonometría, Iberoamérica, México.

Apóstol. T. Cálculo, Editorial Reverté S.A, volumen II, México, 1.967

Swokowski, E.W. Cálculo, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1.989.

Crispín, M. L. Coord. (2011). Aprendizaje autónomo. Orientaciones para la docencia. México: Universidad Iberoamericana.

Dabdoub Alvarado, Lilian (2008). Desarrollo de la creatividad para el docente: Estrategias para estimular las habilidades del alumno. México, D.F.: Editorial Esfinge.

De Miguel Díaz, Mario (Dir.) Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de Competencias: Orientaciones para promover el cambio metodológico en el Espacio europeo de educación superior. Oviedo: Ediciones de la Universidad de Oviedo. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo en Línea.

Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5 (2).

Fernández March, Amparo. Nuevas metodologías docentes Instituto de Ciencias de la Educación, Espacio Europeo de la Educación Superior Universidad Politécnica de Valencia.

Marqués Graells, Pere (2000). Medios didácticos Departamento de Pedagogía Aplicada, Facultad de Educación Universidad Autónoma de Barcelona.

edumatematicas.pbworks.com/w/file/fetch/

https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/

www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/

www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/

Solís González Y (2005). Propuesta Didáctica para el desarrollo de estrategias de aprendizaje en estudiantes del Curso Continuidad de Estudios con el Apoyo de las Tecnologías de la Información y las comunicaciones. Tesis presentada en la pre-defensa en opción al grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas, La Habana. 124 p.

http://www.slideshare.net/mercmerk/enseanza-aprendizaje-didctica

García, L. (2004). Un estudio sobre profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Creencias, concepciones y conocimiento profesional. Tesis de Maestría. UAB. Barcelona

García, I., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). “Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas”. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME). 9, (1). pp. 85-116.

Alfaro, C y Otros. (2002). Aprendizaje de las Matemáticas conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas. Costa Rica. Disponible en: http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Uniciencia/Articulos/Volumen2/Parte12/articulo22.htl
Villanueva G. (2010). Matemática por competencias. México D.F: Disponible en: http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/Ponencia_67.pdf

Cossío, R. y Salazar, A. (2004). Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo con interpretación constructivista. Arequipa, Perú. Disponible en: http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/biblioteca/articulos/pdf/estrate.pdf, http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/

sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T09.pdf

mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/perez-calculo1.pdf

https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/concepto-de-funcic3b3n.pdf

www.bdigital.unal.edu.co/12613/1/43263449.2014.pdf