



# CÁLCULO DIFERENCIAL

Una Introducción

Primera Edición



**Amazonia  
Editorial**

Campus Porvenir Calle 17 Diagonal 17  
con Carrera 3F - Barrio Porvenir

**Impreso en Colombia  
Printed in Colombia**

**JORGE ENRIQUE TRIVIÑO MACIAS  
JUAN ALEXANDER TRIVIÑO QUICENO  
LUIS ALBERTO OVIEDO PLAZAS**

CÁLCULO DIFERENCIAL  
Una Introducción

# CÁLCULO DIFERENCIAL

## Una Introducción

### **Jorge Enrique Triviño Macias**

Magister en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT; Especialista en Matemáticas Avanzadas de la Universidad Nacional de Colombia; Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Surcolombiana; profesor tiempo completo programa Licenciatura en Matemáticas y Física, Facultad Ciencias de la Educación, Universidad de la Amazonia, Florencia - Caquetá.

### **Juan Alexander Triviño Quiceno**

Magister en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia; profesor tiempo completo programa Licenciatura en Matemáticas y Física, Facultad Ciencias de la Educación, Universidad de la Amazonia, Florencia - Caquetá.

### **Luis Alberto Oviedo Plazas**

Magister en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT; Especialista en Matemáticas Avanzadas de la Universidad Nacional de Colombia; Licenciado en Educación en la Especialidad de Matemáticas de la Universidad del Quindío; profesor tiempo completo programa Licenciatura en Matemáticas y Física, Facultad Ciencias de la Educación, Universidad de la Amazonia, Florencia - Caquetá.

**Universidad de la Amazonia**  
Facultad Ciencias de la Educación  
Programa Licenciatura de Matemáticas y Física  
Florencia - Caquetá  
2020

Cálculo Diferencial, una introducción. Triviño Macías, Jorge Enrique; Triviño Quiceno, Juan Alexander. Oviedo Plazas, Luis Alberto. Florencia, Universidad de la Amazonia, 2020.

81 pp.: 17.5 X 23 cms.

ISBN DIGITAL: 978-958-5484-23-8

1. Función. 2. Tangente. 3. Derivada. 4. Aplicaciones.

CDD: 515.3 Ed. 22.

**Jorge Enrique Triviño Macías**

jo.trivino@udla.edu.co

**Juan Alexander Triviño Quiceno**

j.trivino@udla.edu.co

**Luis Alberto Oviedo Plazas**

l.oviedo@udla.edu.co

**Revisión de la Edición**

Mauro Ochoa Correa

**Diseño, diagramación y corrección de estilo**

Miguel Leonardo Sánchez Fajardo

Colección Bibliográfica Universidad de la Amazonia.

© Todos los derechos reservados. Apartes de los textos se pueden reproducir citando la fuente. Licenciatura en Matemáticas y Física. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de la Amazonia.

Sede Principal Calle 17 Diagonal 17 con Carrera 3F - Barrio Porvenir, apartado aéreo 192.

Florencia, Caquetá, Colombia - Julio 2020.

PBX: (57)(8) 4366160, Ext. 131, fax: (57)(8) 4358231

<https://www.uniamazonia.edu.co>

ISBN DIGITAL: 978-958-5484-23-8

Primera Edición



# INTRODUCCIÓN

El análisis de la enseñanza de los conceptos asociados al cálculo diferencial, no es algo nuevo en los diferentes programas de educación superior, más aun en las Facultades de Educación. Hacer un análisis del cálculo diferencial en términos de formación de profesionales, requiere de un grado y nivel de razonamiento y aplicación que se deben desarrollar en los estudiantes.

Al proporcionar la pendiente de una curva en un punto, la derivada tiene aplicaciones diversas, donde puede interpretarse como la razón de cambio. La idea que se desarrolla a través de algunas técnicas básicas que permitirán calcular la derivada en todas las situaciones estándar que es probable encontrar en la práctica.

El propósito de un primer curso de cálculo diferencial es enseñar a los estudiantes las nociones básicas de la derivada, sus técnicas y aplicaciones que acompañan a cada concepto, esto, con el fin de proporcionar un acceso inmediato de su interés curricular en cuanto a sus aplicaciones en sus áreas respectivas.

Este libro se ha escrito con el fin de facilitar un acceso inmediato y agradable al concepto de derivada, logrando un equilibrio apropiado entre lo matemático y lo didáctico para alcanzar la familiaridad con el tema, esto no significa que el rigor de la disciplina tenga que abandonarse, todos los capítulos disponen de una introducción informal que establece el tema y el material que va a ser tratado en cada capítulo.

En cuanto a la pregunta: ¿Por qué escribir otro libro de cálculo? “. . . porque prácticamente todos los existentes son demasiados largos y se pierde la visión de la idea del concepto de derivada . . .”, se espera que el orden de los capítulos suministre al lector una sólida visión del tema. Dentro de las secciones hay figuras, gráficas, ilustraciones y tablas que facilita a los lectores la visualización o resumen de los conceptos. Además, se dan suficientes ejemplos y ejercicios. En general, el texto no contiene demostraciones de teoremas, salvo para aquellas formulaciones matemáticas que se puedan justificar mediante una secuencia bastante obvia de manipulaciones algebraicas o cálculos sencillos, desglosado en tres capítulos, La Derivada, Reglas para Encontrar Derivadas, y Aplicaciones.

En esta versión, se han introducido una serie de suplementos y modificaciones en su escritura matemática, es decir, de la forma más breve posible para una mejor asimilación a la introducción al cálculo. El capítulo 1 introduce conceptos básicos de funciones reales y se centra en clases de funciones y sus propiedades, las cuales llevan a las primeras aproximaciones de la derivada desde el concepto de tangente, construcción de la tangente a una curva, velocidad promedio y velocidad instantánea. Trata algunos problemas habituales que se analizan en relación con los temas descritos.

Con el fin de facilitar a los estudiantes la obtención de la derivada por los diferentes métodos básicos conocidos en el cálculo, estos se presentan, ilustran y desarrollan en el capítulo 2, de tal forma que facilite identificar su aplicación y utilidad en las diferentes 5 disciplinas.

Finalmente, en el capítulo 3 se aumenta el número de problemas y aplicaciones para desarrollar máximos y mínimos, punto crítico, monotonía y concavidad, puntos de inflexión, máximos y mínimos locales y otros problemas de aplicación. Se introducen varios problemas de elevada dificultad cuya solución requiere del conocimiento de los anteriores capítulos.

En conclusión, los contenidos disciplinares, los problemas y ejemplos planteados a lo largo del presente libro, como también sus soluciones, están elegidos para cada tema de tal forma que contribuyan a la mejor comprensión de la derivada, particularidad que además hace al libro más cómodo para aquellos estudiantes que quieran iniciar el estudio de las matemáticas individualmente.

# EDICIÓN DEL LIBRO

En la edición, diseño y composición tipográfica de este material se han utilizado los siguientes programas:

- 1 **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>** Tipografía del texto, ecuaciones, definiciones, ejemplos, teoremas, ejercicios, entre otros.
- 2 **TikZ** Edición de figuras y diagramas.
- 3 **Inkscape 0.91** Edición de figuras y diagramas.
- 4 **Geogebra 5** Diseño de figuras, gráficos, diagramas.
- 5 **TeXstudio 2.11.2** Edición del código fuente L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>.

Además, se utilizaron los paquetes “.sty” del libro de los autores Walter Mora F., Alexander Borbón A., que se llama “EDICIÓN DE TEXTOS CIENTÍFICOS LATEX. Composición, Diseño Editorial, Gráficos, Inkscape, Tikz y Presentaciones Beamer. 3ra edición. 2010”.

# TABLA DE CONTENIDO

## 9

### Capítulo 1

#### LA DERIVADA

- 1.1 FUNCIONES REALES 9
  - 1.1.1 INTRODUCCIÓN 9
  - 1.1.2 ALGUNAS CLASES DE FUNCIONES 11
  - 1.1.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES 12
- 1.2 SOBRE LA DERIVADA 12
  - 1.2.1 EL CONCEPTO DE TANGENTE 13
- 1.3 CONSTRUCCIÓN DE LA TANGENTE A UNA CURVA 15
- 1.4 VELOCIDAD PROMEDIO Y VELOCIDAD INSTANTÁNEA 16
  - 1.4.1 VELOCIDAD INSTANTÁNEA 17

## 22

### Capítulo 2

#### REGLAS PARA ENCONTRAR DERIVADAS

- 2.1 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 31
- 2.2 DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO 32
- 2.3 FUNCIONES HIPERBÓLICAS 33
- 2.4 FUNCIONES COMPUESTAS 33
- 2.5 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR 36
  - 2.5.1 UN PROBLEMA SOBRE CAÍDA LIBRE 38
  - 2.5.2 MODELACIÓN MATEMÁTICA 39

- 2.6 DERIVACIÓN IMPLÍCITA 40
- 2.7 TASAS DE CAMBIO RELACIONADAS 43
- 2.8 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS IN-  
VERSAS 45
- 2.9 DIFERENCIALES 47
- 2.10 APROXIMACIONES (UNA APLICACIÓN) 48
- 2.11 APROXIMACIONES LINEAL 49
- 2.12 EJERCICIOS 50

## 55

### Capítulo 3

#### APLICACIONES

- 3.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS 55
  - 3.1.1 PUNTO CRÍTICO 55
- 3.2 MONOTONÍA Y CONCAVIDAD 61
  - 3.2.1 PUNTOS DE INFLEXIÓN 63
- 3.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES 64
- 3.4 OTROS PROBLEMAS DE APLICACIÓN 68

## 80

### Capítulo 4

#### BIBLIOGRAFÍA

# 1

## LA DERIVADA

Dos problemas muy antiguos generaron el estudio del concepto de “derivada”:

1. El problema de hallar la pendiente de la recta tangente (es un problema geométrico iniciado por Arquímedes).
2. El problema de hallar la velocidad instantánea (es un problema de Mecánica estudiado por Kepler y Galileo).

**¡Son problemas gemelos!**

### 1.1 FUNCIONES REALES

#### 1.1.1 INTRODUCCIÓN

Los distintos objetos o fenómenos que observamos en la naturaleza parecen estar orgánicamente conectados unos a otros; dependen unos de otros. Desde hace mucho tiempo se sabe que algunas relaciones simples y otras complicadas se conocen como “leyes” fundamentales de la naturaleza. Estas leyes señalan que si distintas magnitudes caracterizan un fenómeno natural, entonces algunas de ellas están determinadas por otras. Por ejemplo, el volumen de un cilindro está determinado por la longitud de su radio y altura; el volumen de una cantidad dada de gas está determinado por la temperatura y la presión a la que está sometido el gas; la potencia de un circuito eléctrico varía proporcionalmente a la resistencia, y al cuadrado de la corriente, etc. Todo este tipo de situaciones fueron las que dieron origen al concepto de función.

Los conceptos de variable y función, que hoy utilizamos, surgieron de manera paulatina, a través de los trabajos de muchos matemáticos. Quizás el proceso de inició con Neper en conexión con la función logarítmica y avanzó de una manera más o menos clara (aunque no definitiva) con Descartes, Fermat, Newton, Leibniz y los hermanos Bernoulli. Estos últimos utilizaban el concepto de función solo en ejemplos tales como polinomios o funciones trigonométricas.

Después, Euler, en su *Introduction to Algebra* en 1770, da dos explicaciones de la palabra función: una, es que una función es una expresión  $y(x)$  conformada por polinomios, logaritmos y funciones trigonométricas, etc., pero sin aclarar cuáles clases de combinaciones eran admisibles; la otra, que una función  $y(x)$  se tendría cuando se pudiera dibujar una curva en el plano  $xy$ .

Para Lagrange, la noción de función se restringe solo a aquellos casos que resultan potencias de  $x$ . Posteriormente Fourier en sus trabajos sobre la teoría del calor en una superficie, analizó complicadas funciones; lo que amplió la idea de lo que debería considerarse como función.

Pero fue Dirichlet (1854) el primero que definió una función: si de alguna forma se determina un valor  $y$  para cada valor de  $x$  en un intervalo dado, entonces  $y$  se llama una función de  $x$ . La forma, como aparece en este capítulo, se remonta a los trabajos de Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor y, particularmente, Kuratowski (1896 - 1980).

Después de esta breve introducción histórica, hemos llegado a una de los objetos centrales sobre los cuales se construyó la matemática moderna: el concepto de función.

### Definición 1.1 (Función real)

Decimos que  $f$  es una función real de variable real o simplemente una función real  $f$  de  $A \subseteq \mathbb{R}$  en  $B \subseteq \mathbb{R}$ , si es una relación de  $A \subseteq \mathbb{R}$  en  $B \subseteq \mathbb{R}$ , que satisface la condición de que para toda  $x \in A$  existe un único elemento  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in f$ .

### Observaciones

La definición (1.1), es equivalente a que

- Todo elemento  $x$  de  $A$  es la primera componente de alguna pareja de  $f$ .
- Si  $(x, y_1) \in f$ ,  $y$ ,  $(x, y_2) \in f$ , entonces  $y_1 = y_2$ ; es decir, en  $f$  no hay dos parejas distintas con la primera componente igual.
- Notación. Si  $f$  es una función de  $A \subseteq \mathbb{R}$  en  $B \subseteq \mathbb{R}$ , escribimos indistintamente,

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = f(x) \quad \text{ó} \quad x \longrightarrow y = f(x)$$

- Puede ocurrir que, en algunos casos,  $A = \mathbb{R}$  y  $B = \mathbb{R}$ .
- Para cada  $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ , al único  $y \in B \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \in f$  se denota como  $y = f(x)$  y se dice que  $y$  es la imagen de  $x$  a través de  $f$ .
- Dominio de  $f$

$$D(f) = A = \{x \in A \mid y = f(x)\}$$

Recorrido de  $f$

$$R(f) = B = \{y \in B \mid y = f(x)\}$$

- La gráfica de una función real se denota como

$$G(f) = \{(x, y) \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x))\}$$

**Observación:** Toda gráfica es una función si toda recta paralela al eje  $y$  se intersectan con ésta en un solo punto.

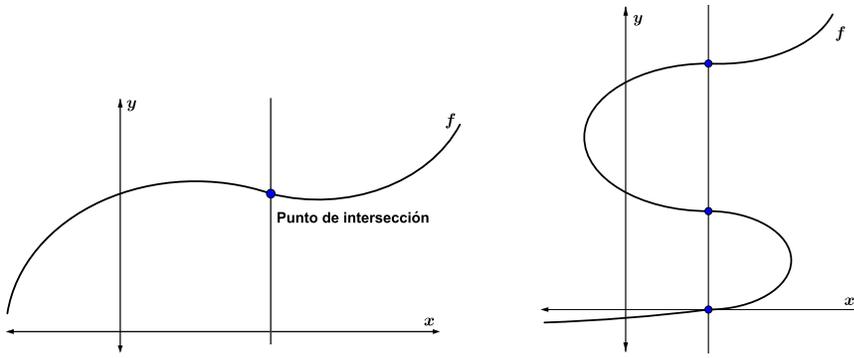


Figura 1.1

### 1.1.2 ALGUNAS CLASES DE FUNCIONES

Las siguientes funciones se utilizarán mas adelante.

1. **Función constante:** En una función de la forma  $y = f(x) = c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ . Su gráfica son rectas horizontales.
2. **Función lineal:** Es de la forma  $y = f(x) = mx + b$ , con  $m, b \in \mathbb{R}$ . Al número  $m$  se suele llamar la pendiente de la recta. Si  $m = 1$  y  $b = 0$ , a la función  $y = f(x)$  se llama la función identidad (o la función idéntica).
3. **Función polinómica:** Es de la forma

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

donde  $a_0, a_1, a_2, \dots$  son números reales y  $n$  es un entero positivo. Son ejemplos de funciones polinómicas las funciones constantes, las lineales, las ecuaciones de segundo grado  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ , que son parábolas que abren hacia arriba o hacia abajo. Las parábolas que abren hacia la izquierda o hacia la derecha no son ejemplos de funciones. (¿Por qué?).

4. **Función racional:** Estas funciones son de la forma

$$y = f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n},$$

donde el numerador y el denominador son funciones polinómicas.

5. **Función valor absoluto:** Esta función se define como  $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ , su dominio son los números reales y el recorrido los números reales positivos incluido el cero.
6. **Función a trozos:** Son aquellas que se componen de trozos o segmentos de otras ya conocidas. Por consiguiente, en ocasiones no es posible presentarlas como una única expresión, así como se representan otras funciones. Son ejemplos de ellas

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2, & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x < -2 \\ x, & \text{si } -2 \leq x \leq 4 \\ -1, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

### 1.1.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

1. **Función par:** La función  $f$  se llama par, si para todo  $x$  en el dominio de  $f$  se tiene que  $f(-x) = f(x)$ .
2. **Función impar:** La función  $f$  se llama impar, si para todo  $x$  en el dominio de  $f$  se tiene que  $f(-x) = -f(x)$ . Existen funciones que no son ni pares ni impares, por ejemplo,  $f(x) = e^x$ .
3. Si  $f$  es una función par y  $g$  es una función impar, entonces  $f \cdot g$  es impar,  $f \cdot f$  es par y  $g \cdot g$  es par.
4. **Función periódica:** La función  $f$  es periódica, si existe  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ , tal que para todo  $x$  en  $D(f)$  se cumple que  $f(x+a) = f(x)$ . Al menor número positivo con esta propiedad se le llama periodo de la función  $f$ .
5. La función  $f$  es inyectiva, si para todo  $x_1$  y  $x_2$  en el dominio de  $f$ , con  $x_1 \neq x_2$ , se tiene que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Es decir, puntos distintos de la imagen del dominio de  $f$ , no pueden tener la misma imagen. Otra manera de decir lo anterior es: si  $f$  es inyectiva, si  $f(x_1) = f(x_2)$  entonces  $x_1 = x_2$ .
6. **Composición de funciones reales:** Dadas las funciones  $g : A \rightarrow B$  y  $f : B \rightarrow C$ . La compuesta de  $f$  y  $g$  denotada por  $(f \cdot g)$ , es la función definida por

$$\begin{aligned} f \cdot g : A &\rightarrow C \\ x &\rightarrow (f \cdot g)(x) = f[g(x)] \end{aligned}$$

El dominio de  $(f \cdot g)$  se define como  $D(f \cdot g) = \{x \mid x \in D(g) \text{ y } g(x) \in D(f)\}$ .

#### Para recordar

Funciones trigonométricas:  $y = \text{sen } x$ ,  $y = \text{cos } x$ ,  $y = \text{tan } x$ ,  $y = \text{csc } x$ ,  $y = \text{sec } x$ ,  
y  $y = \text{cot } x$ .

7. **Inversas de las funciones trigonométricas:**  $y = \text{arc sen } x$ ,  $y = \text{arc cos } x$ ,  $y = \text{arctan } x$ ,  
 $y = \text{arcsec } x$ , etc.

## 1.2 SOBRE LA DERIVADA

En el siglo XVII existía mucho interés por el estudio del movimiento y, por tanto, era fundamental determinar velocidades y aceleraciones. En aquella época se requería calcular, por ejemplo, la velocidad y aceleración de un cuerpo que se mueve en órbita elíptica o aún en movimientos más complicados. Esta fue, precisamente, la razón del desarrollo del concepto de la derivada.

El cálculo diferencial se remonta a los trabajos simultáneos (pero independientes) de Isaac Newton (1642 -1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), aunque debe decirse que habían tenido una labor preparatoria de muchos siglos desde la época de los antiguos griegos (siglo III a.C.) y también fueron complementados posteriormente (en su fundamentación lógica) por matemáticos del siglo XIX como Cauchy y Weierstrass. Pero fue el paso fundamental de Newton y Leibniz el que daría origen a lo hoy conocemos como análisis matemático. Newton, presentó su método para encontrar las derivadas (al que

llamaba método de fluxiones) aunque advertía que lo que buscaba era explicarlo más no demostrarlo con precisión, pues consideraba que sus resultados eran verdaderos desde el punto de vista físico y eso, para él era suficiente. Se sentía seguro con la geometría euclidiana, pero tenía dudas sobre los métodos de límites, aunque los utilizaba para calcular fluxiones, y por ello, apelaba a la física como última instancia de verdad.

La aproximación de Leibniz era diferente. La forma de intentar soslayar el difícil método de límites fue utilizar lo que el llamaba “infinitesimales”, aunque las críticas a este concepto fueron duras. Hasta el final de su vida, Leibniz continuó buscando explicaciones de lo que eran sus cantidades infinitamente pequeñas, sin lograrlo. Es decir, como Newton nunca tuvo conceptos claros ni justificación lógica de su Cálculo.

Por lo anterior, muchas definiciones e incluso algunos teoremas pueden escribirse en términos de problemas físicos a menudo de manera reveladora. De hecho, las necesidades de los físicos constituyeron la inspiración para estas ideas fundamentales del cálculo diferencial, y frecuentemente se mencionan las interpretaciones físicas, como camino para definir las ideas en forma matemática precisa y se discutirá su significado en términos de problemas matemáticos.

### 1.2.1 EL CONCEPTO DE TANGENTE

#### Ejemplo 1.1

Graficar las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = |x| \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{|x|}$$

**Solución:** Las gráficas de las funciones anteriormente establecidas se muestran a continuación.

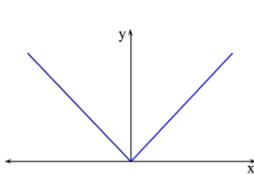


Figura 1.2: Función a)

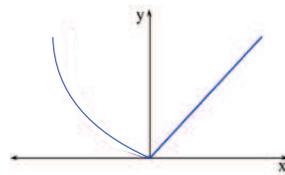


Figura 1.3: Función b)

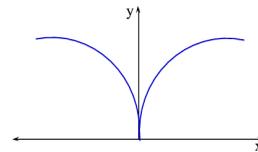


Figura 1.4: Función c)

Las gráficas anteriores ilustran ciertos tipos de comportamiento irregular que pueden presentar las funciones continuas. Las gráficas de éstas funciones están “quebradas” en  $(0, 0)$ , a diferencia de la gráfica de la figura (1.5):

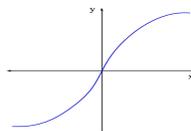


Figura 1.5

donde es posible trazar una “tangente” en cada punto. Las comillas se han usado para descartar las creencias de que hemos definido “quebrados” o “tangentes”, aunque estamos indicando que la gráfica puede estar “quebrada” en un punto en el que no se puede trazar una “tangente”.

### ¿Cómo definir la tangente?

No se puede definir la tangente como una línea que corta la gráfica solamente una vez, dado que tal definición sería demasiado restrictiva o demasiado amplia. Con esta definición, las funciones (1.6) y (1.7) tendrían dos tangentes.

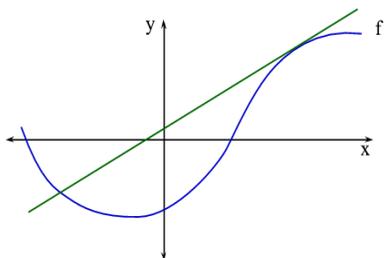


Figura 1.6

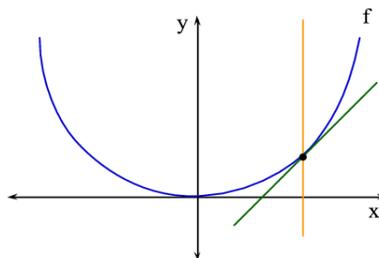


Figura 1.7

y las tres funciones (ver figura 1.8, 1.9 y 1.10) tendrán más de una tangente en los puntos que están “quebrados”.

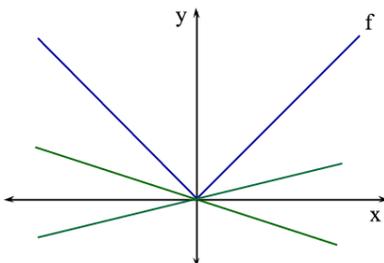


Figura 1.8

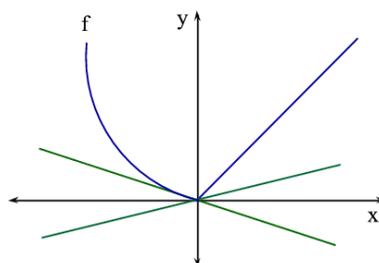


Figura 1.9

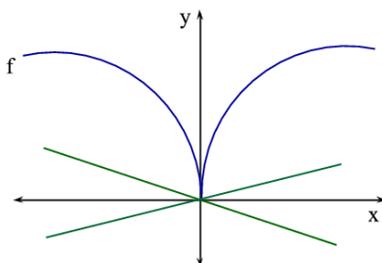


Figura 1.10

Una manera más prometedora de abordar la definición de tangente podría ser empezando con “secantes” y utilizando la definición de límite.

### 1.3 CONSTRUCCIÓN DE LA TANGENTE A UNA CURVA

Sea  $y = f(x)$  una función continua en  $(a, b)$ . Si existe la posición límite de la secante  $\overline{MP}$  cuando  $M$  tiende a  $P$  (o  $h$  tiende a cero), entonces a esta posición límite se denomina tangente a la curva en el punto  $P$ .

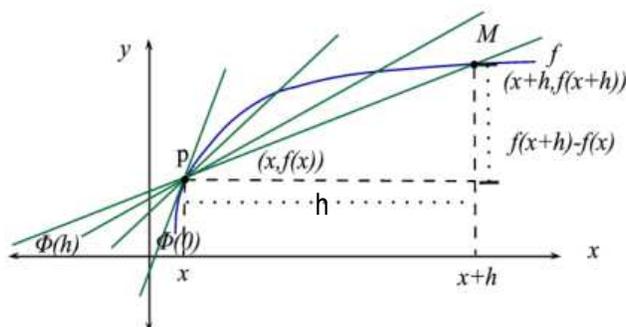


Figura 1.11: La recta tangente

Para conocer la tangente a la curva en el punto  $(x, f(x))$  basta conocer su ángulo de inclinación, es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \varphi_0. \quad (1.1)$$

¿Cómo conocer el ángulo  $\varphi_0$ ?

Podemos valernos de su tangente trigonométrica:

$$\tan \varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.2)$$

Si en el punto  $x$  existe tangente (no vertical) a la curva, entonces existe el límite  $\varphi(h)$ , pero como la función tangente es continua en su dominio, existirá también el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tan \varphi(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan \varphi_0, \quad (1.3)$$

luego

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]. \quad (1.4)$$

En otras palabras

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tan \varphi(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

es la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x, f(x))$ .

#### Definición 1.2

La recta tangente a la gráfica de la función  $y = f(x)$  en el punto  $(x, f(x))$  es aquella recta que pasa por  $P$  con pendiente:

$$m_{\text{tan}} = \tan(\varphi_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{con } h \neq 0, \quad (1.5)$$

siempre que el límite exista.

**Ejemplo 1.2**

Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función

$$y = f(x) = -x^2 + 2x + 2 \text{ en } x = -1, \frac{1}{2}, 2, 3$$

**Solución:**

Si  $x = -1$ , entonces  $m_{\text{tan}} = -2(-1) + 2 = 4$

Si  $x = \frac{1}{2}$ , entonces  $m_{\text{tan}} = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 1$

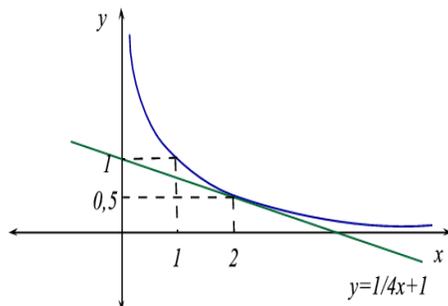
Si  $x = 2$ , entonces  $m_{\text{tan}} = -2(2) + 2 = -2$

Si  $x = 3$ , entonces  $m_{\text{tan}} = -2(3) + 2 = -4$ .

**Ejemplo 1.3**

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \text{ en el punto } \left(2, \frac{1}{2}\right)$$



**Figura 1.12:**  $f(x) = \frac{1}{x}$

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

Si  $x = 2$ , entonces  $m_{\text{tan}} = -\frac{1}{4}$ . Al reemplazar el valor de la pendiente y el punto dado en la ecuación  $y - y_0 = m(x - x_0)$  obtenemos que  $y = -\frac{1}{4}x + 1$ .

**1.4 VELOCIDAD PROMEDIO Y VELOCIDAD INSTANTÁNEA**

Si conducimos un automóvil de una ciudad a otra que está a 80 km en 2 horas ¿Cuál es la velocidad promedio?

La velocidad promedio es

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80 - 0}{2 - 0} = 40 \frac{Km}{h}.$$

Durante el viaje la lectura del velocímetro fue diferente de  $40 \frac{Km}{h}$ . Al principio registro  $0 \frac{Km}{h}$ ; a veces subió a  $57 \frac{Km}{h}$  y al final regreso  $0 \frac{Km}{h}$  nuevamente. ¿Qué mide el velocímetro?

El velocímetro mide la velocidad promedio.

Ahora, consideremos un objeto  $p$  que cae al vacío. El experimento muestra que si se inicia desde el reposo,  $p$  cae según la función  $f(t) = 16t^2$  pies en  $t$  segundos. Así  $f(1) = 16$ ,  $f(2) = 64, \dots$ , pies. Luego, el objeto cada vez cae más rápido.

La siguiente gráfica ilustra la situación anterior:

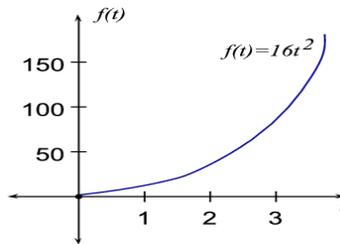


Figura 1.13:  $f(t) = 16t^2$

En los intervalos dados la velocidad promedio tiene el siguiente comportamiento:

Intervalos	Velocidad promedio
$1 \leq t \leq 2$	$\dots v_p = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 48$ pies/seg
$1 \leq t \leq 1,5$	$\dots v_p = \frac{f(1,5) - f(1)}{1,5 - 1} = 40$ pies/seg
$1 \leq t \leq 1,1$	$\dots v_p = \frac{f(1,1) - f(1)}{1,1 - 1} = 33,6$ pies/seg
$1 \leq t \leq 1,02$	$\dots v_p = \frac{f(1,02) - f(1)}{1,02 - 01} = 32,6$ pies/seg

En general en el intervalo  $[t, t+h]$   $\dots v_p = 32 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$ .

### 1.4.1 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Si un objeto se mueve, a lo largo de un eje coordenado con función de posición  $y(t) = f(t)$ , entonces la velocidad instantánea en el tiempo  $t$  es:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} v_p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \text{ con } h \neq 0, \quad (1.6)$$

siempre que el límite exista.

**Ejemplo 1.4**

Si un objeto se mueve con la ley  $f(t) = 16t^2$ , entonces la velocidad en el tiempo  $t$  es:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16(t+h)^2 - 16t^2}{h} = 32t$$

Nótese que  $v(1) = 32$ , coincide con el análisis anterior.

$$v(3, 8) = 32(3, 8) = 121, 6 \text{ pies/seg}$$

$$v(5, 4) = 32(5, 4) = 172, 8 \text{ pies/seg}$$

**¿Cuanto tiempo tardará el objeto para alcanzar una velocidad de 112 pies/seg?**

Como  $v(t) = 32t = 112$ , entonces  $t = 3, 5$  seg.

La tasa de cambio se puede expresar en diferentes campos, como la física (p.e. la velocidad, la densidad de un alambre, la corriente, etc.), la economía (el ingreso marginal), entre otras.

**Definición 1.3**

La derivada de una función  $f$  es otra función  $f'$  (f-prima) cuyo valor en  $x$  es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\varphi_0) \quad (1.7)$$

**Observaciones**

- i) Si el límite existe, decimos que  $f$  es derivable.
- ii) La tangente a la gráfica  $f$  en  $(x, f(x))$  es la recta que pasa por  $(x, f(x))$  y que tiene por pendiente  $f'$ . Esto quiere decir que la tangente en  $(a, f(a))$  sólo está definida si  $f$  es derivable.
- iii) El dominio de  $f'$  es el conjunto  $\left\{ \left( x, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \right\}$ .
- iv) Esta parte del cálculo se llama **Cálculo Diferencial**.

**Ejemplo 1.5**

Si  $f(x) = 13x - 6$ , hallar  $f'(4)$ . Hay dos formas:

$$1. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{13(x+h) - 6 - (13x - 6)}{h} = 13,$$

entonces  $f'(4) = 13$ .

$$2. f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(13)(4) + 13h - 6 - 13(4)}{h} = 13.$$

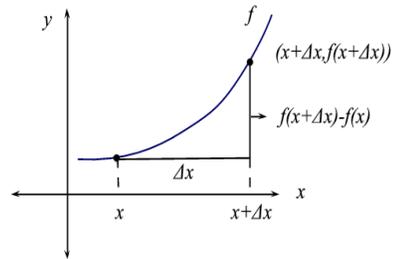
**Ejercicio.** Para las funciones  $f(x) = x^3 + 7x$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  y  $f(x) = \sqrt{x}$ , hallar su respectivas derivadas.

Otras notaciones usuales para la derivada son:

$$i) f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

$$ii) \left( \frac{dy}{dx} \right),$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

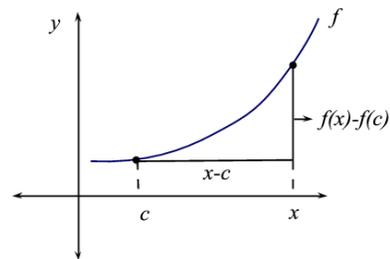


**Figura 1.14**

La figura (1.14) ilustra la situación.

iii) También

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$



**Figura 1.15**

donde la figura (1.15), ilustra también la situación.

### Ejemplo 1.6

Si  $g(x) = \frac{2}{x+3}$ , entonces  $g'(c) = \frac{-2}{(c+3)^2}$ . Hallar  $g'(1)$  y  $g'(-1)$ .

### Ejemplo 1.7

$f(x) = x^2$  entonces  $f'(4) = 8$ .

### Ejemplo 1.8

Si  $f(x) = \frac{2}{x}$  entonces  $f'(3) = -\frac{2}{9}$ .

**Teorema 1.1**

Si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

**Demostración:** Debemos demostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ , o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  que son dos definiciones para la continuidad puntual. Veamos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} h \right). \\ &= f'(a)(0) = 0. \quad \text{Luego, } \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a). \end{aligned}$$

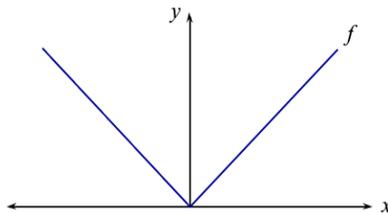
Para el otro caso, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}(x-a) \quad \text{con } x \neq a. \text{ Luego} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x-a). \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0. \\ &= f(a). \quad \text{Luego, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \end{aligned}$$

**Observación:** El recíproco del teorema (1.1) es falso, si una función  $f$  es continua en  $x = a$ , no implica que  $f'(a)$  exista. Por ejemplo consideremos la función

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

cuya gráfica se ilustra en la figura (1.16):



**Figura 1.16**

La pregunta es ¿Existe  $f'(0)$ ? ... **Respuesta:** Calculemos los límites laterales, es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h-0}{h} = 1. \quad \text{También,} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{-h} = -1. \quad \text{Luego } \lim_{h \rightarrow 0} f'(0) \text{ no existe.} \end{aligned}$$

Entonces, si

$$a \neq 0, f'(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a > 0 \\ -1, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica está ilustrada en la figura (1.17):

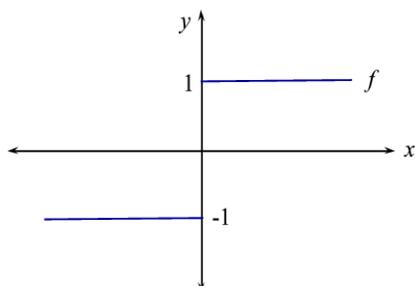


Figura 1.17: Gráfica de  $f'(a)$

La gráfica (1.18) resume algunos aspectos:

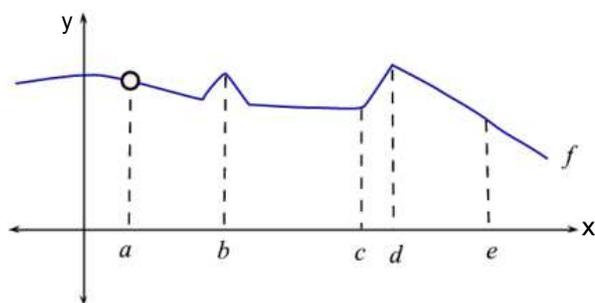


Figura 1.18

**En el punto:**

- a)  $f$  no es continua por consiguiente no derivable.
- b)  $f$  es continua pero no es derivable.
- c)  $f$  es continua pero no es derivable.
- d)  $f$  es continua pero no es derivable.
- e)  $f$  es continua y derivable.

## 2

## REGLAS PARA ENCONTRAR DERIVADAS

Introducimos el operador  $Dx$ , quien actuará como una máquina:

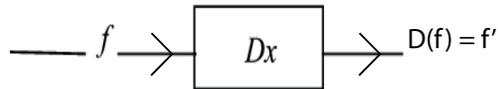


Figura 2.1:  $Dx[f(x)] = f'(x)$

### Teorema 2.1

Si  $f(x) = c$ , donde  $c$  es un número real, entonces  $f'(x) = 0$  o  $Dx(c) = 0$ .

### Demostración:

$$\begin{aligned} Dx(f(x)) = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (0) = 0. \end{aligned}$$

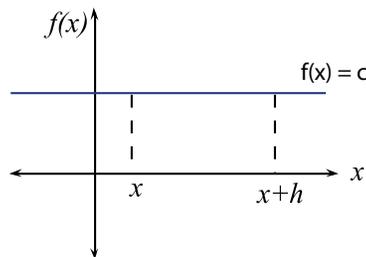


Figura 2.2: Gráfica de  $f(x) = c$

### ¿Qué significa que $f'(x) = 0$ ?

Significa que el ángulo de inclinación de la recta  $f(x) = c$  con la parte positiva del eje  $x$  es cero, es decir, la recta  $f(x) = c$  tiene pendiente cero.

**Ejemplo 2.1**

Hallar la ecuación de la recta tangente a  $f(x) = c$  en  $(a, f(x))$ .

**Solución:** La ecuación es

$$g(x) = f'(x)(x-a) + f(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = f(a) = c = f(x),$$

es decir,  $f(x)$  coincide con  $g(x)$ .

**Ejemplo 2.2**

Dada  $f(x) = mx + b$ ,  $f'(x) = m$ . Hallar la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $(a, f(a))$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} g(x) &= m(x-a) + f(a). \\ &= mx - ma + ma + b. \\ &= mx + b. \\ g(x) &= f(x). \end{aligned}$$

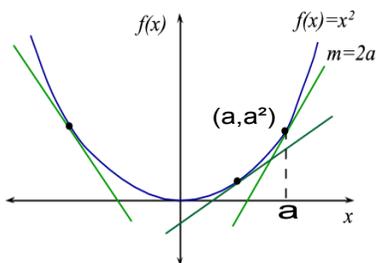
**¿Cuál es la moraleja?**

Las funciones  $f(x) = c$  y  $f(x) = mx + b$  son las únicas cuyas ecuaciones de sus respectivas rectas tangentes coinciden. Consideremos ahora la función  $f(x) = x^2$  y hallemos  $f'(a)$ .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - (a)^2}{h} = 2a.$$

**¿Qué significa  $f'(a) = 2a$ ?**

La figura (2.3) ilustra las tangentes a la gráfica de  $f$ . Cada tangente parece cortar la gráfica solamente una vez y esto puede comprobarse con bastante facilidad.



**Figura 2.3**

Como la recta tangente tiene como pendiente  $2a$ , la ecuación de la recta tangente es:

$$g(x) = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2.$$

Si  $f$  y  $g$  se cortan en el mismo punto, entonces se cumplen las relaciones:

$$(x, f(x)) = (x, g(x)) \Leftrightarrow x^2 = 2ax - a^2 \Leftrightarrow x = a.$$

Esto significa que  $(a, a^2)$  es el único punto de intersección. Miremos el caso en que una tangente corta la gráfica en más de un punto. Si  $f(x) = x^3$ , entonces

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = 3a^2.$$

Luego, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(a, a^3)$  es  $3a^2$ . Esto significa que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = x^3$  en  $(a, a^3)$  es

$$g(x) = m(x - a) + a^3 = 3a^2x - 2a^3.$$

Como la gráfica de  $f$  y  $g$  se intersectan en el punto donde  $(x, f(x)) = (x, g(x))$ , entonces tenemos que:

$$x^3 = 3a^2x - 2a^3 \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0.$$

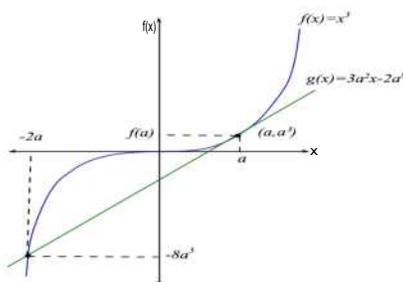
Como  $x = a$  es raíz de  $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$ , entonces  $(x - a)$  es un factor de  $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$ , por consiguiente

$$(x - a)(x^2 + ax - 2a^2) = 0.$$

Nótese que  $x = a$  también es raíz de  $x^2 + ax - 2a^2 = 0$ , por consiguiente podemos escribir que

$$(x - a)(x - a)(x + 2a) = 0.$$

Como puede verse en la gráfica (2.4) la tangente en  $(a, a^3)$  corta también a la gráfica en  $(-2a, -8a^3)$ .



**Figura 2.4:** Gráfica de  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = 3a^2x - 2a^3$

**Observación:** La función  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ , no es derivable en  $x = 0$ . ¡ Veámoslo!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = 0, & h < 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, & h > 0. \end{cases}$$

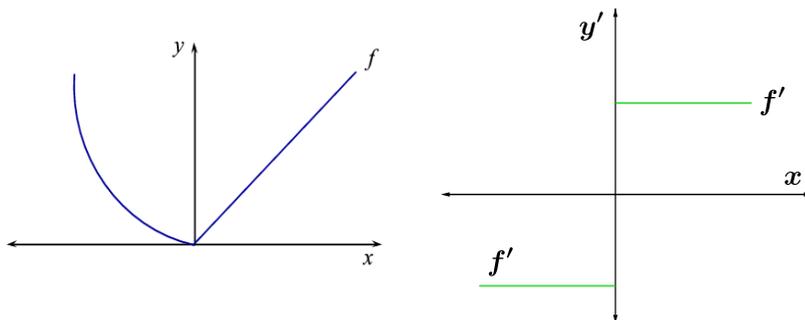
Por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1.$$

Luego,  $f'(0)$  no existe (e.d.  $f$  no es derivable en cero). Sin embargo  $f'(x)$  existe para  $x \neq 0$ , pues

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

La gráfica (2.5) ilustra la situación.



**Figura 2.5:** Gráficas de  $f$  y  $f'$

### Ejercicio.

- Analizar las gráficas de las funciones  $f(x) = \sqrt{|x|}$  y  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .
- Hacer la gráfica de una función  $f$  continua que deja de ser derivable en varios puntos; en un número infinito de ellos.
- Hacer la gráfica de una función  $f$  continua por todas partes y derivable en ningún punto.

### Teorema 2.2

Si  $f(x) = x$ , entonces  $Dx(f(x)) = f'(x) = 1$ .

### Demostración:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1) = 1.$$

### Recordemos que:

$$\begin{array}{l} (a+b)^0 = 1 \\ (a+b)^1 = a+b \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6b^2a^2 + 4ab^3 + b^4 \\ \vdots \\ (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2} + \dots + nab^{n-1} + b^n \end{array}$$

**Teorema 2.3**

Si  $f(x) = x^n$  con  $n$  entero positivo, entonces  $Dx(x^n) = f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Demostración:**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - (x)^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \right]$$

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

**Ejemplo 2.3**

$$Dx(x^3) = 3x^2, \quad Dx(x^8) = 8x^7.$$

**Teorema 2.4**

Si  $c$  es una constante y  $f$  es una función diferenciable, entonces

$$Dx(cf(x)) = cDx(f(x)) = cf'(x).$$

**Demostración:** Sea  $F(x) = cf(x)$ , entonces

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}.$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h}.$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$$F'(x) = cf'(x).$$

**Ejemplo 2.4**

$$\begin{aligned} Dx(-7x^3) &= -7Dx(x^3) \\ &= -7(3x^2) = -21x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dx\left(\frac{3}{4}x^9\right) &= \frac{3}{4}Dx(x^9) \\ &= \frac{3}{4}(9x^8) = 12x^8. \end{aligned}$$

**Teorema 2.5**

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables, entonces

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x) \quad \text{o} \quad Dx[f(x) \pm g(x)] = Dx(f(x)) \pm Dx(g(x)). \\ &= f'(x) \pm g'(x).\end{aligned}$$

**Demostración:** Sea  $F(x) = f(x) \pm g(x)$ , entonces

$$\begin{aligned}F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - (f(x) \pm g(x))}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x) \\ &= Dx(f(x)) \pm Dx(g(x)).\end{aligned}$$

**Observación:**  $Dx$  es un operador lineal, pues  $Dx[cf(x)] = cDx(f(x)) = cf'(x)$ .

**Ejemplo 2.5**

Si  $f(x) = 5x^2 + 7x - 6$ , entonces

$$\begin{aligned}f'(x) = Dx[f(x)] &= Dx[5x^2 + 7x - 6] \\ &= Dx[5x^2] + Dx[7x] - Dx[-6] \\ &= 5Dx(x^2) + 7Dx(x) + 0 \\ &= 10x + 7.\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.6**

Si  $g(x) = x$ ,  $h(x) = 1 + 2x$  y  $f(x) = g(x)h(x) = x(1 + 2x) = x + 2x^2$ , entonces

$$\begin{aligned}Dx(f(x)) &= Dx(x + 2x^2) = 1 + 4x. \\ Dx(h(x)) &= Dx(1 + 2x) = 2. \\ Dx(g(x)) \cdot Dx(h(x)) &= 2.\end{aligned}$$

También,  $Dx[x + 2x^2] = 1 + 4x$ . Entonces

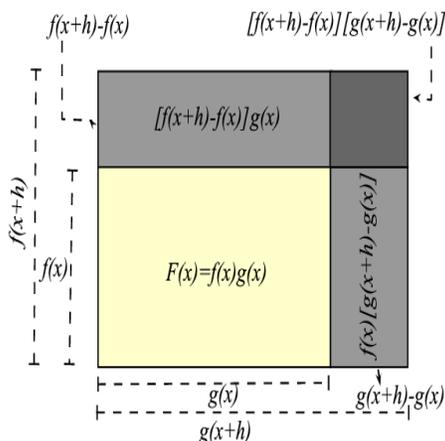
$$Dx[f(x)] \neq Dx[g(x)] \cdot Dx[h(x)].$$

**Teorema 2.6**

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables, entonces

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = Dx(f(x)) \cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Consideremos la siguiente ilustración para la regla del producto con  $f(x+h) - f(x)$  y  $g(x+h) - g(x)$  positivos.



**Figura 2.6:** Geometría de la derivada de un producto

**Demostración:** Sea  $F(x) = f(x)g(x)$ , entonces

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) &= (\text{Área de todo el rectángulo}) - (\text{Área no sombreada}) \\ &= (\text{A la suma de las áreas de los rectángulos sombreados}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ g(x) \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + f(x) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} \cdot [g(x+h) - g(x)] \right] \\ &= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \\ &= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g'(x). \\ &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

### Ejemplo 2.7

Si  $F(x) = (3x^2 - 5)(2x^4 - x)$ , entonces

$$F'(x) = 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

**Ejemplo 2.8**

Si  $F(x) = (4x^2 - 6x)(x^3 - 4)(x^5 - 6) = [(4x^2 - 6x)(x^3 - 4)](x^5 - 6)$ , entonces

$$F'(x) = \{(8x - 6)(x^3 - 4) + (4x^2 - 6)(3x^2)\}(x^5 - 6) + [(4x^2 - 6x)(x^3 - 4)](5x^4)$$

**Teorema 2.7**

Si  $g$  es derivable en  $x$  y  $g(x) \neq 0$ , entonces  $\frac{1}{g}$  es derivable en  $x$ , y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g}(x+h) - \frac{1}{g}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x+h)g(x)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.9**

Si  $f(x) = \frac{1}{2x}$ , entonces  $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$ .

**Ejemplo 2.10**

Demuestre que la regla de la potencia se cumple para enteros negativos, es decir que  $Dx(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$ .

$$\begin{aligned} Dx[x^{-n}] &= Dx\left[\frac{1}{x^n}\right] = -\frac{Dx(x^n)}{(x^n)^2} \\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{-n-1}. \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Derivar las funciones dadas utilizando los ejemplos anteriores.

$$1. f(x) = \frac{1}{x} \quad 2. f(x) = \frac{1}{mx+b} \quad 3. f(x) = \frac{1}{x^2} \quad 4. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

**Teorema 2.8**

Sean  $f$  y  $g$  funciones diferenciables con  $g(x) \neq 0$ . Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

**Ejercicio.** Demostrar el teorema anterior, utilice los teoremas 3.5 y 3.1.

**Ejemplo 2.11**

Derivar la función  $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+7}$ .

$$\begin{aligned} Dx[f(x)] = f'(x) &= \frac{(x^2+7)Dx(3x-5) - (3x-5)Dx(x^2+7)}{(x^2+7)^2} \\ &= \frac{(x^2+7)(3) - (3x-5)(2x)}{(x^2+7)^2} = \frac{-3x^2+10x+21}{(x^2+7)^2} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.12**

Encuentre  $Dx$  si  $y = \frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} Dx[y] = y' = \frac{dy}{dx} &= Dx\left[\frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x}\right] = Dx\left[\frac{2}{x^4+1}\right] + Dx\left[\frac{3}{x}\right] \\ &= \frac{(x^4+1)Dx(2) - 2Dx(x^4+1)}{(x^4+1)^2} + \frac{xDx(0) - 3Dx(x)}{x^2} \\ &= \frac{(x^4+1)(0) - 2(4x^3)}{(x^4+1)^2} + \frac{x(0) - 3(1)}{x^2} \\ &= \frac{-8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2}. \end{aligned}$$

Otra solución es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2Dx\left[\frac{1}{x^4+1}\right] + 3Dx\left[\frac{1}{x}\right] = 2\left[\frac{-Dx(x^4+1)}{(x^4+1)^2}\right] + 3\left[\frac{-Dx(x)}{x^2}\right] \\ &= \frac{-2(4x^3)}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2} = -\frac{8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.13**

$$Dx \left[ \frac{3}{x} \right] = Dx [3x^{-1}] = 3Dx [x^{-1}] = 3(-x^{-2}) = -\frac{3}{x^2}.$$

**2.1 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

Recordemos que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos}(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$$

**Teorema 2.9**

$$Dx(\operatorname{sen} x) = \operatorname{cos} x \quad \text{y} \quad Dx(\operatorname{cos} x) = -\operatorname{sen} x$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} Dx(\operatorname{sen} x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\ Dx(\operatorname{sen} x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(h) + \operatorname{sen}(h) \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\ Dx(\operatorname{sen} x) &= \lim_{h \rightarrow 0} -\operatorname{sen}(x) \frac{(1 - \cos h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cos(x) \\ Dx(\operatorname{sen} x) &= -\operatorname{sen}(x)(0) + 1 \cdot \cos(x) \\ Dx(\operatorname{sen} x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dx(\operatorname{cos} x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos}(x+h) - \operatorname{cos}(x)}{h} \\ Dx(\operatorname{cos} x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos}(x) \cos(h) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(h) - \operatorname{cos}(x)}{h} \\ Dx(\operatorname{cos} x) &= -\operatorname{cos}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(h))}{h} - \operatorname{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \\ Dx(\operatorname{cos} x) &= -\operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

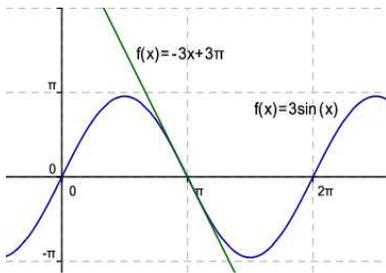
**Ejemplo 2.14**

Nótese que si  $f(x) = 3 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{cos} x$ , entonces

$$Dx(3 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{cos} x) = 3 \operatorname{cos} x + 2 \operatorname{sen} x$$

**Ejemplo 2.15**

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$  en el punto  $(\pi, 0)$  (ver figura 2.7).



**Figura 2.7:** Gráficas de  $f$  y su tangente en  $(0, \pi)$

**Solución:**

$$Dx(f(x)) = f'(x) = Dx(3 \operatorname{sen} x) = 3 \cos x,$$

es decir,  $f'(x) = 3 \cos x$  y

$$f'(\pi) = -3 = m.$$

Como la ecuación de la recta es  $f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$ , entonces  $f(x) - 0 = -3(x - \pi)$ .

Luego, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(0, \pi)$  es  $f(x) = -3x + 3\pi$ .

**Ejercicio.** Calcular  $Dx(\tan x)$ ,  $Dx(\sec x)$ ,  $Dx(\cot x)$ ,  $Dx(\csc x)$ .

## 2.2 DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO

Si  $y = f(x) = \log_a x$ , con  $a \neq 1$  y  $x > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \log_a \left( \frac{x+h}{x} \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \right]^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{x} \left[ \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \right]^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \right]^{\frac{x}{h}}. \end{aligned}$$

Si  $t = \frac{h}{x}$ ,  $\frac{1}{t} = \frac{x}{h}$ , entonces

$$\frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \log_a(1+t) \right]^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right] = \frac{1}{x} \log_a \left[ \lim_{h \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

Nótese que si  $a = e$ ,  $f(x) = \ln x$ , entonces  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . Ahora, si  $f(x) = a^x$ , con  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  y  $x \neq 0$ , entonces

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{(x+h)} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \left( \frac{a^h - 1}{h} \right) = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$f'(x) = a^x \log a. \text{ Si } a = e, f(x) = e^x, \text{ entonces } f'(x) = e^x.$$

## 2.3 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las funciones hiperbólicas se definen así:

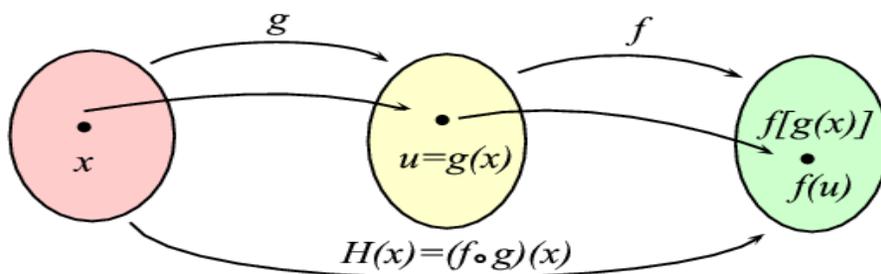
$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{tanh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{cosh}(x)}$$

$$\operatorname{coth}(x) = \frac{\operatorname{cosh}(x)}{\operatorname{senh}(x)} \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{cosh}(x)} \quad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$$

**Ejercicio.** Hallar las derivadas de las funciones hiperbólicas.

## 2.4 FUNCIONES COMPUESTAS

El siguiente diagrama ilustra la composición de funciones



**Figura 2.8:** Composición de funciones

Nótese que la composición de dos funciones se escribe de segunda a la que actúa de primero.

### Teorema 2.10

Sean  $H(x) = y = f(u)$ , con  $u = g(x)$ . Si  $g$  es diferenciable en  $u = g(x)$ , entonces la función compuesta  $H(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$  es diferenciable en  $x$  y

$$H'(x) = (f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'[g(x)] \cdot g'(x) \, dx, \text{ ó } H'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$$

Es decir que  $H'(x) = y' = Dx(y) = Du(y) \cdot Du(x)$ . La regla de Leibnitz o regla de la cadena se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

### Ejemplo 2.16

Derivar las siguientes funciones utilizando la regla de la cadena:

- $y = \operatorname{sen}(x^3 - 3x)$ .

$$2. \left( \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right)^{13}.$$

$$3. y = e^{3x}.$$

$$4. \cos(3x).$$

$$5. (x^3 \operatorname{sen}(x))^6.$$

$$6. \left( \frac{t}{\cos t} \right)^4.$$

$$7. \operatorname{sen}^3(4x).$$

$$8. \operatorname{sen}[\cos(x^2)].$$

$$9. y = (x^3 - 2x)^{12}.$$

$$10. y = \cos^3(x^2 + 1) = [\cos(x^2 + 1)]^3.$$

**Solución:**

1. Si  $y = \operatorname{sen}(x^3 - 3x) = H(x)$ , entonces si  $u = x^3 - 3x$ , y  $y = \operatorname{sen} u$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(u) \cdot (3x^2 - 3) \\ &= (3x^2 - 3) \cos(x^3 - 3x). \end{aligned}$$

2.  $D_t \left[ \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right]^{13}$ , si  $u = \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}$ , y  $y = u^{13}$  entonces

$$\frac{dy}{dt} = 13u^{12} \cdot \frac{(t^4 + 3)(3t^2 - 2) - (t^3 - 2t + 1)(4t^3)}{(t^4 + 3)^2}.$$

3.  $y = e^{3x}$  (**Ejercicio**).

$$4. Dx (\cos 3x) = -\operatorname{sen}(3x)(3) = -3 \operatorname{sen}(3x).$$

$$5. Dx (x^3 \operatorname{sen} x)^6 = 6(x^3 + \operatorname{sen} x)^5 \cdot (3x^2 + \cos x).$$

6.

$$\begin{aligned} Dt \left( \frac{t}{\cos t} \right)^4 &= 4 \left( \frac{t}{\cos t} \right)^3 = \left( \frac{\cos(3t)(1) - t(-\operatorname{sen} 3t)(3)}{(\cos 3t)^2} \right) \\ &= 4 \left( \frac{t}{\cos 3t} \right)^3 \left( \frac{\cos(3t) + 3t \operatorname{sen}(3t)}{\cos^2(t)} \right) \end{aligned}$$

7.  $Dx \operatorname{sen}^3(4x)$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^3(4x) &= \operatorname{sen}(4x)^3 \\ &= 3(\operatorname{sen}(4x))^2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \\ &= 3(\operatorname{sen}(4x))^2 \cdot \cos(4x) \cdot (4x) \\ &= 12 \operatorname{sen}^2(4x) \cdot \cos(4x). \end{aligned}$$

8.  $D_x \text{sen}[\cos(x^2)]:$

$$\begin{aligned} D_x \text{sen}[\cos(x^2)] &= \cos(\cos(x^2)) \cdot D_x(\cos(x^2)) \\ &= \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\text{sen}(x^2)) \cdot D_x(x^2) \\ &= -2x \cos(\cos(x^2)) \cdot \text{sen}(x^2). \end{aligned}$$

9. Sea  $u = x^3 - 2x$ , entonces  $y = u^{12}$ , según la notación de Leibnitz tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 12u^{11} \cdot (3x^2 - 2) \\ &= 12(x^3 - 2x)^{11} \cdot (3x^2 - 2). \end{aligned}$$

10. Sea  $y = \cos^3(x^2 + 1) = [\cos(x^2 + 1)]^3$ , entonces  $u = x^2 + 1$  y  $y = (\cos u)^3$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3 \cos^2 u (-\text{sen} u) \cdot 2x \\ &= -6x \cos^2(x^2 + 1) \text{sen}(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Existe una forma rápida para derivar el ejercicio anterior y es de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3 \cos^2(x^2 + 1) \cdot (-\text{sen}(x^2 + 1))(2x) \\ &= -6x \cos^2(x^2 + 1) \text{sen}(x^2 + 1). \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Derivar las funciones

$$1. y = e^{\sqrt{x}} \quad 2. y = e^{x^2 \ln x} \quad 3. y = x e^{\frac{x}{2}}$$

### Teorema 2.11

Sea  $y = f(u)$  con  $u = g(x)$ . Si  $g$  es diferenciable en  $x$  y  $f$  es diferenciable en  $u = g(x)$  entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

**Demostración:** Sea  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ , entonces

$$\begin{aligned}\Delta u &= g(x + \Delta x) - g(x) \\ \Delta y &= f[g(x + \Delta x)] - f[g(x)] \\ &= f[u + \Delta u] - f[u] \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

## 2.5 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Dada la función  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$ , podemos derivarla n-veces

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6x^2 - 8x + 7 = \frac{dy}{dx} = y' = D_x(f(x)) \\ f''(x) &= \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}[6x^2 - 8x + 7] = 12x - 8 = \frac{d^2f}{dx^2} = y'' = D^2_x(f(x)) \\ f'''(x) &= \frac{d}{dx}[f''(x)] = \frac{d}{dx}[12x - 8] = 12 = \frac{d^3f}{dx^3} = y''' = D^3_x(f(x)) \\ f^4(x) &= \frac{d^4f}{dx^4} = 0 = y^4 = D^4_x(f(x)) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= y^{(n)} = D^n_x(y) = \frac{d^ny}{dx^n}\end{aligned}$$

### Ejemplo 2.17

Si  $y = \text{sen}(2x)$ , hallar,  $\frac{d^3y}{dx^3}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\cos(2x); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx}(2\cos(2x)) \\ &= -4\text{sen}(2x).\end{aligned}$$

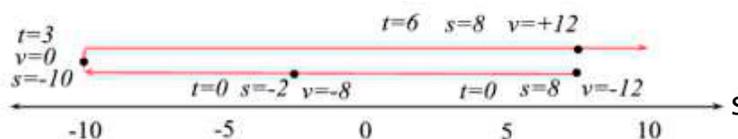
$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx}[-4\text{sen}(2x)] \\ &= -8\cos(2x).\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.18**

Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado de modo que su posición  $s$  satisfice  $s(t) = 2t^2 - 2t + 8$ , donde  $s$  se mide en centímetros y  $t$  en segundos con  $t \geq 0$ . Determine la velocidad del objeto cuando  $t = 1, t = 6$ . ¿En qué momento la velocidad es cero? ¿Cuándo la velocidad es positiva?

**Solución:** La velocidad  $v$  del objeto es  $\frac{ds}{dt} = v(t) = 4t - 12$ ; donde  $v(1) = -8 \frac{cm}{seg}$  y  $v(6) = 12 \frac{cm}{seg}$ . La velocidad es cero cuando  $v(t) = 4t - 12 = 0$ , y esto ocurre cuando  $t = 3$ .

La velocidad es positiva cuando  $v(t) = 4t - 12 > 0$ , es decir si  $t > 3$ . La siguiente gráfica ilustra la situación del problema:



**Figura 2.9:** Movimiento del objeto

El objeto está moviéndose a lo largo del eje  $f$ , sobre la trayectoria señalada. La trayectoria señalada muestra lo que le sucede al objeto: entre  $t = 0$  y  $t = 3$  la velocidad es negativa, el objeto se mueve hacia la izquierda; en  $t = 3$  se ha “frenado” a una velocidad cero. Después se mueve hacia la derecha conforme la velocidad es positiva. En conclusión la velocidad es negativa en la medida que disminuye  $f$  y es positiva en la medida que aumenta  $f$ .

**Ejemplo 2.19**

Un punto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontalmente de tal manera que su posición en el instante  $t$  está dada por  $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$ , donde  $s$  esta dado en *pies*, y  $t$  en segundos.

- ¿Cuándo la velocidad es cero?
- ¿Cuándo la velocidad es positiva?
- ¿Cuándo el punto se está moviendo hacia la izquierda?(dirección negativa)
- ¿Cuándo la aceleración es positiva?

**Solución:**

- La velocidad en el tiempo  $t$  es  $\frac{ds}{dt} = v(t) = 3t^2 - 24t + 36 = t^2 - 8t + 12 = (t - 2)(t - 6)$  y la velocidad es 0 cuando  $v(t) = 0$ ; esto ocurre en  $t = 2$  y  $t = 6$ .
- La velocidad es positiva sí  $v(t) = (t - 2)(t - 6) > 0$ ; y esto ocurre cuando  $t < 2$  o  $t > 6$ : es decir en el intervalo  $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$ .

- c) El punto se mueve hacia la izquierda si  $v(t) = t - 2)(t - 6) < 0$ ; esto ocurre en el intervalo  $(2, 6)$ .
- d) La aceleración es positiva si  $a = \frac{dv}{dt} = 6t - 24 = 6(t - 4) > 0$ , y esto ocurre cuando  $t > 4$ .

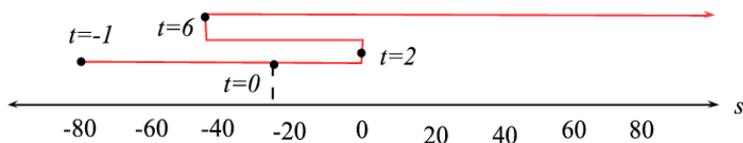


Figura 2.10: Movimiento del objeto

### 2.5.1 UN PROBLEMA SOBRE CAÍDA LIBRE

Si un objeto se lanza directamente hacia arriba (o hacia abajo) desde una altura inicial  $y_0$  pies, con una velocidad inicial  $V_0$  pies por segundo y  $y$  es su altura por encima del piso en pies, después de  $t$  - segundos, entonces su posición es:

$$y(t) = -16t^2 + V_0t + y_0,$$

donde  $v(t)$  es positiva.

#### Ejemplo 2.20

Desde la ventana de un edificio ubicada a 160 pies de altura con respecto al suelo, se lanza verticalmente hacia arriba, una pelota con una velocidad inicial de 64 pies por segundo.

- ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
- ¿Cuál es su altura máxima?
- ¿Cuándo llega al piso?
- ¿Con qué velocidad llega al piso?
- ¿Cuál es su aceleración en  $t = 2$  seg?

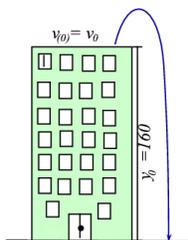


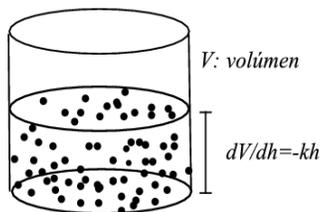
Figura 2.11: Problema sobre caída libre

**Solución:** Como  $y_0 = 160$  pies,  $v_0 = 64 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$  y  $y(t) = -16t^2 + 64t + 160$ , entonces:

- La velocidad en el tiempo  $t$  es  $V(t) = -32t + 64$  el objeto alcanza la altura máxima cuando  $v(t) = 0$  es decir en  $t = 2$ .
- La altura máxima es  $y(2) = 224$  pies.
- El objeto llega al piso cuando  $y(t) = 0$ ; es decir cuando  $t_1 = 2pm \sqrt{14}$  o  $t_2 = 2 - \sqrt{14}$  ¿Cuántos segundos demora la pelota en llegar al piso?
- La velocidad con que es  $v(2 + \sqrt{14}) \approx -119,73$  ¿Con qué rapidez llega al piso?
- La aceleración de la pelota en el tiempo  $t$  es  $a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$  y la aceleración en  $t = 2$  es  $a(2) = -32 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$  (aceleración debida a la gravedad).

### 2.5.2 MODELACIÓN MATEMÁTICA

- De un depósito cilíndrico, está saliendo agua a una razón proporcional a la profundidad del agua. ¿Qué ecuación describe esta situación?



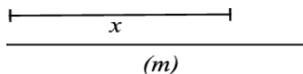
**Figura 2.12:** Depósito de agua

**Solución:** Como  $V$  es el volumen del depósito y  $h$  es la altura del agua, la razón de cambio del volumen respecto a la altura del agua está dado por la ecuación

$$\frac{dV}{dh} = -kh$$

que es una ecuación diferencial ordinaria.

- La densidad (en gramos por centímetros) de un alambre de masa  $m$  en un punto es igual al doble de su distancia al extremo izquierdo.



**Figura 2.13:** Tasa de cambio de la masa respecto a la longitud del alambre

**Solución:** El cambio de la masa ( $m$ ) respecto a la longitud ( $x$ ) está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dm}{dx} = 2x.$$

3. La altura de un árbol continúa aumentando pero a una razón cada vez más corta.



Figura 2.14: Altura del árbol

**Solución:** La situación anterior esta modelada por las siguientes expresiones:

$$\frac{dh}{dt} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2h}{dt^2} > 0$$

## 2.6 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

¿Qué significa la expresión  $y = f(x)$ ?

La expresión anterior  $y$  es llamada la variable independiente y  $x$  es llamada la variable dependiente. Cuando esto ocurre decimos que  $y$  esta expresada explícitamente. Dada la expresión  $y^3 + 7y = x^3$ , en la que no se puede despejar la variable  $y$  en términos de  $x$ .

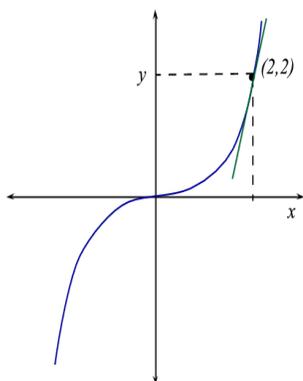
¿Qué significa la expresión  $y = f(x)$ ?

Debemos resolver la ecuación  $y^3 + 7y = 8$ ,  $y = 1$ , es la única solución real. Cuando ocurre esto decimos que la ecuación  $y^3 + 7y = 8$  define a  $y$  como una función **IMPLÍCITA** de  $x$ . La gráfica de la función  $y^3 + 7y = 8$  es derivable.

La ecuación original la podemos escribir como  $[y(x)]^3 + 7[y(x)] = x^3$ . Aplicando la regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{d}{dy}[y^3] + \frac{d}{dy}[7y] = \frac{d}{dx}[x^3] \quad \Leftrightarrow \quad 3y^2 \frac{dy}{dx} + 7 \frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx}[3y^2 + 7] = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$



¿Cuál es la pendiente en el punto (2,2) (ver figura 2.15)?

Esta es:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,2)} = \frac{3(2)^2}{3(2)^2 + 7} = \frac{12}{19}$$

¿El método anterior es legítimo?  
¡Veámoslo!

Figura 2.15

**Ejemplo 2.21**

Hallar  $\frac{dy}{dx}$  para

$$4x^2y - 3y = x^3 - 1. \quad (2.1)$$

**Solución:** Derivando a ambos lados obtenemos

$$8xy + 4x^2 \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} = 3x^2,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}. \quad (2.2)$$

Despejando y en la ecuación (3.1) obtenemos que

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3},$$

que al derivarla con respecto a  $x$  queda como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(4x^2 - 3) \frac{d}{dx}(x^3 - 1) - (x^3 - 1) \frac{d}{dx}(4x^2 - 3)}{(4x^2 - 3)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) es diferente a la ecuación (2.3).

Reemplazando el valor de  $y$  en la ecuación (2.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2 - 8x \left[ \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3} \right]}{4x^2 - 3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por lo anterior, podemos ver que las ecuaciones (2.3) y (2.4) son iguales.

**Ejemplo 2.22**

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva  $y^3 - xy^2 + \cos(xy) = 2$ , en el punto  $(0, 1)$ .

**Solución:**

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} - \operatorname{sen}(xy)[y + xy'] = 0.$$

Despejando  $y'$  obtenemos que

$$y' = \frac{y^2 + y \operatorname{sen}(xy)}{3y^2 - 2xy - x \operatorname{sen}(xy)} \quad y \quad y'(0) = \frac{1 + 1 \operatorname{sen}(0)}{3(1)^2 - 2(0) - 0} = \frac{1}{3}.$$

Reemplazando el valor de la pendiente y el punto  $(0, 1)$  en la ecuación

$y - y_0 = m(x - x_0)$  obtenemos que  $y = \frac{1}{3}x + 1$  es la ecuación de la recta tangente a la curva dada.

**Teorema 2.12**

Sea  $r$  cualquier número racional, entonces, para  $x > 0$ ,  $Dx[x^r] = rx^{r-1}$ , donde

$$r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

**Demostración:** Sea  $r = \frac{p}{q}$ , entonces  $y = x^r = x^{\frac{p}{q}}$  o  $y^q = x^p$ . Derivando implícitamente la expresión anterior tenemos que  $qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1}$ , de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{\left[x^{\frac{p}{q}}\right]^{q-1}} = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q} x^{p-1} x^{-p+\frac{p}{q}}, \quad \text{o}$$

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}. \quad (2.5)$$

**Ejemplo 2.23**

Derivar  $y = 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt{x^2 + 1}$ .

**Solución:**

$$y = 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt{x^2 + 1} = 2x^{\frac{5}{3}} + (x^2 + a)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

**Ejercicio.** Derivar las siguientes funciones

1.  $y = a^x$

2.  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$

3.  $y = \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2}}; \quad x > 1$

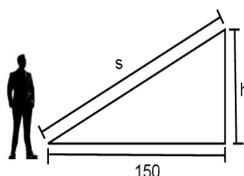
## 2.7 TASAS DE CAMBIO RELACIONADAS

Consideremos algunos ejemplos.

### Ejemplo 2.24

Se suelta un pequeño globo en un punto a 150 pies de un observador, quien se encuentra al nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta hacia arriba a una velocidad de  $8 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$ ,

¿Qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando el globo está a 50 pies de altura?



**Figura 2.16:** Globo vs Observador

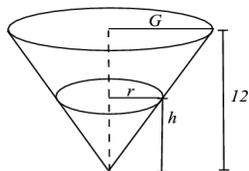
De los datos del problema obtenemos que:  $\frac{dh}{dt} = 8 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$ ,  $\frac{ds}{dt} = ?$ ,  $h = 50 \text{ pies}$ . Del triángulo de la figura obtenemos que

$$s^2 = h^2 + (150)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2s \frac{ds}{dt} = 2h \frac{dh}{dt},$$

si  $h = 50 \Rightarrow s = 50\sqrt{10}$ . Luego,  $\frac{ds}{dt} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2,53 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$ .

### Ejemplo 2.25

Fluye agua hacia un tanque cónico a razón de  $8 \text{ pies}^3$  por minuto. Si la altura del tanque es  $12 \text{ pies}$  y el radio de su aberturas circular es de  $6 \text{ pies}$ , ¿Qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuándo esta está a una profundidad de  $4 \text{ pies}$ ?



**Figura 2.17:** Tanque cónico

De los datos del problema tenemos que

$$\frac{dv}{dt} = 8 \frac{\text{pies}^3}{\text{min}}, \quad \frac{dh}{dt} = ?, \quad h = 4 \text{ pies.}$$

El volumen del tanque es

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \quad (2.6)$$

La variable  $r$  no interesa, pues no conocemos  $\frac{dr}{dt}$ . De la figura 2.17 tenemos que  $\frac{r}{h} = \frac{6}{12}$  o

$$r = \frac{h}{2}. \quad (2.7)$$

Reemplazando (2.7) en (2.6) obtenemos que  $V = \frac{\pi}{12} h^3$  de donde

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637 \frac{\text{pies}}{\text{min}}.$$

### Teorema 2.13

Sea  $f$  derivable y estrictamente monótona en un intervalo  $I$ . Si  $f'(x) \neq 0$  en cierto  $x$  de  $I$ , entonces  $f^{-1}$  es derivable en el punto correspondiente  $y = f(x)$  en el rango de  $f$  y  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ .

Otra forma de escribir la conclusión del teorema es

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

La demostración queda como ejercicio.

### Ejemplo 2.26

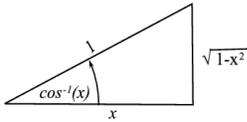
Si  $f(x) = 2x + 6$ ,  $f[f^{-1}(x)] = 2f'(x) + 6 = x$ , de donde  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$ , y  $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$  entonces

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{2}.$$

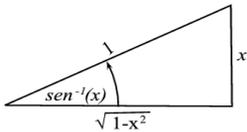
## 2.8 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

### Teorema 2.14

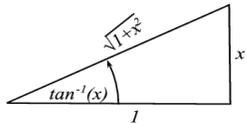
$$\begin{aligned}
 1. \quad \operatorname{sen}(\cos^{-1}(x)) &= \sqrt{1-x^2} & 2. \quad \cos(\operatorname{sen}^{-1}(x)) &= \sqrt{1-x^2} \\
 3. \quad \sec(\tan^{-1}(x)) &= \sqrt{1+x^2} & 4. \quad \tan(\sec^{-1}(x)) &= \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2-1}, & x \leq -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$



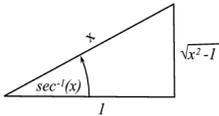
1. Como  $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ,  $0 \leq \theta < \pi$ , entonces  $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ . Sea  $\theta = \cos^{-1}(x)$  entonces  $\cos \theta = x$  y  $\cos^2 \theta = x^2$ . Luego  $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ .



2. Como  $\cos \theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$ , y  $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}^{-1}(x)$ ,  $\operatorname{sen} \theta = x$ , entonces  $\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ .



3. Como  $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ , y sea  $\theta = \tan^{-1}(x)$ , entonces  $\tan \theta = x$ , por consiguiente  $\sec(\tan^{-1}(x)) = \sqrt{1 + x^2}$ ,  $x \geq 1$



4. De  $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$ , obtenemos que  $\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$ . Además sea  $\theta = \sec^{-1}(x)$ , entonces  $\sec \theta = x$ , luego  $\tan(\sec^{-1}(x)) = \begin{cases} +\sqrt{x^2-1}, & \text{si } x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2-1}, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

### Teorema 2.15

$$\begin{aligned}
 1. \quad Dx[\operatorname{sen}^{-1}(x)] &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 & 2. \quad Dx[\cos^{-1}(x)] &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \\
 3. \quad Dx[\tan^{-1}(x)] &= \frac{1}{1+x^2} & 4. \quad Dx[\sec^{-1}(x)] &= \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| > 1
 \end{aligned}$$

1. Sea  $y = \operatorname{sen}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y$ . Derivando implícitamente

$$1 = \cos(y) \cdot y' \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos[\operatorname{sen}^{-1}(x)]} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Luego,

$$Dx(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = Dx[\operatorname{sen}^{-1}(x)], \quad -1 < x < 1.$$

2. Sea  $y = \cos^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \cos y$ . Derivando implícitamente

$$1 = -\operatorname{sen}(y) \cdot y' \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{\operatorname{sen} y} = Dx[\operatorname{sen}^{-1}(x)] = \frac{-1}{\operatorname{sen}[\cos^{-1}(x)]}.$$

Luego,

$$Dx[\cos^{-1}(x)] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

3. Sea  $y = \tan^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \tan y$ . Derivando implícitamente:

$$1 = \sec^2(y) \cdot y' \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{\sec y \cdot \sec y} = \frac{1}{\sec[\tan^{-1}(x)] \cdot \sec[\tan^{-1}(x)]}.$$

Luego,

$$Dx(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Sea  $y = \sec^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \sec y$ . Derivando implícitamente:

$$1 = \sec(y) \cdot \tan(y) \cdot y' \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y} = \frac{1}{\sec[\sec^{-1}(x)] \cdot \tan[\sec^{-1}(x)]}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} Dx[\sec^{-1}(x)] &= \frac{1}{((x) \pm \sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| > 1 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{-1+x^2}}, & x \geq 1 \\ -\frac{1}{x\sqrt{-1+x^2}}, & x \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

#### Teorema 2.16 (Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas)

1.  $Dx[\operatorname{sech}^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2.  $Dx[\operatorname{cosh}^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x > 1$
3.  $Dx[\tan^{-1}(h)] = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1$
4.  $Dx[\operatorname{sech}^{-1}(x)] = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$

La demostración queda como ejercicio.

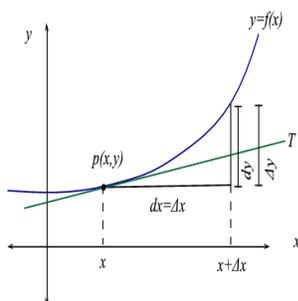
## 2.9 DIFERENCIALES

## Observaciones

1.  $\frac{dy}{dx}$  es la notación de Leibniz para la derivada de la función  $y = f(x)$ .
2.  $D_x(y) = \frac{d}{dx}(\cdot)$  es un operador.
3. A continuación trataremos  $dy$  y  $dx$  por separado.

## Definición 2.1

Sea  $y = f(x)$  una función derivable,  $\Delta x$  es el incremento arbitrario en la variable  $x$ ,  $dx$  es la diferencial de  $x$  y es igual a  $\Delta x$ ,  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ,  $dy$  es la diferencial de  $y$  y se define como  $dy = f'(x)dx$ .



$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = \tan \theta \cdot \Delta x$$

$dy = f'(x) dx$  es una función de dos variables,  $dy$  representa la cantidad que la recta  $T$  se levanta o cae,  $\Delta y$  representa la cantidad que la curva  $y = f(x)$  se levanta o cae cuando  $x$  cambia en una cantidad  $dx$ .

Figura 2.18

## Ejemplo 2.27

Hallar  $dy$ , si:

1.  $y = x^3 \Rightarrow dy = (3x^2) dx$
2.  $y = \sqrt{x^2 + 3x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-\frac{1}{2}}(2x + 3)dx = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}} dx$
3.  $y = \cos(x^4 - 3x^2 + 11) \Rightarrow dy = (\cos x^4 - 3x^2 + 11) \cdot (4x^3 - 6x) dx$

## Observaciones

1. Derivadas y diferenciales no son lo mismo

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), y, dy = f'(x)dx$$

2. De  $dy = f'(x)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f' \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$ .

¿Cómo podemos interpretar la derivada?

Como el cociente de dos diferenciales.

3. Para cada regla de derivación existe una correspondiente regla de diferenciación, obtenida a partir de la primera “multiplicándola” por  $dx$ .

#### DERIVADA

1.  $\frac{d}{dx}(k) = 0$
2.  $\frac{d}{dx}(ku) = k \frac{du}{dx}$
3.  $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4.  $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
5.  $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$

#### DIFERENCIAL

1.  $dk = 0$
2.  $d(ku) = kd(u)$
3.  $d(u+v) = du + dv$
4.  $d(uv) = u dv + v du$
5.  $d(u^n) = nu^{n-1} du$

## 2.10 APROXIMACIONES (UNA APLICACIÓN)

La gráfica (2.18) permite escribir:

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$$

o sea que

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

**¿Qué tan buena es la aproximación anterior?**

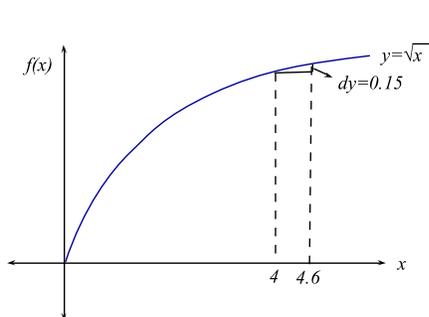
Si  $\varepsilon(\Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)dx$ , entonces:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \frac{dx}{dx} = 0.$$

¡El error  $\varepsilon(\Delta x)$  tiende a cero más rápido que  $\Delta x$ , en éste caso escribimos  $\varepsilon(\Delta x) = o(\Delta x)$  (o pequeña)!

### Ejemplo 2.28

Hallar buenas aproximaciones para  $\sqrt{4,6}$  y  $\sqrt{8,2}$ . Consideremos  $y = \sqrt{x}$  cuya gráfica se muestra a continuación.



$$f(4 + 0,6) = f(4) + \frac{1}{2\sqrt{4}}(0,6)$$

$$\sqrt{4,06} = 2,15$$

$$f(9 - 0,8) = f(8,2)$$

$$= f(9) + \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0,8)$$

$$= 3 + \frac{1}{6}(-0,8) = 2,867$$

**Ejemplo 2.29**

Utilice diferenciales para aproximar el aumento en el área de una burbuja de jabón cuando se radio aumenta de 3 pulgadas a 3,025 pulgadas.

**Solución:** El área de la burbuja es  $A = 4\pi r^2$  y el diferencial de área es

$$dA = 8\pi r dr = 8\pi(3)(0,025) \approx 1,885 \text{ pulgadas cuadradas.}$$

**Ejemplo 2.30**

Una arista de un cubo se midió como 11,4 centímetros con un posible error de  $\pm 0,05$  centímetros. Evalúe el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error de éste valor.

**Solución:** Como el volumen del cubo  $v = x^3$  y el diferencial de volumen es  $dv = 3x^2 dx$ . Si  $x = 11,4$  y  $dx = 0,05$ , entonces  $v = (11,4)^3 \approx 1482$  y  $dv = 3(11,4)^2(0,05) \approx 19$ . Luego, el volumen del cubo es  $1482 \pm 19 \text{ cm}^3$ .

El error absoluto es  $\delta v = v(x + \delta x) - v(x)$  y el error relativo

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{dv}{v} \approx \frac{19}{1482} \approx 0,0128. \text{ Lo anterior quiere decir que el error relativo es } 1,28\%.$$

**2.11 APROXIMACIONES LINEAL**

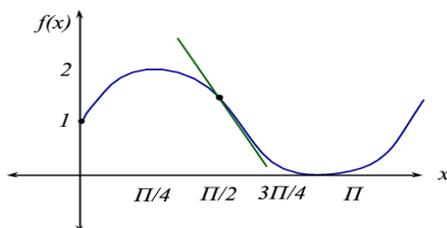
De la fórmula punto-pendiente  $y - f(x) = f'(x)(x - a)$  que representa la ecuación de la recta que pasa por  $(a, f(a))$  con pendiente  $f'(a)$ , siempre que  $f$  sea derivable en  $a$ , la función  $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$  se llama **aproximación lineal** a la función  $f$  en  $a$  y con frecuencia es una muy buena aproximación para  $f$  cuando  $x$  es cercana a  $a$ .

**Ejemplo 2.31**

Encuentre y dibuje la aproximación lineal a  $f(x) = 1 + 2 \operatorname{sen} 2x$  en  $x = \frac{\pi}{2} = a$ .

**Solución:** Como  $f'(x) = 4 \cos 2x$  y  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = -4$ . Entonces

$$\begin{aligned} L(x) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = (1 + \operatorname{sen} \pi) + (-4)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -4x + 1 + 2\pi. \end{aligned}$$



**Figura 2.19:**  $f(x) = 1 + 2 \operatorname{sen} 2x$

**2.12 EJERCICIOS****Ejercicios 2.1**

**2.1** a.) Demostrar que si  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , entonces  $f'(a) = -\frac{2}{a^3}$  para  $a \neq 0$ . (utilizando la definición de derivada)

b.) Demostrar que la tangente a la gráfica de  $f$  en  $\left(a, \frac{1}{a^2}\right)$  corta a  $f$  en otro punto, que está en el lado opuesto del eje vertical.

**2.2** Demostrar lo siguiente, partiendo de la definición y trazando un dibujo explicativo:

a.) Si  $g(x) = f(x) + c$ , entonces  $g'(x) = f'(x)$ .

b.) Si  $g(x) = cf(x)$ , entonces  $g'(x) = cf'(x)$ .

**2.3** Sea  $f(x) = x^3$ , entonces

a.) ¿Cuál es el valor de  $f'(9)$ ,  $f'(25)$ ,  $f'(36)$ ?

b.) ¿Cuál es el valor de  $f'(3^2)$ ,  $f'(5^2)$ ,  $f'(6^2)$ ?

c.) ¿Cuál es el valor de  $f'(a^2)$ ,  $f'(x^2)$ ?

d.) Comparar  $f'(x^2)$  y  $g'(x)$  donde  $g(x) = f(x^2)$

**2.4** a.) Sea  $g(x) = f(x+c)$ . Demostrar utilizando la definición que  $g'(x) = f'(x+c)$ . Ilustrar la situación gráficamente.

b.) Demostrar que si  $g(x) = f(x)$ , entonces  $g'(x) = cf'(x)$ . Trate de ilustrar gráficamente la situación.

c.) Supongamos que  $f$  es derivable y periódica con periodo  $a$ , es decir  $f(x+a) = f(x)$  para todo  $x$ . Demostrar que  $f'$  es también periódica.

**2.5** Hallar  $f'(x)$  y  $f'(x+3)$  en los siguientes casos:

a.)  $f(x) = (x+3)^5$ .

b.)  $f(x+3) = x^5$ .

c.)  $f(x+3) = (x+5)^7$ .

**2.6** Hallar  $f'(x)$  si  $f(x) = g(t+x)$  y si  $f(t) = g(t+x)$ . Las soluciones no serán las mismas.

**2.7** Calcule las derivadas de cada una de las funciones dadas. Halle, en cada caso los dominios de  $f(x)$  y  $f'(x)$ .

**2.8** a.)  $f(x) = \frac{x^2+1}{3x^2-1} + (x^2-1)(1-x)$ .

b.)  $f(x) = \frac{x}{n} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{m^2} + \frac{m^2}{x^2}$  donde  $m$  y  $n$  son diferentes de 0.

c.)  $y = ax^2 + bx + c$ .

d.)  $y = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ .

e.)  $y = \frac{t^2+2}{t^4-3t^3+1}$ .

f.)  $y = xg(x)$ .

g.)  $y = \frac{x}{g(x)}$ .

h.)  $y = \frac{g(x)}{x}$ .

**2.9** Si  $f(2) = -3$ ,  $g(2) = 4$ ,  $f'(2) = -2$  y  $g'(2) = 7$ , encuentre  $h'(2)$ .

a.)  $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ .

b.)  $h(x) = f(x)g(x)$ .

$$c.) h(x) = \frac{g(x)}{1 + f(x)}.$$

**2.10** Encuentre las derivadas de:

$$a.) f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cot x$$

$$b.) h(\theta) = \operatorname{csc} \theta + e^\theta \cot \theta$$

$$c.) f(\theta) = \frac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$$

$$d.) y = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$$

$$e.) f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

**2.11** Encuentre las derivadas de:

$$a.) y = \sqrt{4 + 3x}$$

$$b.) y = \tan(\operatorname{sen} x)$$

$$c.) y = \operatorname{sen}(e^x)$$

$$d.) g(t) = \frac{1}{(t^4 + 1)^3}$$

$$e.) y = e^{x \cos x}$$

$$f.) F(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$$

**2.12** Hallar la primera y segunda derivada de:

$$a.) h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$b.) y = xe^{cx}$$

$$c.) y = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$d.) y = e^{e^x}$$

$$e.) f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$$

$$f.) f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right)$$

$$g.) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

**2.13** Para cada función  $f$ , hallar  $f(f'(x))$ .

a.)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$

b.)  $f(x) = \operatorname{sen} x$

c.)  $f(x) = x^2$

d.)  $f(x) = 17$

e.)  $f(x) = 17x$

**2.14** Hallar  $f'$  en función de  $g'$  si:

a.)  $f(x) = g(x \cdot g(a))$

b.)  $f(x) = g(x + g(a))$

c.)  $f(x) = g(x - g(a))$

d.)  $f(x) = g(x)(x - a)$

e.)  $f(x) = g(a)(x - a)$

f.)  $f(x+3) = g(x^2)$

**2.15** Derivar implícitamente cada función:

a.)  $x^2 + xy - y^2 = 4$

b.)  $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$

c.)  $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

d.)  $e^{x^2y} = 1 + x^2y$

e.)  $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$

f.) Si  $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$  y  $f(1) = 2$ , encuentre  $f'(1)$

**2.16** Derivar cada función:

a.)  $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

b.)  $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$

c.)  $F(t) = \ln \left[ \frac{(2t+1)^3}{(3t-1)^4} \right]$

d.)  $H(z) = \ln \sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

e.)  $y = (2x+1)^a(x^4-3)^b$  donde  $a$  y  $b$  son números reales.

$$f.) y = \frac{\operatorname{sen}^2 x \tan^4 x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g.) y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$$

$$h.) y = (\ln x)^{\cos x}$$

### **Preguntas de comprobación**

**2.17** Dé la definición de función derivable y derivada de una función en un punto. ¿Qué se entiende por función derivada? ¿Qué relación existe entre los dominios de la función derivada y la función original?

**2.18** Diga que entiende por derivadas laterales en un punto.

**2.19** Interprete geoméricamente la derivada y las derivadas laterales en un punto. ¿Qué significado puede darse a las derivadas infinitas?

**2.20** Dé la definición de función diferenciable en un punto. ¿A qué se llama diferencial de una función en un punto? ¿Qué significa geoméricamente el diferencial en un punto?

**2.21** Comente la relación existente entre los conceptos derivabilidad, diferenciable y continuidad. Demuestre sus afirmaciones.

**2.22** Enuncie y demuestre las reglas de derivación para las operaciones aritméticas.

**2.23** ¿Cuándo podemos asegurar que la compuesta de dos funciones es derivable en un punto? Demuestre su afirmación y deduzca la fórmula para hallar la derivada de una función compuesta.

**2.24** ¿Qué condiciones debe exigirse a  $y = f(x)$  para que la función inversa sea derivable en un punto? ¿Cómo se halla la derivada de una función inversa? Demuestre sus afirmaciones.

**2.25** ¿Cómo se define la derivada de una función de orden  $n$  y el diferencial de orden  $n$ ?

## 3

## APLICACIONES

## 3.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

**Definición 3.1**

Sea  $S = D(f)$  y  $c \in S$ , decimos que

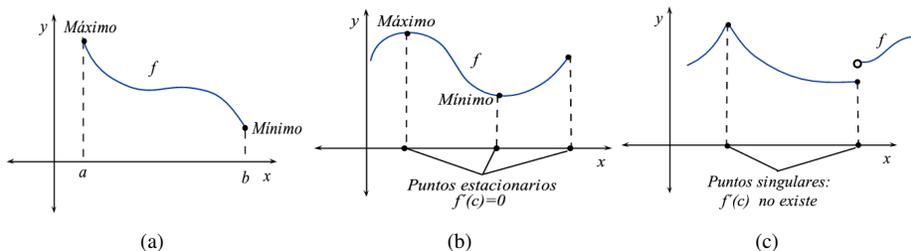
- i)  $f(c)$  es el valor máximo de  $f$  en  $S$ , si  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x$  en  $S$ .
- ii)  $f(c)$  es el valor mínimo de  $f$  en  $S$ , si  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x$  en  $S$ .
- iii)  $f(c)$  es un valor extremo de  $f$  en  $S$ , si es un valor máximo o mínimo.
- iv) La función que queremos maximizar o minimizar se llama función objetivo.

**Teorema 3.1 (De existencia de máximo y mínimo)**

Si  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

## 3.1.1 PUNTO CRÍTICO

Es aquel punto que es punto frontera, punto estacionario o punto singular. Estos puntos son claves en la teoría de máximos y mínimos. Las gráficas a, b y c ilustran las situaciones anteriores.



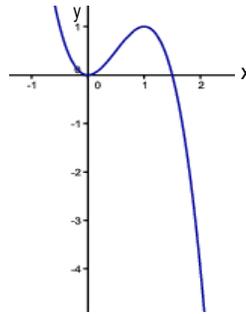
**Figura 3.1:** Puntos frontera, estacionarios y singulares

Los siguientes ejemplos nos permiten interpretar el teorema (3.1) en sus diferentes casos.

**Ejemplo 3.1**

Encuentre los puntos críticos de  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$  en  $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ .

**Solución:** Los puntos frontera son:  $x = -\frac{1}{2}$  y  $x = 2$ , es decir, los extremos del intervalo  $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ . Los puntos estacionarios se obtienen al derivar la función  $f$  e igualarla a cero, es decir:  $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$  de donde  $x = 0$ , y  $x = 1$  son la solución de la ecuación. Los puntos singulares no existen. Luego los puntos críticos son:  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = 2$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .

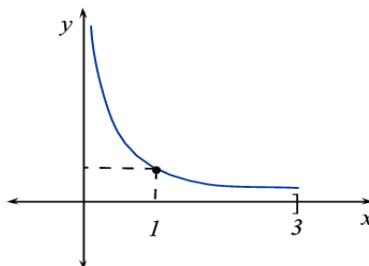


**Figura 3.2:**  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

**Ejemplo 3.2**

La función  $f(x) = \frac{1}{x}$  en el intervalo  $(0, \infty) = S$  no tiene ni máximo ni mínimo. ¿Por qué?

Ahora, si  $S = (1, 3]$  no tiene valor máximo, ¿Por qué? ... porque el valor mínimo es  $f(3) = \frac{1}{3}$ .

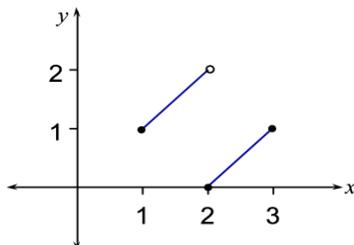


**Figura 3.3:**  $f(x) = \frac{1}{x}$

**Ejemplo 3.3**

La función  $g(x) = \begin{cases} x, & 1 \leq x < 2 \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$  definida en el intervalo  $S = [1, 3]$  no tiene ni máximo ni mínimo.

¿Por qué?



**Figura 3.4:** Gráfica de  $g(x)$

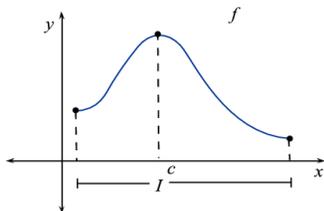
**Teorema 3.2 (Puntos críticos)**

Sea  $f$  definida en un intervalo  $I$  que contiene un punto  $c$ . Si  $f(c)$  es un valor externo, entonces  $c$  debe ser un punto crítico, es decir, es uno de los siguientes:

- i) Un punto frontera de  $I$ .
- ii) Un punto estacionario de  $f$ ; es decir, un punto donde  $f'(c) = 0$ .
- iii) Un punto singular de  $f$ ; esto es un punto donde  $f'(c)$  no existe.

i) Consideremos el caso donde  $f(c)$  es el valor máximo de  $f$  en  $I$  y  $c$  no es punto frontera ni punto singular. Demostremos que  $c$  es un punto estacionario. Como  $f(c)$  es el valor máximo, entonces  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $x$  en  $I$ , es decir

$$f(x) - f(c) \leq 0.$$



**Figura 3.5**

Si  $x < c$ , entonces  $x - c < 0$ , y

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad (3.1)$$

Análogamente, si  $x > c$  entonces  $x - c > 0$ , y

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad (3.2)$$

De (3.1) obtenemos que,

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c^-) \geq 0. \quad (3.3)$$

De la (3.2) obtenemos que,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c^+)}{x - c} = f'(c^+) \leq 0. \quad (3.4)$$

De (3.3) y (3.4) concluimos que,  $f'(c) = 0$ . Las demostraciones de partes (ii) y (iii) quedan como ejercicio. Para hallar los valores extremos se debe hacer el siguiente procedimiento.

#### Procedimiento:

- Encuentre los puntos críticos de  $f$  en  $I$ .
- Evaluar  $f$  en cada uno de éstos puntos críticos. El mayor de estos valores es el valor máximo; el valor mas pequeño es el valor mínimo.

Los siguientes ejemplos ilustran lo planteado en el teorema (3.2).

#### Ejemplo 3.4

Encuentre los valores máximos y mínimos de  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$  en  $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ .

**Solución:** Derivando la función  $f$  e igualando a cero obtenemos que

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = 0,$$

donde  $x = 0$  y  $x = 1$  son los puntos estacionarios que junto con los puntos frontera  $x = -\frac{1}{2}$  y  $x = 2$  forman los puntos críticos. Evaluando los puntos críticos en la función original, encontramos que el máximo se halla en  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$  que corresponde al punto  $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$  y el mínimo se halla en  $f(2) = -4$  que corresponde al punto  $(2, -4)$ . Ver figura (3.2) de la página 56.

#### Ejemplo 3.5

La función  $F(x) = x^{\frac{2}{3}}$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ . Hallar los valores máximos y mínimos en  $[-1, 2]$  (ver figura 3.6).

**Solución:** De la función original obtenemos que

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Nótese que  $F(0) = 0$ ;  $F(-1) = 1$ ;  $F(2) = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$ , luego el punto  $\left(2, \sqrt[3]{4}\right)$  es un máximo. La función  $F$  no tiene mínimo, pues  $F'(0)$  no existe ya que es un punto singular.

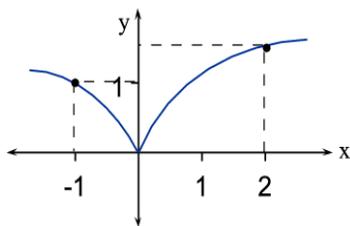


Figura 3.6

**Problema:** Son aquellos que surgen de situaciones de la vida diaria. Estos problemas rara vez tienen puntos singulares. Los puntos máximos y mínimos aparecen en puntos estacionarios, aunque deben verificarse los puntos frontera.

### Ejemplo 3.6

Una caja rectangular se construye a partir de un pedazo de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 pulgadas de ancho, cortando cuadrados idénticos y doblando hacia arriba los lados. Encuentre las dimensiones de la caja con volumen máximo. ¿Cuál es su volumen?

**Solución:** El volumen de la caja está dado por la función

$$V(x) = x(9 - 2x)(24 - 2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

con  $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$ . Al derivar la función volumen e igualando a cero obtenemos que

$$V'(x) = 216 - 132x + 12x^2 = 0 \quad \text{o} \quad (x-9)(x-2) = 0$$

de donde  $x = 2$  y  $x = 9$  son los puntos estacionarios. Nótese que 9 no pertenece al intervalo  $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ . De los puntos críticos  $(0, 2)$  y  $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$  tenemos que

$$V(0) = V\left(\frac{9}{2}\right) = 0 \quad \text{y} \quad V(2) = 200.$$

Luego, el volumen máximo es  $V = 200$  pulgadas cúbicas. Las dimensiones de la caja son: Largo  $24 - 2(2) = 20$ , Ancho  $9 - 2(2) = 5$  y Profundidad 2.

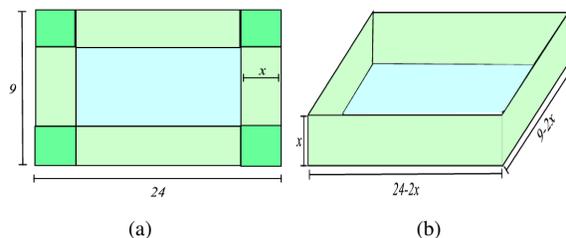


Figura 3.7

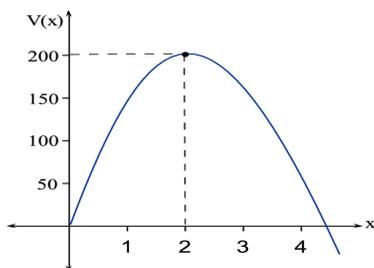


Figura 3.8:  $V(x) = x(9 - 2x)(24 - 2x)$

### Ejemplo 3.7

Un granjero tiene 100 metros de alambre para una cerca, con el cual planea construir dos corrales adyacentes. ¿Cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima?

**Solución:** El perímetro de la región encerrada está dado por la ecuación  $3x + 2y = 100$  de donde  $y = 50 - \frac{3}{2}x$ . El área de los dos corrales es  $A(x, y) = x \cdot y$ , reemplazando el valor de  $y$  en la ecuación anterior obtenemos que

$$A(x) = x \left( 50 - \frac{3}{2}x \right) = 50x - \frac{3}{2}x^2$$

de donde  $x \left( 50 - \frac{3}{2}x \right) = 0$  implica que  $x = 0$  y  $x = \frac{100}{3}$  es decir que  $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$ .

Derivando la función área e igualando a cero obtenemos que  $A'(x) = 50 - 3x = 0$  de donde  $x = \frac{50}{3}$  es un punto estacionario. Los puntos críticos son:  $x = 0, \frac{50}{3}, \frac{100}{3}$ . Al evaluar la función área en el punto estacionario obtenemos que

$$A\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{1250}{3} \approx 416.67$$

Cuando  $x = \frac{50}{3}$  e  $y = 25$ . Para cercar la parte correspondiente a  $x$  se necesitan  $\frac{50}{3} + \frac{50}{3} + \frac{50}{3} = \frac{150}{3}$  y para cercar la parte correspondiente a  $y$  se necesitan  $25 + 25 = 50$ .

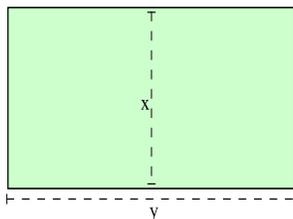


Figura 3.9

**Ejercicio.** Hacer la gráfica de  $A(x) = 50x - \frac{3}{2}x^2$ .

### 3.2 MONOTONÍA Y CONCAVIDAD

Sea  $f$  definida en un intervalo  $I$  (abierto, cerrado o ninguno de estos), decimos que:

- i)  $f$  es creciente en  $I$  si, para todo  $x_1, x_2$  en  $I$ ,  $x_1 < x_2$  entonces  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- ii)  $f$  es decreciente en  $I$ , si para todo  $x_1, x_2$  en  $I$ , si  $x_1 < x_2$  entonces  $f(x_1) > f(x_2)$ .
- iii)  $f$  es estrictamente monótona en  $I$ , si es creciente en  $I$  o decreciente en  $I$ .

#### Teorema 3.3 (Monotonía)

Sea  $f$  continua en un intervalo  $I$  y derivable en todo punto interior de  $I$ .

- i) Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en el interior de  $I$ , entonces  $f$  es creciente en  $I$ .
- ii) Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en el interior  $I$ , entonces  $f$  es decreciente en  $I$ .

#### Ejemplo 3.8

Si  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ , encuentre los intervalos donde  $f$  crece o decrece.

**Solución:** Derivando la función  $f$  obtenemos que  $f'(x) = 6(x-2)(x+1)$ .  $f$  es creciente para los  $x$  tales que  $(x-2)(x+1) > 0$  y  $f$  es decreciente para los  $x$  tales que  $(x-2)(x+1) < 0$ . Para saber en que intervalos  $f$  es creciente o decreciente ubicamos los puntos estacionarios junto con el cero en la recta real. Los puntos estacionarios dividen la recta en tres intervalos  $(-\infty, -1)$ ;  $(-1, 2)$  y  $(2, \infty)$ .

Posteriormente elegimos un representante de cada intervalo y aplicamos el teorema 3.3 como se ilustró anteriormente.

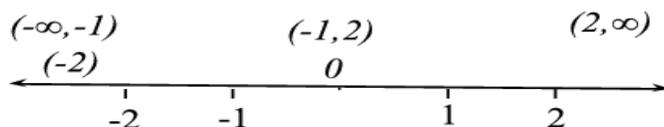
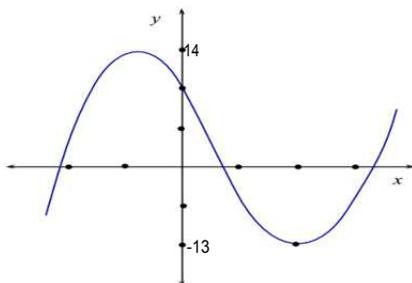


Figura 3.10

Escogemos los números  $-2$ ,  $0$  y  $1$  como representante de cada intervalo. A continuación, hallamos  $f'(-2) = 24 > 0$ , entonces en el intervalo  $(-\infty, -1)$   $f$  es creciente;  $f'(0) = -12 < 0$  entonces en el intervalo  $(-1, 2)$   $f$  es decreciente;  $f'(3) = 24 > 0$  entonces en el intervalo  $(2, \infty)$   $f$  es creciente. También  $f(-1) = 14$  y  $f(2) = -3$ .



**Figura 3.11:**  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

### Ejemplo 3.9

Determine en donde  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$  es creciente y en donde es decreciente.

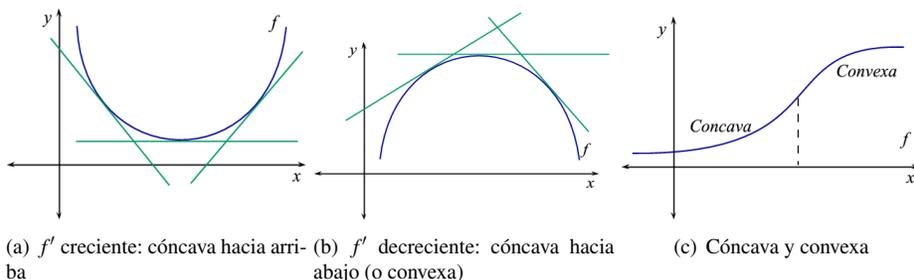
**Solución:** Derivando la función  $g$  e igualando a cero obtenemos que

$$g'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = 0,$$

donde  $x = \pm 1$  son los puntos estacionarios. Terminar el ejemplo siguiendo los pasos del ejemplo (3.8).

### Definición 3.2

Sea  $f$  derivable en un intervalo  $I$ . Decimos que la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en  $I$ , si  $f'$  es creciente en  $I$ , y decimos que  $f$  es cóncava hacia abajo en  $I$ , si  $f'$  es decreciente.



**Figura 3.12**

### Teorema 3.4 (Concavidad)

Sea  $f$  dos veces derivables en el intervalo  $I$

- i) Si  $f''(x) > 0$  para todo  $x$  en  $I$ , entonces  $f$  es cóncava en  $I$ .
- ii) Si  $f''(x) < 0$  para todo  $x$  en  $I$ , entonces  $f$  es convexa en  $I$ .

**Ejemplo 3.10**

¿En qué intervalos  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 3x + 4$  es creciente, decreciente, cóncava o convexa?

**Solución:** La derivada de  $f$  es  $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ , de donde  $x = 3, -1$  son los puntos estacionarios. Si  $f'(x) = (x - 3)(x + 1) > 0$  entonces  $f$  es creciente y si  $f'(x) = (x - 3)(x + 1) < 0$  entonces  $f$  es decreciente. También  $f''(x) = 2(x - 1)$ .

Si  $f''(x) = 2(x - 1) > 0$  entonces  $f$  es cóncava y si  $f''(x) = 2(x - 1) < 0$  entonces  $f$  es convexa. Como en los ejemplos anteriores los puntos estacionarios dividen la recta en los intervalos  $(-\infty, -1)$ ;  $(-1, 3)$  y  $(3, \infty)$ .

Tomando como representante de cada intervalo los números  $-2, 0$  y  $4$  obtenemos el siguiente esquema

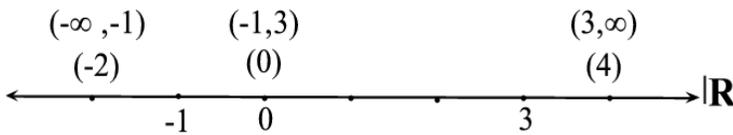


Figura 3.13

Como  $f'(-2) = 5 > 0$  entonces en el intervalo  $(-\infty, -1)$   $f$  es creciente. Como  $f'(0) = -3 < 0$  entonces en el intervalo  $(-1, 3)$   $f$  es decreciente; como  $f'(4) = 5 > 0$  entonces en el intervalo  $(3, \infty)$   $f$  es creciente. Como  $f''(x) = 2(x - 1) > 0$  si  $x > 1$  entonces en el intervalo  $(1, \infty)$   $f$  es cóncava y como  $f''(x) = 2(x - 1) < 0$ , si  $x < 1$  entonces en el intervalo  $(-\infty, 1)$   $f$  es convexa.

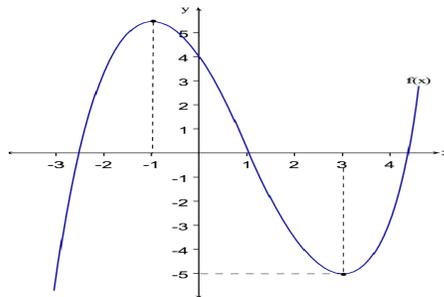


Figura 3.14:  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 3x + 4$

### 3.2.1 PUNTOS DE INFLEXIÓN

Sea  $f$  continua en  $x = c$ . El punto  $(c, f(c))$  es un punto de inflexión de la gráfica de  $f$ , si  $f$  es cóncava a un lado de  $c$ ; y convexa al otro lado de  $c$ .

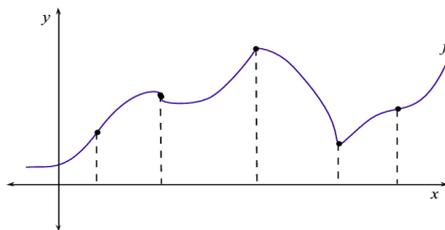


Figura 3.15: Algunos puntos de inflexión

**Observación: ¿Quiénes son candidatos a ser puntos de inflexión?**

Los puntos donde  $f''(c) = 0$  ó donde  $f''(c)$  no exista. Para la función  $f(x) = x^4$ ,  $f'(x) = 4x^3$ ,  $f''(x) = 12x^2$ ,  $f''(0) = 0$  pero  $(0,0)$  no es punto de inflexión.

**¿Por qué?**

Para  $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$ ,  $f''(0) = 0$ . Si  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2$  entonces  $f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

y  $f''(x) = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}$ .

Nótese que  $f''(x) > 0$  para  $x < 0$  y  $f''(x) < 0$  para  $x > 0$  luego  $(0,2)$  es un punto de inflexión.

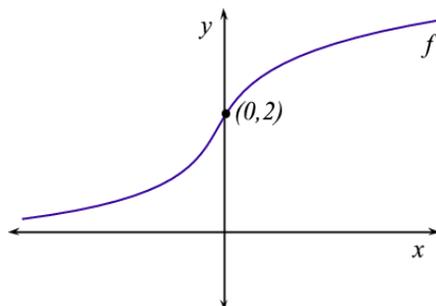


Figura 3.16:  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2$

En conclusión si  $c$  es un punto de inflexión de  $f$ , entonces  $f''(c) = 0$  (condición necesaria para que  $c$  sea un punto de inflexión).

### 3.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

**Definición 3.3**

Sea  $s$ , el dominio de  $f$  que contiene al punto  $c$ . Decimos que:

- i)  $f(c)$  es un valor máximo local de  $f$ , si existe un intervalo  $(a,b)$  que contiene a  $c$  tal que  $f(c)$  es el valor máximo de  $f$  en  $(a,b) \cap S$ .
- ii)  $f(c)$  es un valor mínimo local de  $f$ , si existe un intervalo  $(a,b)$  que contiene a  $c$  tal que  $f(c)$  es el valor mínimo de  $f$  en  $(a,b) \cap S$ .
- iii)  $f(c)$  es un valor extremo local de  $f$ , si es máximo local ó mínimo local.

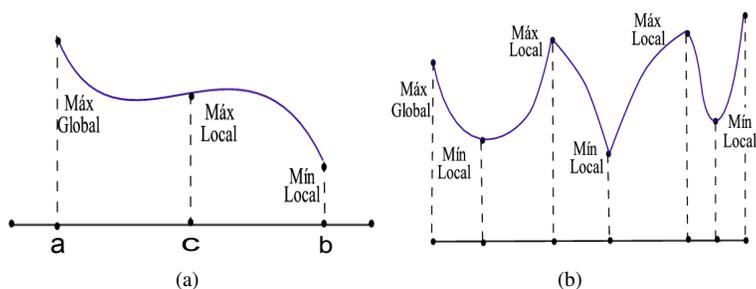


Figura 3.17

**Observación:** Los extremos locales se pueden encontrar en un punto crítico. (Puntos frontera, puntos estacionarios o puntos singulares).

**Teorema 3.5**

Sea  $f$  continua en un intervalo  $(a, b)$  que contiene un punto crítico  $c$

- i) Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(a, c)$  y  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en  $(c, b)$ , entonces  $f(c)$  es un valor **máximo local** de  $f$ .
- ii) Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en  $(a, c)$  y  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(c, b)$ , entonces  $f(c)$  es un valor **mínimo local** de  $f$ .
- iii) Si  $f'(x)$  tiene el mismo signo a ambos lados de  $c$ , entonces  $f(c)$  no es un valor extremo de  $f$ .

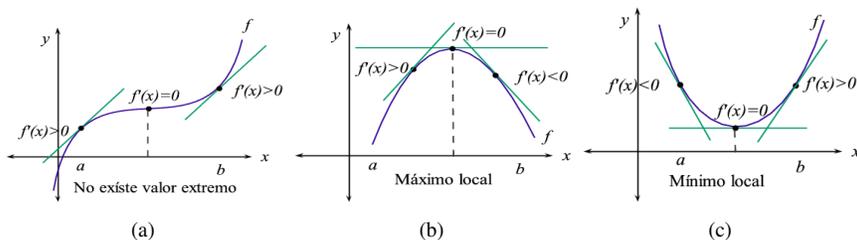


Figura 3.18

**Demostración:**

- i) Como  $f'(x) > 0$  para cada  $x$  en  $(a, c)$  entonces  $f$  es creciente en  $(a, c]$ , es decir que

$$f(x) < f(c). \tag{3.5}$$

Como  $f'(x) < 0$  para cada  $x$  en  $(c, b)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $(c, b]$ , es decir

$$f(x) < f(c). \tag{3.6}$$

De (3.5) y (3.6)  $f(c)$  es un máximo local.

- ii) Como  $f'(x) < 0$  para cada  $x$  en  $(a, c)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $(a, c]$ , es decir

$$f(x) > f(c). \quad (3.7)$$

Como  $f'(x) > 0$  para cada  $x$  en  $(c, b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $(c, b]$ , es decir

$$f(c) < f(x). \quad (3.8)$$

De (3.7) y (3.8)  $f(c)$  es un mínimo local.

- iii) La demostración del tercer punto del teorema se deja al lector como ejercicio.

### Ejemplo 3.11

Encuentre los valores extremos locales de la función  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  en  $(-\infty, \infty)$ .

**Solución:** De  $f'(x) = 2(x-3) = 0$ , obtenemos que  $x = 3$  es un punto estacionario. Como  $f'(x) = 2(x-3) < 0$  para  $x < 3$ , entonces  $f$  es decreciente en  $(-\infty, 3]$  y como  $f'(x) = 2(x-3) > 0$  para  $x > 3$  entonces  $f$  es creciente en  $[3, \infty)$ . Por el teorema (3.5) parte (ii)  $f(3) = -4$  es un mínimo local. La siguiente gráfica ilustra el valor extremo de  $f$ .

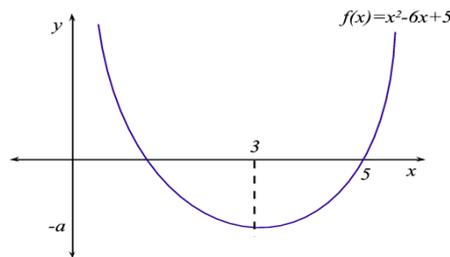


Figura 3.19

**Ejercicio.** Hallar los valores extremos locales de  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$  en  $(-\infty, \infty)$ .

**Teorema 3.6 (Criterio de la segunda derivada)**

Supónganse que  $f'$  y  $f''$  existen en todo punto de un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $c$  y supónganse que  $f'(c) = 0$ .

- i) Si  $f''(c) < 0$ ,  $f(c)$  es un valor máximo local de  $f$ .
- ii) Si  $f''(c) > 0$ ,  $f(c)$  es un valor mínimo local de  $f$ .

**Demostración:**

$$\text{i) } f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0, \text{ luego existe un intervalo}$$

$$\alpha < c < \beta \text{ tal que } \frac{f'(x)}{x - c} < 0. \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \text{ implica que}$$

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{para } \alpha < x < c \\ f'(x) < 0, & \text{para } c < x < \beta. \end{cases}$$

Por el teorema (3.5), parte (i) y (ii)  $f(c)$  es un máximo local.

- ii) La demostración del segundo punto del teorema se deja al lector como ejercicio.

**Ejemplo 3.12**

Para  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ , utilice el criterio de la segunda derivada para identificar extremos locales.

**Solución:** Como  $f'(x) = 2(x - 3)$ , entonces  $x = 3$  es un punto estacionario y como  $f''(3) = 2 > 0$ , entonces en  $x = 3$  hay un mínimo.

**Ejemplo 3.13**

Para  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ , utilice los criterios de la segunda derivada para hallar los puntos extremos.

**Solución:** Como  $f'(x) = (x - 3)(x + 1)$  y  $x = 3$  y  $x = -1$  son puntos estacionarios, entonces para  $f''(x) = 2x - 2$ ,  $f''(3) = 4 > 0$ ,  $f$  toma un mínimo en  $x = 3$ . También como  $f''(-1) = -4 < 0$  entonces  $f$  toma un máximo  $x = -1$ .

**Ejercicio.** La siguiente figura muestra una gráfica de  $y = f'(x)$ . Encuentre todos los extremos locales y los puntos de inflexión de  $f$  en el intervalo  $[-1, 3]$ . Si  $f(1) = 0$ , bosqueje la gráfica de  $y = f(x)$ .

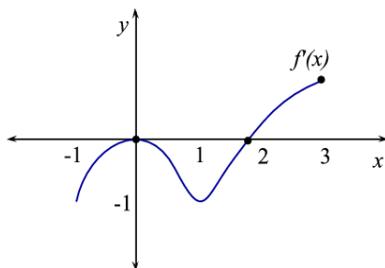


Figura 3.20

### 3.4 OTROS PROBLEMAS DE APLICACIÓN

#### Ejemplo 3.14

Encuentre (si existe algunos) los valores máximos y mínimos de  $f(x) = 4x^4 - 4x$  en  $(-\infty, \infty)$ .

**Solución:** Como  $f'(x) = 4(x-1)(x^2+x+1)$  y  $x^2+x+1$  no tiene soluciones reales, entonces solo existe un punto crítico  $x = 1$ . En  $(-\infty, 1)$ ,  $f$  es decreciente y en  $(1, \infty)$   $f$  es creciente; luego  $f(1) = -3$  es un mínimo absoluto.

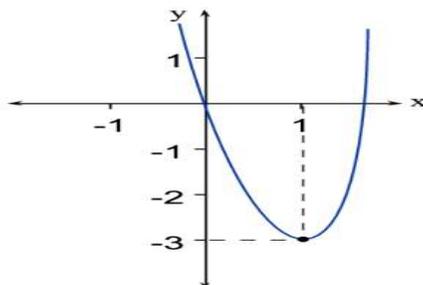


Figura 3.21

#### Ejemplo 3.15

Encuentre los valores máximos y mínimos de  $G(p) = \frac{1}{p(1-p)}$  en  $(0, 1)$ .

**Solución:**  $G'(p) = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$ . De  $G'(p) = 0$ ,  $p = \frac{1}{2}$  es un punto crítico.  $G'(p) > 0$  si  $2p - 1 > 0$ , es decir  $p > \frac{1}{2}$ , aquí  $G'(p)$  es creciente.  $G'(p) < 0$  si  $2p - 1 < 0$ , es decir  $p < \frac{1}{2}$ , aquí  $G'(p)$  es decreciente. Como  $G\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ , el punto  $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$  es un mínimo.

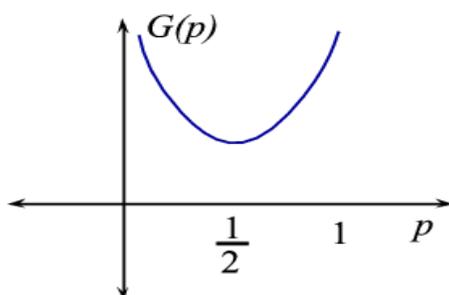


Figura 3.22:  $G(p) = \frac{1}{p(1-p)}$

### Ejemplo 3.16

Un lote debe contener 50 cuadrados de zonas de impresión, con márgenes de 4 pulgadas arriba y abajo, y márgenes de 2 pulgadas a cada lado. ¿Cuáles son las dimensiones para el volante que utilizaría menos papel? ... De acuerdo a los datos del problema el volante tendría la siguiente forma:

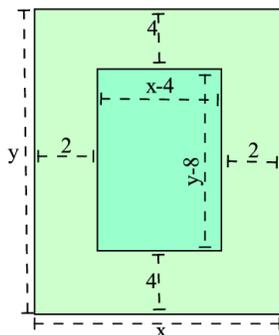


Figura 3.23

El área del volante de papel es  $A(x, y) = x \cdot y$  sujeto a la condición  $(x - 4)(y - 8) = 50$  de donde  $y = \frac{50}{x - 4} + 8$ . Luego, el área en función de  $x$  es:  $A(x) = \frac{50x}{x - 4} + 8x$  donde  $4 < x < \infty$ . Derivando la función  $A$  e igualando a cero obtenemos que

$$A'(x) = \frac{8(x-9)(x+1)}{(x-4)^2} = 0,$$

donde  $x = 9$  y  $x = -1$  son los puntos estacionarios. Además

$$A'(x) = \frac{8(x-9)(x+1)}{(x-4)^2} = 0$$

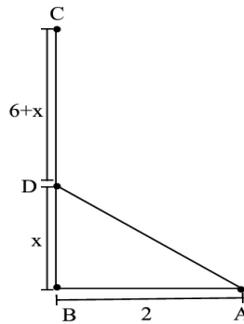
siempre que  $4 < x < 9$ . Como  $A'(x) < 0$  en el intervalo  $(4, 9)$  y  $A'(x) > 0$  en  $(9, \infty)$ , entonces en  $x = 9$  hay un mínimo. Luego  $y = 18$  y  $A = 9 \times 18$  unidades cuadradas. Como  $A'(x) < 0$  en  $(4, 9)$  y  $A'(x) > 0$  en  $(9, \infty)$ , entonces en  $x = 9$  hay un mínimo. Luego  $f = 18$  y  $A = 9 \times 18 = 162$ .

**Ejemplo 3.17**

Andrés, quien está en un bote de remos a 2 millas del punto más cercano  $B$  de una costa rectilínea, observa que está saliendo humo de su casa que se encuentra a 6 millas de  $B$ , sobre la costa. El calcula que puede remar a 3 millas por hora y correr a 5 millas por hora.

**¿Cómo debe proceder para llegar a su casa en el menor tiempo?**

La siguiente gráfica ilustra la situación planteada donde:



**Figura 3.24**

Donde  $\overline{AD} = \sqrt{x^2 + 4}$  y  $\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3}$  es el tiempo (en horas) para recorrer la distancia  $\overline{AD}$ . También  $\overline{CD} = 6 - x$  y  $\frac{6 - x}{5}$  es el tiempo (en horas) para recorrer la distancia  $\overline{CD}$ . El tiempo total es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3} + \frac{6 - x}{5}$$

donde  $0 \leq x \leq 6$ . Ahora  $T'(x) = \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 4}}{15\sqrt{x^2 + 4}}$ . Si  $T'(x) = 0$  obtenemos que  $x = \frac{3}{2}$  es un punto estacionario. En este caso existen tres puntos críticos  $x = 0, \frac{3}{2}, 6$ .

Como el dominio de  $T$  es el intervalo cerrado  $[0, 6]$ ,  $T$  tiene un mínimo (teorema 3.1 de la página 55) y este se presenta en un punto crítico (teorema 3.2 de la página 57).

Como  $T(0) = 1.87, T\left(\frac{3}{2}\right) = 1.73, T(6) = 2.11$  entonces el punto mínimo es  $\left(\frac{3}{2}, 1.74\right)$ . Lo anterior significa que Andrés tardará alrededor de 1.73 horas en llegar a la casa.

**Ejemplo 3.18**

Encuentre las dimensiones del cilindro circular de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto. La siguiente gráfica ilustra la situación planteada.

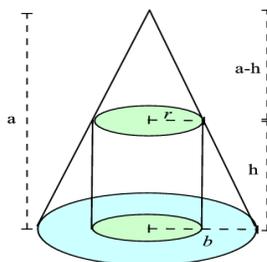


Figura 3.25

El volumen del cilindro depende del radio y su altura, entonces

$$V(r, h) = \pi r^2 h. \quad (3.9)$$

Por semejanza de triángulos tenemos que

$$\frac{a-h}{r} = \frac{a}{b} \quad \text{o} \quad h = \frac{ab-ra}{b}. \quad (3.10)$$

Reemplazando (3.9) en (3.10) obtenemos que el volumen en función del radio es

$$V(r) = \pi ar^2 - \frac{\pi a}{b} r^3, \quad \text{donde } 0 < r < b.$$

Además  $V'(r) = \pi ar \left[ 2 - \frac{3r}{b} \right]$ . De  $V'(r) = 0$ , obtenemos que los puntos estacionarios son  $r = 0$  y  $r = \frac{2b}{3}$  luego, los puntos críticos en  $[0, b]$  son:  $0, \frac{2b}{3}$  y  $b$ . Nótese que  $V(0) = 0$  y  $V(b) = 0$ , luego  $r = 0$  y  $r = b$  produce el volumen cero, luego,  $V(r) = V\left(\frac{2b}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi ab^2$  es el volumen máximo.

#### Teorema 3.7 (Del valor medio o de Lagrange)

Si  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en su interior  $(a, b)$ , entonces existe al menos un número en su interior  $(a, b)$  donde

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ , o  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ . La situación geométrica es la siguiente:

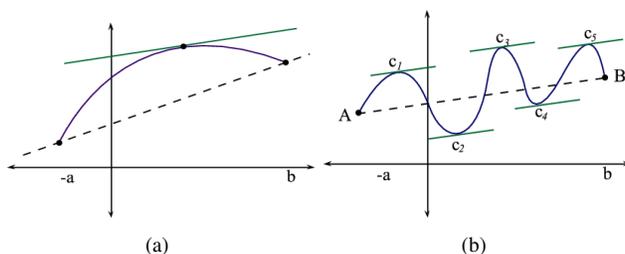


Figura 3.26: Interpretación geométrica del teorema 3.7

**Demostración:**

La demostración se apoyará en un análisis cuidadoso de la función  $S(x) = f(x) - g(x)$ . La ecuación para:

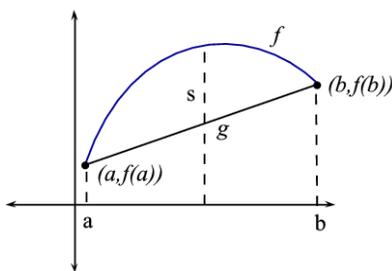
$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Luego,

$$S(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Nótese que

$$S(b) = 0 = S(a), \quad \text{y} \quad S'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



**Figura 3.27**

¿Cómo ver que  $S'(c) = 0$  para algún  $c$  en  $(a, b)$ ?

**Razonemos así:**

- $S$  es continua en  $[a, b]$ , pues es la diferencia de dos funciones continuas. Luego por teorema (3.1), de la página 55  $S$  debe alcanzar su máximo y mínimo en  $[a, b]$ . Si el valor máximo o mínimo es diferente de cero, entonces ese valor se alcanza en un punto interior  $c$ , pues  $S(a) = S(b) = 0$ .
- Como  $S$  es derivable en  $(a, b)$ , por teorema (3.2) de la página 57,  $S'(c) = 0$ .

**Ejemplo 3.19**

Encuentre el número  $c$  garantizado por el teorema (3.7) de la página 71, para  $f(x) = 2\sqrt{x}$  en  $[1, 4]$ .

**Solución:** Como  $f$  cumple las hipótesis del teorema, entonces

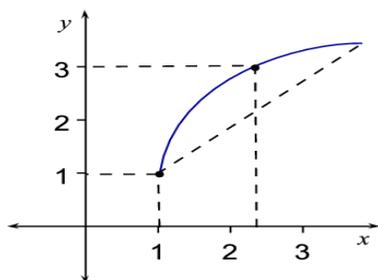


Figura 3.28

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(c) = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

(3.11)

$$\text{Ahora } \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}. \quad (3.12)$$

De (3.11) y (3.12) obtenemos que  $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$ , de donde  $c = \frac{9}{4}$ . Nótese que  $\frac{9}{4}$  es un punto interior de  $(1, 4)$ .

### Ejemplo 3.20

Sea  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$  en  $[-1, 2]$ . Hallar los  $c$  que satisfacen al teorema (3.7) del valor medio.

**Solución:** Como  $f$  cumple las hipótesis del teorema del valor medio, entonces

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$f'(c) = 3c^2 - 2c - 1, \quad y$$

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = 1.$$

Luego  $c$  resolvemos la ecuación  $3c^2 - 2c - 2 = 0$  cuyas soluciones son  $c_1 \approx -0.55$  y  $c_2 \approx 1.22$  que son los números buscados.

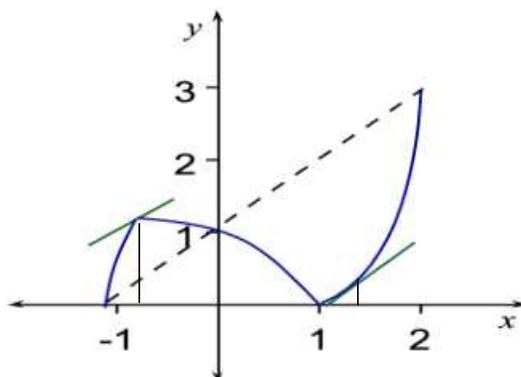


Figura 3.29

**Ejemplo 3.21**

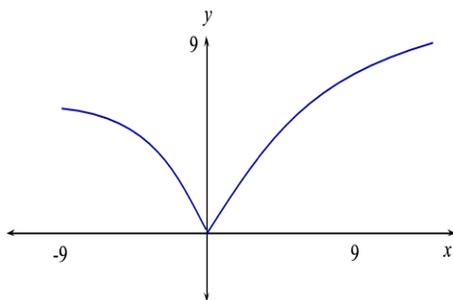
La función  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  en  $[-8, 27]$  no cumple las hipótesis del valor medio. **¿Por qué?**

Nótese que  $f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$  no es derivable en  $x = 0$ , pues  $x = 0$  es un punto singular.

Si no cumple las hipótesis tampoco se verifica la tesis. ¡Veámoslo!

Como  $f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$ ,  $\frac{f(27) - f(-8)}{27 - (-8)} = \frac{1}{7}$ , al resolver la ecuación  $\frac{2}{3c^{1/3}} = \frac{1}{7}$  obtenemos que

$$c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \approx 102 \notin (-8, 27)$$



**Figura 3.30**

**Teorema 3.8 (De Rolle)**

Sean  $f$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  y  $f(a) = f(b)$ , entonces, existe al menos un número  $c$  en  $(a, b)$ ; tal que  $f'(c) = 0$ .

**Demostración:**

Por el teorema del valor medio (3.2), tenemos que  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ , como  $f(b) = f(a)$ , entonces  $f'(c) = 0$ .

**Teorema 3.9 (Valor medio de Cauchy)**

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $(a, b)$  y continuas en  $[a, b]$ . Si  $g(x) \neq 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Observación:** Si  $g(x) = x$ , se obtiene el teorema del valor medio.

**Demostración:**

Del teorema (3.2) (valor medio para derivadas) tenemos que:

$$S(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(x - a).$$

Tratando de imitar la igualdad anterior tenemos que:

$$S(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)), \quad g(b) - g(a) \neq 0.$$

Nótese que  $S(a) = 0 = S(b)$  y  $S$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ ; pues  $f$  y  $g$  son continuas y derivables en  $(a, b)$ . Ahora, por el teorema (3.2) (Valor medio para derivadas), existe un  $c$  en  $(a, b)$  tal que:

$$S'(c) = \frac{S(b) - S(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0.$$

Pero

$$S'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g'(x)) \quad \text{y} \quad S'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g'(c)) = 0,$$

o

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**Teorema 3.10 (Regla de L'Hôpital)**

Suponga que  $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u} g(x) = 0$ . Si  $\lim_{x \rightarrow u} \left[ \frac{f'(x)}{g'(x)} \right]$  existe en cualquiera de los sentidos finito o infinito entonces

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Observaciones**

i)  $u = a^+, a^-, \infty$  o  $-\infty$ .

ii) Sólo demostraremos el caso en que  $L$  es finito y el  $\lim_{x \rightarrow a^+}$ .

**Demostración:**

Sea  $u = a^+$ . Sean  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a^+} \left[ \frac{f'(x)}{g'(x)} \right].$$

Notese que la existencia de  $\lim_{x \rightarrow a^+} \left[ \frac{f'(x)}{g'(x)} \right]$  existen en  $(a, b]$  y  $g'(x) \neq 0$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ , podemos redefinir  $f(a) = g(a) = 0$  ( $f$  y  $g$  son continuas por la derecha). Con éstas condiciones  $f$  y  $g$  cumplen las hipótesis del teorema (3.9) de la página 74 en  $[a, b]$ , es decir existe  $c$  en  $(a, b)$  tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

entonces  $\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ . Si  $b \rightarrow a^+$  y  $c \rightarrow a^+$ , entonces

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

o

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### Ejemplo 3.22

Utilice la regla de L'Hôpital para calcular los límites siguientes.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ , es de la forma  $\frac{0}{0}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ , es de la forma  $\frac{0}{0}$ , luego  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$ , es de la forma  $\frac{0}{0}$ , luego,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{6}{5}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x + 3}{2x - 4} = \infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\ln(1+x)} = 2$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 3x} = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{2x^{-3}} \dots$
- Hallar  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^{a-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(a-1)x^{a-2}}{e^x} = \dots = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{ax^{a-1}}{1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax^a} = 0$ .

$$12. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = 0.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \ln \sin x \text{ es de la forma } (0 \cdot \infty), \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\ln \sin x}{\cot x} \right] = 0.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right), \text{ es de la forma } (\infty, -\infty), \text{ entonces el}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^{\cot x}, \text{ es de la forma } (1^\infty) \text{ entonces de } y = (x+1)^{\cot x}, \text{ tenemos}$$

$$\text{que } \ln y = \cot x \ln(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\tan x} \text{ luego } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 1.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}, \text{ es de la forma } (\infty^0) \text{ de } y = (\tan x)^{\cos x}, \text{ tenemos que}$$

$$\ln y = \cos x \ln(\tan x) \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x \ln(\tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} -\frac{\ln \tan x}{\sec x} = 0.$$

## EJERCICIOS

### Ejercicios 3.1

**3.1** Dibuje la gráfica de la función  $f$  que sea continua en  $[1, 5]$  y que tenga las propiedades siguientes:

- Mínimo absoluto en 2; máximo absoluto en 3; mínimo local en 4.
- Mínimo absoluto en 1; máximo absoluto en 5; mínimo local en 2; mínimo local en 4.

**3.2** Halle los valores máximo y mínimo absoluto de  $f$  en el intervalo dado:

- $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ ; en  $[0, 3]$ .
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ ; en  $[-2, 3]$ .
- $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ ; en  $[-1, 1]$
- $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$ ; en  $[-1, 1]$
- $f(x) = x^a [1-x]^b$ ; en  $0 \leq x \leq 1$

**3.3** Verifique que las funciones dadas cumplen el teorema (3.7) (Rolle):

- $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$ ; en  $[1, 3]$ .

b.)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$ ; en  $[0, 9]$ .

**3.4** Si  $f(x) = 1 - x^{2/3}$ . Demuestre que  $f(-1) = f(1)$ , pero no hay un número  $c$  en  $(-1, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$ . ¿Por qué esto contradice el teorema (3.7)?

**3.5** Si  $f(x) = \tan x$  demuestre que  $f(0) = f(\pi)$  pero no hay un número  $c$  en  $(0, \pi)$  tal que  $f'(c) = 0$ , ¿Por qué esto contradice el teorema (3.7)?

**3.6** Verifique que las funciones dadas cumplen las hipótesis de teorema 3.2 (del valor medio) y encuentre el número  $c$ .

a.)  $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ ; en  $[-1, 1]$ .

b.)  $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ; en  $[1, 4]$ .

**3.7** Para  $f(x) = (x-3)^{-2}$ , demuestre que no existe un valor para  $c$  en  $(1, 4)$  tal que  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c)$ . ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

**3.8** La misma pregunta 7 para  $f(x) = 2 - |2x - 1|$ ; en  $(0, 3)$ .

**3.9** Si  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

a.) ¿Donde  $f$  es creciente o decreciente?

b.) Hallar los valores máximos y mínimos locales.

c.) ¿Donde  $f$  es cóncava o convexa?

**3.10** Si  $f(3) = 2$ ;  $f'(3) = \frac{1}{2}$ ;  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$  para todo  $x$ .

a.) Dibuje la gráfica posible para  $f$ .

b.) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación ?

c.) ¿Es posible que  $f'(2) = \frac{1}{3}$ ? ¿Por qué?

**3.11** ¿Para qué valores de  $a$  y  $b$  la función  $f(x) = axe^{bx^2}$  tiene el valor máximo  $f(2) = 1$ ?

**3.12** Se desea fabricar un tarro para que contenga un litro de aceite. Hallar las dimensiones que minimizan el costo del material para fabricar dicho tarro.

**3.13** La suma de dos números es 120. ¿Qué números hacen que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo?

**3.14** Calcule cada límite utilizando la regla de L'Hopital. Asegúrese que tiene la forma indeterminada antes de aplicar la regla.

a.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{sen} x}{x}$

b.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} 2x}{\tan x}$

c.)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

d.)  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t} - t^2}{\ln t}$

e.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\operatorname{sen} 2x - 2x}$

f.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$

g.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^{10000}}{x}$

h.)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sec x + 5}{\tan x}$

i.)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\sqrt{-\ln x}}$

j.)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x)^{x^2}$

k.)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (5 \cos x)^{\tan x}$

l.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

m.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \csc x - \frac{1}{x} \right)$

n.)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2e^x)^{\frac{1}{x}}$

ñ.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\cos x}$

o.)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x}$

# 4

## BIBLIOGRAFÍA

Bell, E., (1985). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica. México, D.F.

Cantoral Uriza, Ricardo; Fafán Márquez, Rosa María, (2004). Desarrollo Conceptual del Cálculo. International Thomson Editores. México, D.F.

Cordero, Francisco; Solís, Miguel., (1995). Las Gráficas de Funciones como una Argumentación del Cálculo- Didáctica?. Grupo Editorial Iberoamericano. México, D.F.

Granville, W., (1904). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial UTEHA.

Larson, Roland E. Hostetler, Robert P. Edwards, Bruce H., (1995). Cálculo, volumen 1. Quinta Edición. Editorial McGraw-Hill. México, D.F.

Monsalve, Sergio, (2010). Cálculo con notas Históricas y Contextos Económicos. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.

Piedra Vilchez, Cesar, (2015). Introducción al Cálculo. Editorial Macro. Lima, Perú.

Rubio Perilla, Marcelo. Dueñas Ruiz, Herbert, (2006). Cálculo I. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Stewart, James, (2001). Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. Cuarta Edición. International Thomson Editores. México, D.F.

Stewart, James, (2012). Cálculo. Trascendentes Tempranas. Séptima Edición. Cengage Learning.

Spivak, M., (1980). Calculus. Editorial Reverté.

Tom, M. Apóstol, (1973). Calculus, Volumen 1. Editorial Reverté, S.A. España.

Wenzelburger, Elfriede., (1993). Didáctica: Cálculo Diferencial. Grupo Editorial Iberoamericano. México, D.F.