

Métodos Matemáticos

NOTAS DE
CLASE



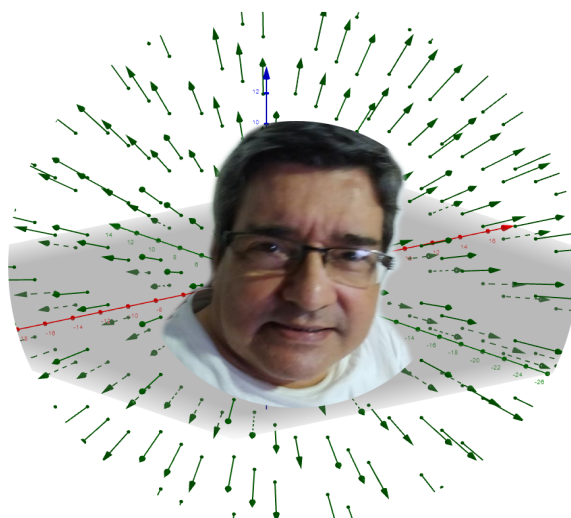
FÍSICA

**ELEMENTOS DE
ANÁLISIS
VECTORIAL**



Jesús Hernando Otálora Bonilla

MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA LA FÍSICA



Jesús Hernando Otálora Bonilla, magister en enseñanza de la física de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), especialista en Ciencias Físicas de la Universidad Nacional de Colombia (UN), licenciado en Física de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN).

Profesor asociado tiempo completo de la Universidad de la Amazonia (UA), Florencia - Caquetá, programa académico de Licenciatura en Matemáticas y Física, facultad ciencias de la educación.

Nacido en Florencia Caquetá, inició su carrera docente en la Universidad de la Amazonia en 1988, impartiendo las cátedras de: Electricidad y magnetismo, e Historia de la Física. Actualmente dicta: Métodos matemáticos para la física, electrodinámica y física moderna. Ha depositado sus 34 años de carrera docente para escribir esta serie de 3 libros:

Elementos de electrodinámica (Notas de clase), Sistemas coordenados curvilíneos ortogonales (Notas de clase) y Métodos matemáticos para la física: Elementos de análisis vectorial (Notas de clase).

MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA LA
FÍSICA
(ELEMENTOS DE ANÁLISIS
VECTORIAL)
(NOTAS DE CLASE)

Jesús Hernando Otálora Bonilla

20 de julio de 2024



*Dedicado a:
Mi primer nieto, Matías.
Y a mis tres perritas, Luna, Sol y Celeste.
Y a mi gata, Nashira
...*



Nashira



Sol



Celeste



Luna

*El aprendizaje no se logra por casualidad, debe buscarse con
pasión y atenderse con esmero.*

Abigaíl Adams.

(En carta enviada a su hijo John Quincy Adams, 1780)

*(Tomada de Cheng, David K. Fundamentos de
electromagnetismo para la ingeniería. Addison Wesley
Iberoamericana S.A México.1997).*

*“Es el verdadero arte del maestro, despertar la alegría por el
trabajo y el conocimiento.”*

Albert Eintein

Métodos Matemáticos para la Física. Elementos de Análisis vectorial.
Notas de clase.

EQUIPO DE TRABAJO O AUTORES

AUTOR: JESÚS HERNANDO OTÁLORA BONILLA

Docente de carrera, asociado de la Universidad de la Amazonia.
Facultad Ciencias de la Educación.
j.otalora@uniamazonia.edu.co

UNIVERSIDAD DE LA AMAZONIA

Fabio Buriticá Bermeo

Rector

William D. Giraldo Sarmiento

Secretario general:

Javier Martínez Plazas

Vicerrector Académico

Yisela Méndez Rojas

Vicerrectora administrativa

Juan Carlos Suarez Salazar

Vicerrector de Investigación e Innovación

ALIADOS ESTRATÉGICOS

Diego Hernando Otálora Barrero

DISEÑO DE PORTADA

Campo de velocidades de un fluido al chocar con un obstáculo Plano.
Generada mediante el graficador [geogebra.org/u/i.geogebra.lp](https://www.geogebra.org/u/i.geogebra.lp).

PUBLICADO POR:

Editorial - Universidad de la Amazonia
2024

Diseño y diagramación:

Diego Hernando Otálora Barrero, Florencia – Caquetá

Autor: Jesús Hernando Otálora Bonilla. **Editor Latex:** Diego Hernando Otálora Barrero y Tatiana Vanessa Zuluaga Guzmán.
Copyright: Todos los derechos reservados.



Métodos Matemáticos para la Física. Elementos de Análisis vectorial. - Notas de clase.

© Otálora Bonilla, Jesús Hernando.

Otálora Bonilla², J H. 2024. *Métodos Matemáticos para la Física. Elementos de Análisis vectorial. Notas de clase.* Primera Edición. Editorial Universidad de la Amazonia. (287) pp. Tamaño (16x20.7 cm).

Incluye bibliografía.

Diagramación y diseño de cubierta
Diego Hernando Otálora Barrero.

ISBN (Digital): 978-628-7693-15-9

Tiraje: Libro digital

Número y año de edición: Primera edición, 2024.

Palabras claves: Vectores, Campo escalar, Campo vectorial, Gradiente, Divergencia, Rotacional, Laplaciano.



Universidad de la Amazonia

Vicerrectoría de Investigación e innovación

© Editorial - Universidad de la Amazonia

Campus Porvenir: Calle 17 Diagonal 17 con Carrera 3F - Barrio Porvenir

Contacto: vrinvestigaciones@udla.edu.co

Depósito Legal: Biblioteca Nacional de Colombia.

Prohibida la reproducción total o parcial de este con fines comerciales. Su utilización se puede realizar con carácter académico, siempre que se cite la fuente.

“El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión del (los) autor(es) y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de la Amazonia, ni genera su responsabilidad frente a terceros. El (los) autor(es) asume(n) la responsabilidad por los derechos de autor y conexos contenidos en la obra, así como por la eventual información sensible publicada en ella” Florencia, Caquetá, Colombia.

Impreso y hecho en Colombia / Printed and made in Colombia

Presentación

“[...] Los vectores son un remanente, una ramificación inútil, de los cuaterniones, y no han sido nunca de la menor utilidad a ninguna criatura”

William Thomson, Lord Kelvin, (1824 - 1907).

En 1901 se publica el primer libro de texto de análisis vectorial, **Vector Analysis de Edwin Bidwell Wilson**, donde se presenta formalmente la teoría del análisis vectorial moderno. Sin embargo la necesidad del concepto de vector se remonta a personajes como **Galileo Galilei** con su teoría de la composición de movimientos o Isaac Newton con su formulación de la ley del paralelogramo.

Pero es a partir de 1843 cuando **William Rowan Hamilton (1805-1865)** descubre los cuaterniones, cantidades complejas de la forma:

$$a + xi + j + zk$$

Donde a, x, y, z son números reales e i, j, k son tres imaginarios que cumplen con las siguientes reglas de multiplicación:

$$ij = k \quad jk = i \quad ki = j \quad ji = -k \quad kj = -i \quad ik = -j \quad ii = jj = kk = 1$$

En 1846 Hamilton introduce las denominaciones **escalar y vector** para las partes de sus cuaterniones, de tal manera que, un quaternion queda escrito como:

$$Q = SQ + VQ$$

de tal manera que, si dos cuaterniones tiene parte escalar igual a cero:

$$Q = xi + yj + zk$$

$$Q' = x'i + y'j + z'k$$

entonces, el producto de los dos cuaterniones obedece la regla:

$$QQ' = -(xx' + yy' + zz') + i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(ky' - yk')$$

Donde:

$$VQQ' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(ky' - yk')$$

Es el producto de sus partes vectoriales.

Muchos problemas quedaron resueltos una vez que se dan cuenta de la posibilidad de trabajar la parte escalar y la parte vectorial de los cuaterniones por separado. Así fueron apareciendo conceptos del análisis vectorial como **producto interno y producto externo** gracias a Hermann G. Grassmann (1809-1877), **rotacional y divergencia** por Maxwell, y grandes síntesis como la realizada por Oliver Heaviside (1850–1925) a las ecuaciones del tratado sobre la teoría del electromagnetismo y la luz de Maxwell.

Pero lo que nunca llegó a saber Lord Kelvin, es que los remanentes de los cuaterniones, es decir, los vectores, resultaron ser fundamentales para ramas de la ciencia como la Física.

Aquellos vectores que no tienen un punto de aplicación u origen específico, es decir los vectores libres, permiten expresar aquellas leyes físicas vectoriales de forma válida para cualquier punto del universo, expresando con ello el carácter

universal de dichas leyes. Pero, también, permiten estudiar sistemas sin la necesidad de especificar una disposición fija, tal como el estudio de la rotación del volante de un automóvil donde el par de fuerzas que la producen puede ubicarse en cualquier par de puntos opuestos del volante.

Ellos, con sus respectivas operaciones, son los objetos de estudio de las dos primeras unidades de estas notas de clase del espacio académico **Métodos Matemáticos para la Física** en el programa académico de **Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia**. Puesto que su estudio involucra elementos de geometría euclídea y trigonometría, es un tema que, por lo general, no se desarrolla en el bachillerato y los primeros semestres de programas académicos que involucren el estudio de las Matemáticas y la Física.

La unidad 3 desarrolla el enfoque preferido de estudio de los vectores y sus operaciones: **el enfoque cartesiano**. Los vectores se refieren a el plano cartesiano, R^2 , o al espacio cartesiano, R^3 , y su estudio es más de carácter algebraico, lo que lleva a su preferencia.

La unidad 4 asume el estudio del problema fundamental de la Mecánica Newtoniana, el movimiento de partículas, a través de vectores que varían en el tiempo. Allí se analizan los movimientos en una, dos y tres dimensiones y se resalta la importancia de la segunda ley de Newton, pues por algo se le dice la ley de movimiento.

En la unidad 5 y la unidad 6 se estudian los campos escalares y los campos vectoriales con sus respectivos operadores, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, los que permiten clasificar dichos campos.

También se desarrollan en los apéndices temáticas que tienen un trasfondo histórico, pues siempre he creído que la historia de la ciencia, y en este caso de la Física, es una herramienta fundamental para la enseñanza de la Física en cuanto que permite atraer la atención del estudiante y generar con ello el interés por el estudio de la Física.

En otros apéndices se desarrollan temáticas que en su momento hicieron parte del programa oficial del espacio académico de **Métodos Matemáticos para la Física**, pero que, con las diversas reformas curriculares hechas al plan de estudio de la licenciatura en los procesos de acreditación de alta calidad, fueron quedando relegadas. Por su importancia no he querido dejarlas de lado y las he recogido como apéndices tanto en estas notas de clase como en otras que he desarrollado.

Como el espacio académico que ha generado estas notas de clase es el de **Métodos Matemáticos para la Física** perteneciente al área de Física de la licenciatura, se ha hecho el esfuerzo por desarrollar los elementos de análisis vectorial, aquí tratados, desde la Física.

Esperanzado con que estas notas de clase sean de ayuda a muchas generaciones de estudiantes, no solo de la **Universidad de la Amazonia**, sino de otras instituciones universitarias y con el dolor por la desaparición la **Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia**, no queda más que agradecer, primero a todos mis estudiantes que en estos treinta y tres años de vinculación con la universidad fueron, en última instancia los motivadores y correctores de estas notas de clase.

Agradecer a la **Universidad de la Amazonia**, institución que me permitió, a través de su facultad de educación y el programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, desarrollar mi profesión como docente.

J. H. O. B.
2022

Índice general

1. VECTORES LIBRES	1
1.1. ¿Por qué estudiar vectores libres?	1
1.1.1. Ley de conservación del momento lineal	1
1.1.2. Ley de conservación del momento lineal	2
1.2. Suma de vectores libres	4
1.2.1. Método del paralelogramo o método del triángulo	4
1.2.2. Propiedades de la suma de vectores	9
1.2.3. El mal llamado método del polígono.	10
1.2.4. Ejemplo	11
1.2.5. Convenio para la orientación de un vector con los puntos cardinales	17
1.2.6. La resta de vectores libres.	17
1.2.7. La importancia de respetar el carácter vectorial de las can- tidades	18
1.2.8. ¡Para tener en cuenta!	20

ÍNDICE GENERAL

2. PRODUCTOS DE VECTORES LIBRES	27
2.1. Producto de un vector por un escalar	27
2.1.1. El escalar es un número real positivo.	27
2.1.2. El escalar es un real negativo.	28
2.1.3. El escalar es el cero.	29
2.2. Producto escalar o producto punto.	30
2.3. Proyección de un vector sobre otro vector	31
2.4. El concepto de trabajo como producto escalar.	36
2.4.1. El campo gravitacional un Campo vectorial conservativo . .	43
2.5. Producto vectorial o producto cruz	47
2.5.1. La ley de la mano derecha	48
2.5.2. Otras versiones de la ley de la mano derecha	50
2.5.3. Visualización de producto vectorial o producto cruz en el plano de una hoja, del tablero o pantalla	52
2.5.4. Las leyes de las palancas según Arquímedes	56
3. VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS	67
3.1. Vectores en el plano o vectores en R^2	67
3.2. Vectores en el espacio o vectores en R^3	73
3.3. Suma de vectores en sistemas coordenados.	78
3.4. Productos con vectores en sistemas coordenados	81
3.4.1. Producto de un vector por un escalar.	81
3.4.2. Producto escalar o producto punto entre dos vectores . . .	83

ÍNDICE GENERAL

3.4.3.	Producto vectorial o producto cruz entre vectores	87
3.4.4.	Producto vectorial o producto cruz entre los vectores mediante la ley distributiva	91
3.4.5.	Productos triples	95
4.	VECTORES VARIABLES EN EL TIEMPO Y EL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS	101
4.1.	Vector posición, vector velocidad y vector aceleración	101
4.2.	Movimiento unidimensional	103
4.2.1.	Movimiento rectilíneo uniforme	104
4.2.2.	Movimiento rectilíneo acelerado: Caída libre	105
4.2.3.	Movimiento rectilíneo acelerado: Caída con fricción	109
4.2.4.	Movimiento unidimensional: Movimiento oscilatorio	116
4.2.5.	Movimiento bidimensional: El movimiento parabólico	121
4.2.6.	Movimiento bidimensional: El movimiento circular uniformes	123
4.2.7.	Movimiento tridimensional: Movimiento helicoidal	127
4.2.8.	El movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central. La segunda ley de Kepler	129
5.	CAMPOS VECTORIALES Y CAMPOS ESCALARES	137
5.1.	Campo escalar	137
5.1.1.	Campos o funciones de dos variables	138
5.1.2.	Campos escalares o funciones de tres funciones	141
5.2.	Campo vectorial	143

ÍNDICE GENERAL

5.2.1. Campos vectoriales de dos componentes	144
5.2.2. Campos vectoriales de tres componentes	146
5.2.3. Campos Físicos escalares	149
5.2.4. Campos Físicos vectoriales	153
6. EL OPERADOR NABLA (∇) Y LOS OPERADORES DERIVADOS. GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTACIONAL Y LAPLACIANO	159
6.1. El operador nabla, ∇	159
6.2. El operador gradiente	160
6.3. Propiedades del operador gradiente	163
6.4. La ley de transmisión del calor por conducción	166
6.5. El operador Divergencia	167
6.6. El operador rotacional de un campo vectorial	174
6.7. El operador laplaciano de un campo escalar	181
6.8. Clasificación de los campos	182
6.8.1. Campo vectorial incompresible o solenoidal - conservativo o irrotacional	182
6.8.2. Campo vectorial convergente (divergente) e irrotacional (conservativo)	185
6.8.3. Campo vectorial Solenoidal (incompresible) no conservativo	187
6.8.4. Campo vectorial divergente (convergente) no conservativo .	189
A. GRÁFICAS ESCALARES Y GRÁFICAS VECTORIALES	197
B. LA COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS SEGÚN GALILEO	205

ÍNDICE GENERAL

C. LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL	213
D. UN PROBLEMA CON HISTORIA	219
E. MATRICES REALES CUADRADAS	229
E.1. Definición:	229
E.2. Principales clases de matrices cuadradas	230
E.3. Operaciones con matrices.	232
E.4. Determinante de una matriz cuadrada.	233
F. EL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS	235
 BIBLIOGRAFÍA	 247
 Bibliografía	 247

Índice de figuras

1.1. Vector libre	3
1.2. Método del paralelogramo para la suma de vectores libres.	4
1.3. El método del triángulo para la suma de vectores libres.	5
1.4. Suma de vectores paralelos y vectores antiparalelos.	5
1.5. Suma de vectores perpendiculares y vectores formando un ángulo cualquiera.	6
1.6. Ejercicio mental, pensar la situación 1 como si alguien pisara el triángulo.	9
1.7. Suma de tres vectores libres	10
1.8. Aplicando la propiedad asociativa de la suma de vectores libres	11
1.9. El polígono	11
1.10. Solución gráfica Ejemplo 1.2.4	12
1.11. Suma del vector A y el vector B	13
1.12. Suma del vector resultante 1 con el vector C	15
1.13. Convenio para la orientación de un vector con los puntos cardinales	17
1.14. Vectores A y B	18

ÍNDICE DE FIGURAS

1.15. La resta de vectores libres	18
1.16. Cuando no se tiene en cuenta el carácter vectorial de la velocidad .	19
1.17. Cuando se tiene en cuenta que la velocidad es un vector	19
1.18. Restando los vectores velocidad	20
1.19. Nuevo cálculo del ángulo τ	21
1.20. Lo que se tiene que tener en cuenta para el cálculo del ángulo ω .	22
1.21. Peso w colgando de dos cuerdas.	24
1.22. Fuerzas coplanares actuando sobre el cuerpo P	24
2.1. El vector A multiplicado por el escalar 3	28
2.2. El vector A multiplicado por el escalar -3	29
2.3. Posición de los vectores para determinar el ángulo en el producto punto	30
2.4. El vector proyección del vector A sobre el vector B	32
2.5. Proyección del vector A sobre el vector B	32
2.6. Vector unitario B construido sobre el vector B para hallar la pro- yección del vector A sobre el vector B	33
2.7. Proyección del vector B sobre el vector A	34
2.8. Proyección de vectores en diversas posiciones.	36
2.9. Esquema para calcular el trabajo realizado por la fuerza F sobre el sistema m	38
2.10. Sonda interplanetaria para el ejemplo.	40
2.11. Batman para el ejemplo	42

ÍNDICE DE FIGURAS

2.12. Esquema para mostrar que el campo gravitacional es un campo conservativo	43
2.13. Posición de los vectores para determinar el ángulo en el producto vectorial	48
2.14. La ley de la mano derecha para $\vec{A} \times \vec{B}$	49
2.15. La ley de la mano derecha para $\vec{B} \times \vec{A}$	49
2.16. La ley de la mano derecha utilizando los dedos palmares	50
2.17. El dedo pulgar señala el producto vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$	51
2.18. Producto vectorial utilizando un tornillo de rosca derecha	52
2.19. Producto vectorial cuando los vectores se encuentran en una superficie horizontal	52
2.20. Producto vectorial cuando los vectores se encuentran en una superficie vertical	53
2.21. Columna soportando una viga que a la vez soporta dos cargas. . .	54
2.22. Granjero arrastrando con tractor una carga.	59
2.23. El primo Morton.	60
2.24. Esquema del deslizamiento del primo Morton en una rampa curva. .	62
2.25. Cómo aflojar una junta.	63
2.26. Torque para diversas posiciones de la fuerza y el brazo.	64
2.27. Sistema masa polea.	64
2.28. Piedra de afilar	65
2.29. Momento angular de una piedra lanzada horizontalmente	65
2.30. Patinador	66

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Los cuadrantes del plano cartesiano	67
3.2. El vector A posicionando el punto (a, b) en el plano cartesiano. . .	68
3.3. Los vectores unitarios rectangulares o cartesianos.	69
3.4. El vector C igual a la pareja ordenada (a, b)	70
3.5. El vector D igual al par ordenado $(-2, 2)$	72
3.6. La información obtenida desde la calculadora	73
3.7. Los octantes del espacio cartesiano.	74
3.8. El vector A posicionando el punto $P(a, b, c)$ en el espacio cartesiano	75
3.9. El vector proyección AB del vector A sobre el vector B	86
3.10. Propiedad cíclica de los vectores unitarios rectangulares	93
4.1. Trayectoria y velocidad tangencial de una partícula que se mueve en el plano	103
4.2. Cambio de posición en el movimiento rectilíneo uniforme	104
4.3. Condiciones iniciales para una masa que cae por la acción de la fuerza de gravedad	105
4.4. Condiciones iniciales para una masa una masa que cae dentro de un fluido (aire)	110
4.5. Gráfica de rapidez - tiempo para una partícula que cae dentro de un fluido	113
4.6. Gráfica velocidad - tiempo par una partícula que cae dentro de un fluido	113
4.7. Movimiento oscilatorio de una partícula	116
4.8. Gráfica elongación - tiempo para el movimiento oscilatorio	120
4.9. Gráfica velocidad - tiempo para el movimiento oscilatorio	120

ÍNDICE DE FIGURAS

4.10. Gráfica aceleración - tiempo para el movimiento oscilatorio	120
4.11. Lanzamiento de un proyectil. Movimiento parabólico.	122
4.12. Movimiento semiparabólico	123
4.13. Movimiento circular uniforme de una partícula	124
4.14. Relación entre la velocidad tangencial y la velocidad angular en el movimiento circular uniforme	126
4.15. Movimiento Helicoidal de una partícula en el espacio	128
4.16. Coordenadas y vectores unitarios polares	129
4.17. Planeta sometido a la acción de una fuerza central dirigida hacia el sol	132
5.1. $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$	139
5.2. Curvas de nivel para $f(x, y) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ de la función de la figura 5.1	139
5.3. Paraboloide hiperbólico $f(x, y) = x^2 - y^2$	140
5.4. Curvas de nivel del paraboloide hiperbólico. $f(x, y) = 2, -2, 4, -4, 6, -6, 8, -8$	141
5.5. Superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $f(x, y, z) = 4, 10$	142
5.6. Superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ $f(x, y, z) = 1, 4$	143
5.7. Campo vectorial $f(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$	145
5.8. Gráfica bidimensional del campo vectorial $\vec{G}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$	146

ÍNDICE DE FIGURAS

5.9. Gráfica del campo vectorial $\vec{F} = -\frac{(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$	147
5.10. Gráfica del campo vectorial en cercanías a la superficie terrestre $\vec{w} = mg\hat{k}$	148
5.11. Campo eléctrico y líneas equipotenciales creado por una carga eléctrica puntual	150
5.12. Gráfica unidimensional del campo eléctrico y las líneas equipotenciales dentro de un condensador plano	151
5.13. Gráfica bidimensional del campo de velocidad de un fluido dentro de una tubería cilíndrica	155
5.14. Gráfica del campo de velocidad de un fluido que choca contra una superficie plana	156
6.1. Distribución más probable de personas en un auditorio con aire acondicionado	163
6.2. El vector gradiente en un punto cualquiera de una superficie	164
6.3. El vector gradiente sobre la superficie $1 = x - y + z$ en el punto $(1, -1, 1)$	164
6.4. Transmisión del calor por conducción	166
6.5. Campo eléctrico convergente y campo eléctrico divergente	172
6.6. Campo eléctrico con divergencia cero	172
6.7. Campo magnético con divergencia cero	173
6.8. Representación tridimensional del campo $r^3\vec{r}$	174
6.9. Ley de Ampere	179
6.10. Ley de Faraday - Lenz	180
6.11. Representación tridimensional del campo $\frac{\vec{r}}{r^3}$	180

ÍNDICE DE FIGURAS

6.12. Representación tridimensional de un campo vectorial solenoidal conservativo	184
6.13. Representación unidimensional de un campo conservativo solenoidal	184
6.14. Campo vectorial conservativo divergente	186
6.15. Campo vectorial conservativo convergente	187
6.16. Campo vectorial solenoidal no conservativo	189
6.17. Campo vectorial divergente no conservativo	190
6.18. Campo vectorial convergente no conservativo	191
A.1. Gráfica equivocada de la ley de Hooke.	197
A.2. Gráfica magnitud de la fuerza - estiramiento en la ley de Hooke. .	198
A.3. Gráfica Fuerza - estiramiento de la ley de Hooke.	199
A.4. Gráfica rapidez - tiempo para una partícula que cae dentro de un fluido.	199
A.5. Gráfica velocidad - tiempo para una partícula que cae dentro de un fluido.	200
A.6.	201
A.7. Gráfica de rapidez - tiempo	201
A.8. Gráfica posición - tiempo	202
A.9. Gráfica rapidez - tiempo	202
A.10. Gráfica velocidad - tiempo	203
A.11. Gráfica magnitud de la aceleración - tiempo	203
A.12. Gráfica aceleración - tiempo	204

ÍNDICE DE FIGURAS

B.1. Caída de una masa desde lo alto de un mástil de un velero en movimiento según Galileo.	207
B.2. Caída de bola de plomo según Galileo.	209
B.3. Caída de la bola de plomo según la teoría Aristotélica	211
C.1. Isaac Newton 1642 - 1727	214
C.2. Planeta en su órbita elíptica alrededor del sol bajo la influencia de la ley de la gravitación	218
D.1. Componentes radial y angular de la fuerza central que el sol ejerce sobre un planeta	221
D.2. Las tres órbitas posibles para un objeto sometido a la acción de una fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia	227
F.1. Sistema oscilatorio correspondiente a dos resortes en serie.	239
F.2. Modos de oscilación de cada uno de los resortes y de la combinación de ellos.	243

UNIDAD 1

VECTORES LIBRES

1.1. ¿Por qué estudiar vectores libres?

Muchas de las leyes de la física son de carácter vectorial.

Por ejemplo:

1.1.1. Ley de conservación del momento lineal

Esta ley establece que, si sobre un sistema la suma de las fuerzas aplicadas sobre él es cero, entonces el momento lineal (cantidad de movimiento, $\vec{p}$) del sistema permanece constante, es decir, se conserva en el tiempo.

$$\text{Si } \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (1.1)$$

Es decir:

$$\vec{p} = \text{constante} \quad (1.2)$$

Y,

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.3)$$

1.1.2. Ley de conservación del momento lineal

Igual sucede con el *principio de conservación del momento angular*:

$$\text{Si } \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad (1.4)$$

Es decir:

$$\vec{L} = \text{constante} \quad (1.5)$$

Donde $\vec{L}$ es el momento angular y $\vec{\tau}$ el torque o momento de torsión.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.6)$$

y

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.7)$$

Puesto que las leyes de la física son de **carácter universal**, es decir, deben ser válidas (*en principio*) para cualquier región del espacio, entonces deben poder expresarse mediante vectores que puedan trasladarse libremente en el espacio manteniendo invariable su magnitud, dirección y sentido, es decir, deben expresarse mediante **vectores libres**.

Por tanto:

1.1. ¿POR QUÉ ESTUDIAR VECTORES LIBRES?

3

Un vector libre es aquel que está totalmente especificado mediante su magnitud, su dirección y su sentido, sin que sea necesario indicar un punto de aplicación o un origen en particular.

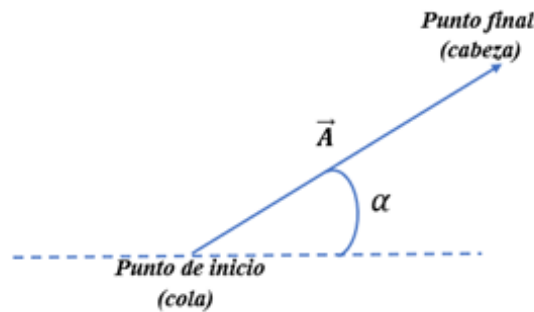


Figura 1.1: Vector libre

Vector: Segmento de recta dirigido.

Magnitud: Está representada por la longitud del segmento.

Se escribe: $|\vec{A}|$ o en algunos casos simplemente A .

Por ejemplo: $|\vec{A}| = 5$ o $A = 5$

¡No se permite! $\vec{A} = 5$

La magnitud de un vector no puede ser negativa.

$$|\vec{A}| \geq 0 \quad (1.8)$$

Dirección: α

Sentido: Noreste

Como un vector es un segmento dirigido entonces tiene un punto de inicio y un punto final. Coloquialmente, se suele referir al punto de inicio del vector como la cola y al punto final como la cabeza. Eso no quita o aumenta nada, y más bien favorece la memorización y comprensión por parte del estudiante.

1.2. Suma de vectores libres

1.2.1. Método del paralelogramo o método del triángulo

El método del paralelogramo para sumar vectores fue establecido por **Sir Isaac Newton** (1642(43)-1727) en su libro **Principios Matemáticos de la Filosofía Natural**, conocido popularmente como Los Principia, por su título en latín.

Un cuerpo recorre la diagonal de un paralelogramo bajo dos fuerzas conjuntas en el mismo tiempo en que los dos lados bajo las dos acciones por separado.

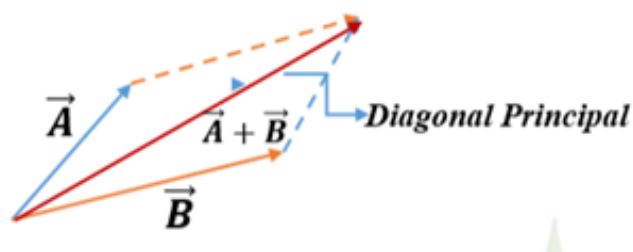


Figura 1.2: Método del paralelogramo para la suma de vectores libres.

Según la figura 1.2, para sumar dos vectores $\vec{A} + \vec{B}$ (la fuerza es una cantidad vectorial) se unen los vectores por sus colas, se completa el paralelogramo y la diagonal principal es el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$.

En procura de una mejor comprensión por parte del estudiante se suele reemplazar el método del paralelogramo por su equivalente método del triángulo, pues es frecuente que al estudiante se le dificulte identificar la diagonal principal (y por supuesto la diagonal secundaria, la cual corresponde a la resta de los vectores) y darle la correspondiente dirección.

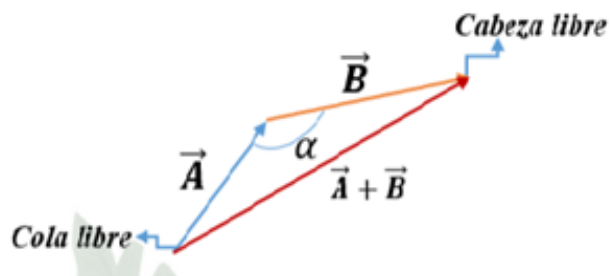
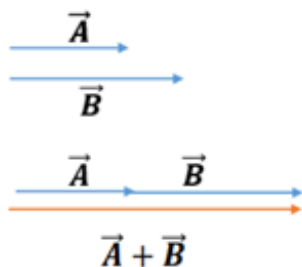


Figura 1.3: El método del triángulo para la suma de vectores libres.

Según la figura 1.3, en el método del triángulo para sumar vectores, sobre la cabeza del primer vector ($\vec{A}$, por ejemplo) se coloca la cola del otro vector $\vec{B}$ y el vector suma ($\vec{A} + \vec{B}$) se traza desde la cola libre hacia la cabeza libre.

Y, la magnitud $|\vec{A} + \vec{B}|$, del vector suma ¿Cómo se obtiene? Para ello consideremos las cuatro posiciones posibles de los dos vectores.

1. Vectores paralelos.



2. Vectores antiparalelos.

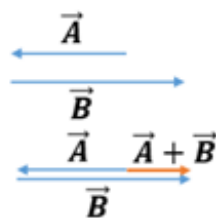


Figura 1.4: Suma de vectores paralelos y vectores antiparalelos.

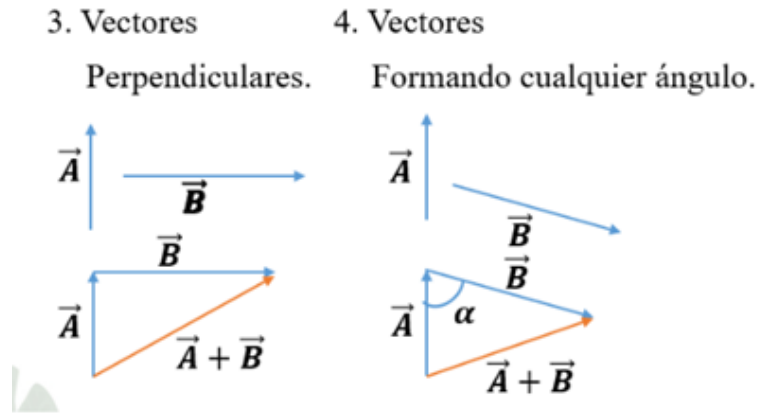


Figura 1.5: Suma de vectores perpendiculares y vectores formando un ángulo cualquiera.

Se supone que $|\vec{A}| = 3$ y $|\vec{B}| = 4$.

En la situación 1, donde los dos vectores tienen la misma dirección, es fácil observar que si se sigue el método del triángulo se tiene:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A}| + |\vec{B}| \quad (1.9)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = 3 + 4 = 7 \quad (1.10)$$

En la situación 2, los dos vectores tienen direcciones opuestas, entonces:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A}| - |\vec{B}| \quad (1.11)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = 4 - 3 = 1 \quad (1.12)$$

En la situación 3, donde los vectores son perpendiculares, se obtiene un triángulo rectángulo donde el vector suma es la hipotenusa y para encontrar su valor se aplica el *teorema de Pitágoras*.

$$[\vec{A} + \vec{B}] = \sqrt{[\vec{A}]^2 + [\vec{B}]^2} \quad (1.13)$$

$$[\vec{A} + \vec{B}] = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \quad (1.14)$$

$$[\vec{A} + \vec{B}] = 5 \quad (1.15)$$

Y, en la situación 4, donde los vectores forman un ángulo α , agudo (menor de 90°) u obtuso (mayor de 90°), se debe aplicar el *teorema del coseno*.

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2 |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha} \quad (1.16)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 - 2 (3) (4) \cos \alpha} \quad (1.17)$$

El valor exacto depende, obviamente, del valor del ángulo α .

Como en todas las cuatro situaciones hemos aplicado el método del triángulo (unir cabeza con cola y trazar el vector suma desde la cola libre hasta la cabeza libre), pero numéricamente hemos obtenido la magnitud del vector suma de cuatro formas diferentes, entonces debemos concluir que *¿para sumar vectores se tiene un solo método gráfico y cuatro métodos numéricos? Veamos.*

¿Será que en la situación 3 donde $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se puede aplicar el *Teorema del coseno*? Veamos.

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2 |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha} \quad (1.18)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 - 2 (3) |4| \cos \frac{\pi}{2}} \quad (1.19)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \quad (1.20)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = 5 \quad (1.21)$$

Pues $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. ¡Es que el teorema de Pitágoras es un caso particular del teorema del coseno!

¿Y en la situación 1, donde los vectores son paralelos?

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos \alpha} \quad (1.22)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 - 2(3)(4)\cos \pi} \quad (1.23)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + 2(3)(4)} \quad (1.24)$$

Pues $\cos \pi = -1$.

Recordando que $(a + b)^2 = (a)^2 + 2ab + (b)^2$, se tiene que:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(3 + 4)^2} \quad (1.25)$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = 7 \quad (1.26)$$

Es que se puede imaginar la disposición de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} + \vec{B}$ de la situación 1, como un triángulo que alguien ha pisado y por lo tanto se le puede aplicar el *teorema del coseno* teniendo en cuenta que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ unidos por la cola forman un ángulo de 180° . Figura 1.6.

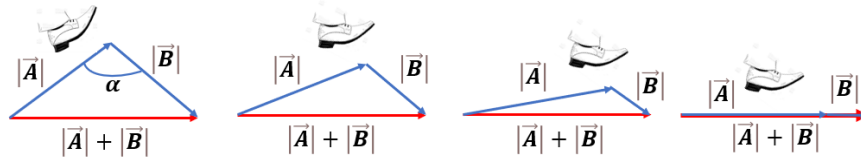


Figura 1.6: Ejercicio mental, pensar la situación 1 como si alguien pisara el triángulo.

Queda para usted, señor lector, mostrar que en la situación 2 también es posible aplicar el *Teorema del coseno*.

Por tanto:

Conclusión

Solo hay un método gráfico (el del paralelogramo o triángulo) y un solo método analítico (teorema del coseno) para sumar vectores libres.

El método del paralelogramo (o del triángulo) consiste en unir los vectores a sumar cabeza con cola y el vector suma se dirige desde la cola libre a la cabeza libre.

La magnitud del vector suma se obtiene mediante el teorema del coseno.

La dirección del vector suma se obtiene desde las direcciones de los vectores a sumar, aplicando los conocimientos geométricos y trigonométricos que se tienen.

1.2.2. Propiedades de la suma de vectores

La suma de vectores libres cumple las mismas propiedades que la suma de números reales.

1. **Clausurativa.** La suma de dos vectores del mismo espacio da otro vector de dicho espacio. Por decir: Si sumo dos vectores del plano, $(\mathbb{R}^2)$, se obtiene

un vector del plano. Lo mismo puede decirse para vectores del espacio, $\mathbb{R}^3$.

2. **Modulativa.** Para todo espacio vectorial existe el vector cero, $(\vec{0})$, tal que sumado con cualquier otro vector del mismo espacio, este último no se modifica. $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$
3. **Conmutativa.** El orden de los sumandos no altera el resultado.
 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
4. **Inverso aditivo.** Para todo vector de un espacio vectorial existe otro vector del mismo espacio, tal que al sumarlos el resultado es cero. Dicho vector se llama el vector inverso aditivo del primero. $\{\forall \vec{A}, \exists -\vec{A} / \vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}\}$.
El inverso aditivo de un vector se obtiene rotando 180° el vector.
5. **Asociativa.** Para sumar más de dos vectores se debe asociar de dos en dos. Es decir, que la suma de vectores es una operación binaria. $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$.

1.2.3. El mal llamado método del polígono.

Considérese los vectores de la figura 1.7 para sumar.

Utilizando la propiedad asociativa de la suma de vectores se tiene:

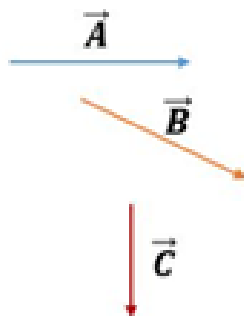


Figura 1.7: Suma de tres vectores libres

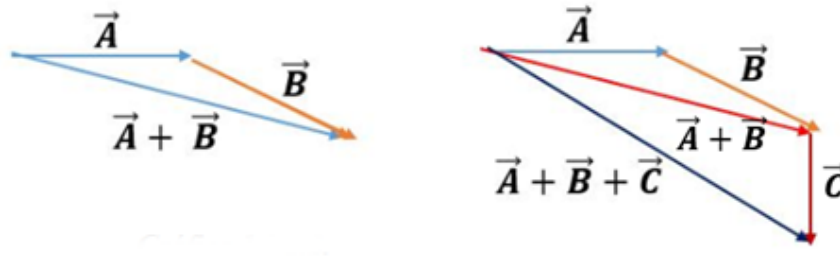


Figura 1.8: Aplicando la propiedad asociativa de la suma de vectores libres

Si obviamos el paso intermedio se tiene:

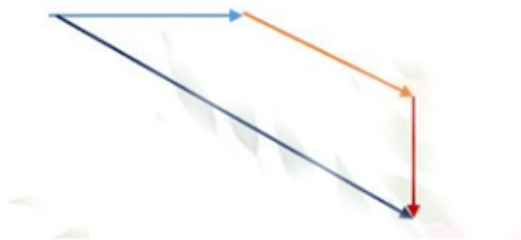


Figura 1.9: El polígono

Obviamente se obtiene un polígono, pero no es ningún método. Es la aplicación de la propiedad asociativa de la suma de vectores libres. La magnitud del vector suma se obtiene, analíticamente, con la aplicación del *teorema del coseno* cuantas veces se requiera.

1.2.4. Ejemplo

Una persona realiza los siguientes desplazamientos; **10m** al noroeste, **20m** con dirección 30° al noreste y **35m** al sur. ¿Cuál fue su desplazamiento total?

Solución Gráfica

Nota: El gráfico 1.10 no está hecho a escala.

$$|\vec{A}| = 10m \quad |\vec{B}| = 20m \quad |\vec{C}| = 35m$$

$\vec{R}$ la resultante

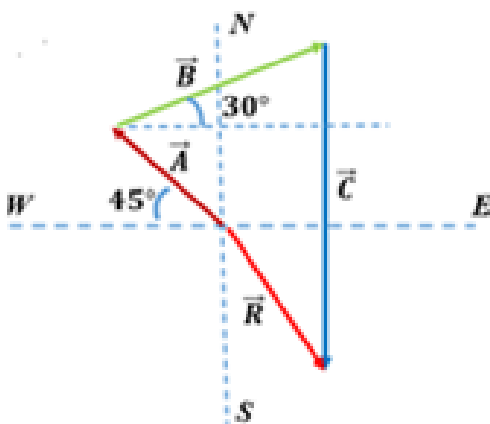
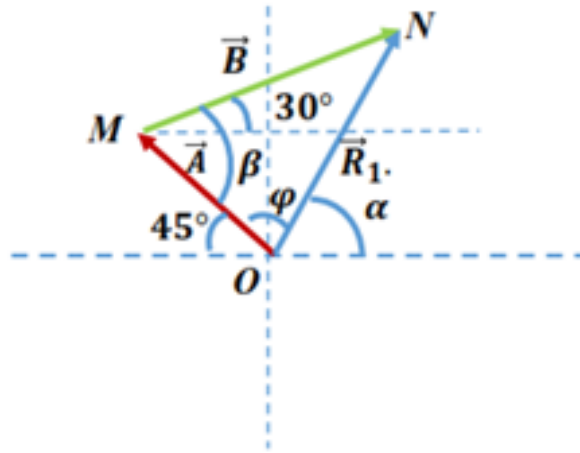


Figura 1.10: Solución gráfica Ejemplo 1.2.4

Solución Analítica

Por ley asociativa se puede hacer la suma $\vec{A} + \vec{B}$, suma que se llamará $\vec{R}_1$.
Figura 1.11.

Figura 1.11: Suma del vector A y el vector B

Para aplicar el *teorema del coseno* necesitamos el ángulo β el cual claramente es de 75° . Entonces:

$$\vec{R}_1 = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos 75^\circ}$$

$$\vec{R}_1 = \sqrt{10^2 + 20^2 - 2(10)(20)(0,26)}$$

$$\vec{R}_1 = 19,9m$$

Para direccionar $\vec{R}_1$ se hallará el ángulo α . Por la ley del seno en el triángulo OMN , se tiene:

$$\frac{|\vec{B}|}{\sin \varphi} = \frac{|\vec{R}_1|}{\sin \beta}$$

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{B}| \sin \beta}{|\vec{R}_1|}$$

$$\sin \varphi = \frac{(20)(0,97)}{19,9}$$

$$\sin \varphi = 0,97$$

$$\varphi = \tan^{-1} 0,97$$

$$\varphi = 75,9^\circ$$

Por tanto:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - (75,9^\circ - 45^\circ)$$

$$\alpha = 59,1^\circ$$

Ahora, sumando $\vec{R}_1$ con $\vec{C}$, tenemos:

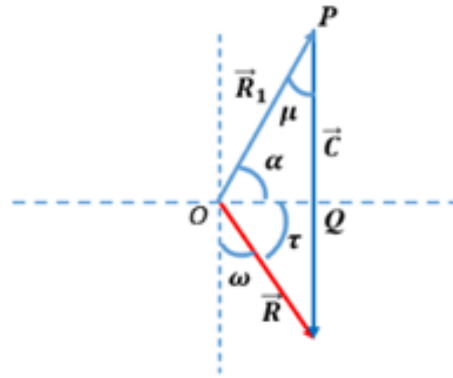


Figura 1.12: Suma del vector resultante 1 con el vector C

En el triángulo QOP de la figura 1.12, el ángulo μ es:

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} - 59,1^\circ$$

$$\mu = 30,9^\circ$$

Nuevamente el **teorema del coseno**:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{R}_1|^2 + |\vec{C}|^2 - 2|\vec{R}_1||\vec{C}|\cos\mu}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(19,9)^2 + (35)^2 - 2(19,9)(35)\cos 30,9^\circ}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{396 + 1225 - 1197,87}$$

$$|\vec{R}| = 20,6m$$

Según el triángulo QOP :

$$\overline{OQ} = OP \cos \alpha$$

$$\overline{OQ} = 19,9 \cos 59,1^\circ$$

$$\overline{OQ} = 10,2m$$

Por tanto:

$$\tau = \cos^{-1} \frac{\overline{OQ}}{R}$$

$$\tau = 60,3^\circ$$

$$\omega = 90^\circ - 60,3^\circ = 29,7^\circ$$

Es decir que el desplazamiento total de la persona fue de 20,6m en dirección $60,3^\circ$ por debajo del este, o utilizando la convención para direccionar vectores, su dirección final fue de $S29,7^\circ E$.

1.2.5. Convenio para la orientación de un vector con los puntos cardinales

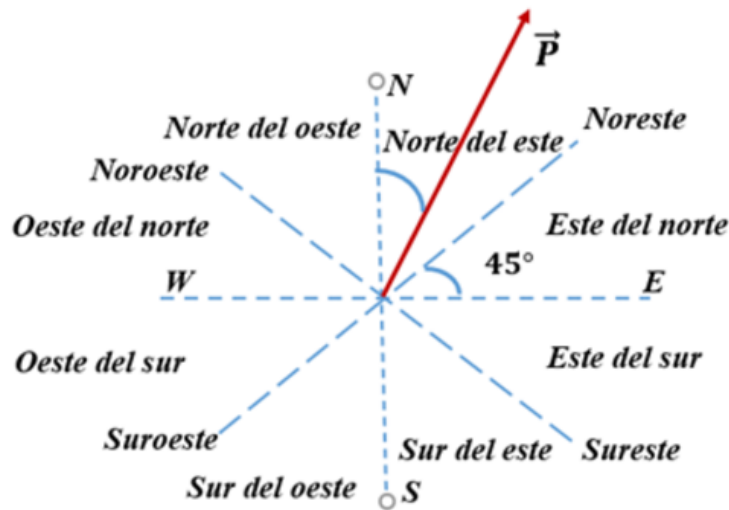


Figura 1.13: Convenio para la orientación de un vector con los puntos cardinales

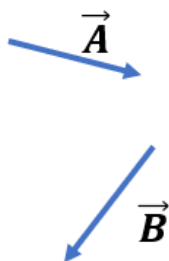
1.2.6. La resta de vectores libres.

La resta de vectores libres se resuelve de forma similar a como se resuelve la resta en los números reales, aprovechando la existencia del inverso aditivo: *mediante la suma*. Es decir, al primer vector se le suma el inverso aditivo del segundo vector. (Es bueno recordar que la resta como operación, solo existe en los números naturales, los cuales no tiene inverso aditivo).

Es decir:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (1.27)$$

Por ejemplo; sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura 1.14, encontrar gráficamente el vector $\vec{A} - \vec{B}$.

Figura 1.14: Vectores A y B

Para ello construimos el vector $-\vec{B}$ y se lo sumamos al vector $\vec{A}$. Figura 1.15.

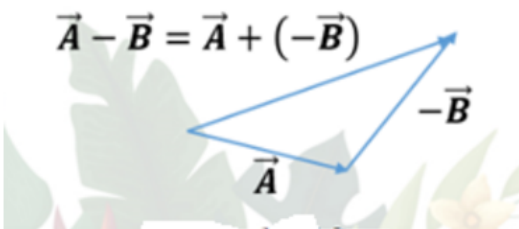


Figura 1.15: La resta de vectores libres

1.2.7. La importancia de respetar el carácter vectorial de las cantidades

Considérese la siguiente situación.

*Una pelota golpea una pared vertical con una **velocidad de 5** y rebota en dirección completamente opuesta con una **velocidad de 5**. ¿La pelota fue acelerada durante el choque con la pared? En caso afirmativo de ¿cuánto fue la aceleración? (Las unidades no importan y la negrilla en la palabra velocidad es porque así suele encontrarse en muchos enunciados en los textos). Figura 1.16*

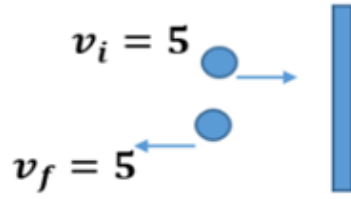


Figura 1.16: Cuando no se tiene en cuenta el carácter vectorial de la velocidad

Puesto que la aceleración se define como la velocidad final menos la velocidad inicial dividida por el tiempo, obviamente la pelota no fue acelerada durante el choque, pues:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \quad (1.28)$$

$$a = \frac{5 - 5}{t} = 0 \quad (1.29)$$

Pero si la situación es según la figura 1.17:

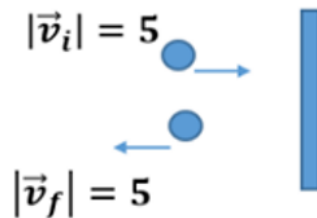


Figura 1.17: Cuando se tiene en cuenta que la velocidad es un vector

Entonces:

$$a = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t} \quad (1.30)$$

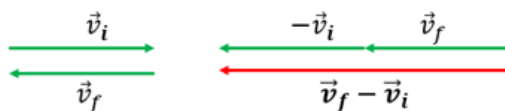


Figura 1.18: Restando los vectores velocidad

Lo que significa que la pelota sí fue acelerada durante el choque, con una aceleración dirigida hacia la izquierda y magnitud:

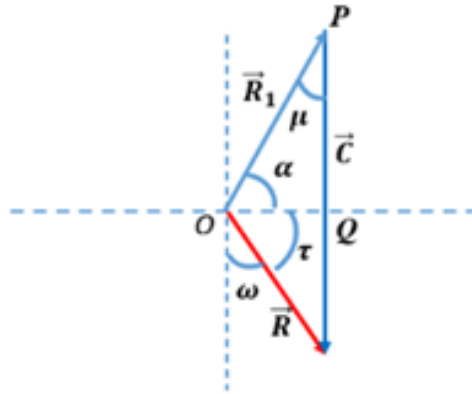
$$a = \frac{10}{t} \quad (1.31)$$

De otra forma ¿Cómo explicar que después de tener velocidad cero en el momento de contacto con la pared, la pelota se devolviera?

Si no fuera una pelota sino una onda, las cuales no se aceleran, ¿Cómo se explica la situación?

1.2.8. ¡Para tener en cuenta!

En el ejemplo 1.3.3 el ángulo τ , el cual se necesita para hallar la dirección del vector $\vec{R}$, también se puede encontrar mediante el *teorema del seno* hallando el ángulo $\theta = \alpha + \tau$. Figura 1.19.

Figura 1.19: Nuevo cálculo del ángulo τ

$$\frac{|\vec{C}|}{\sin \theta} = \frac{|\vec{R}|}{\sin \mu} \quad (1.32)$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{C}| \sin \mu}{|\vec{R}|} \quad (1.33)$$

$$\sin \theta = \frac{35 \sin 30,9}{20,6} \quad (1.34)$$

$$\sin \theta = 0,87 \quad (1.35)$$

$$\theta = \sin^{-1} 0,87 \quad (1.36)$$

$$\theta = 60,4^\circ \quad (1.37)$$

Pero, aunque la gráfica no está construida a escala, es obvio que el ángulo θ es mayor de 90° . ¡Y, aquí es donde hay que tener cuidado! Las calculadoras

trabajan con funciones; por tanto, para que la función *seno* tenga función inversa, hay que restringirla al primer cuadrante, es decir, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Por tanto, la calculadora está dando el ángulo entre 0° y 90° que tiene *seno* igual a 0,87, pero se necesita el ángulo que sea mayor $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

Dicho ángulo es $119,6^\circ$. Ese es el verdadero valor de θ .

Así:

$$\tau = 119,6^\circ - 59,1^\circ = 60,5^\circ \quad (1.38)$$

O bien;

$$\omega = 90^\circ - 60,5^\circ = 29,5^\circ \quad (1.39)$$

¡Es que la calculadora no puede hacerlo todo sola! Interpretar sus resultados es parte del manejo de ella.

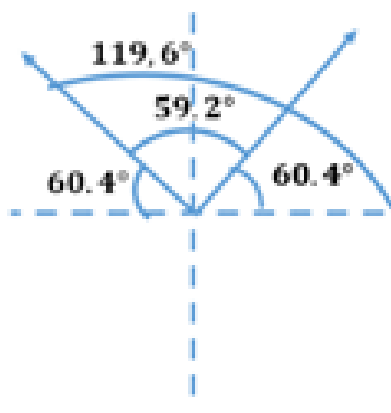


Figura 1.20: Lo que se tiene que tener en cuenta para el cálculo del ángulo ω

Taller 1

1. De las magnitudes dadas a continuación indicar las de carácter escalar y las de carácter vectorial.
 - a) Peso
 - b) Calor
 - c) Calor específico
 - d) Ímpetu
 - e) Densidad
 - f) Energía
 - g) Volumen
 - h) Distancia
 - i) Potencia
 - j) Intensidad del campo magnético
2. Representar gráficamente.
 - a) Un desplazamiento de **10km** en la dirección **Este 30° Norte**.
 - b) Un desplazamiento de **15km** en la dirección **Norte 30° Este**.
3. Hallar las componentes del vector $\vec{v}$, si $|\vec{v}| = 10$ y forma un ángulo de **60°** con el eje positivo de las **X**.
4. Un automóvil recorre **3km** hacia el norte y luego **5km** hacia el noreste. Hallar el desplazamiento resultante gráfica y analíticamente.
5. Hallar, gráfica y analíticamente, la suma o resultante de los siguientes desplazamientos:

$\vec{A}$, 10m, Noroeste. $\vec{B}$, 20m, Este 30° Norte. $\vec{C}$, 35m, Sur.

6. Un avión se mueve en la dirección y sentido del Noroeste a una rapidez, relativa a la tierra, de $250 \frac{km}{hr}$ debido a la existencia de un viento hacia el Oeste con una rapidez de $50 \frac{km}{hr}$, relativa a la tierra. Hallar la rapidez, dirección y sentido del vector velocidad que llevaría el avión si no hubiese viento.

7. Un sólido de $100N$ de peso pende del centro de una cuerda como lo muestra la figura. Hallar la tensión T en la cuerda.

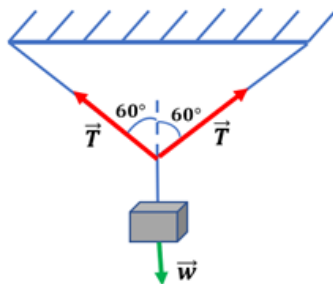


Figura 1.21: Peso w colgando de dos cuerdas.

8. Sobre un sólido puntual P actúan tres fuerzas coplanarias, tal que $|\vec{A}| = 250N$, $|\vec{B}| = 150N$ y $|\vec{w}| = 100N$. Hallar la fuerza que es necesario aplicar en P para mantener en reposo el sólido.

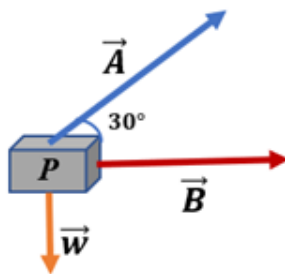


Figura 1.22: Fuerzas coplanarias actuando sobre el cuerpo P

9. En cada vértice de un cuadrado hay una partícula con carga q . En el centro del cuadrado está fija una carga puntual de signo contrario, de valor Q . ¿Cuál debe ser el valor de Q para que la fuerza total sobre cada una de las cuatro partículas sea nula?
10. Tres cargas positivas A , B y C de 3×10^{-6} , 2×10^{-6} y 2×10^{-6} *Coulomb* respectivamente, están localizadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $0,2m$.
- a) Hallar, en Newton, el módulo de la fuerza sobre cada carga.

- b) Hallar, en Newton/Coulomb, el módulo del campo eléctrico en el centro del triángulo.

UNIDAD 2

PRODUCTOS DE VECTORES LIBRES

2.1. Producto de un vector por un escalar

Nota: En las presentes *notas de clase* las cantidades escalares estarán restringidas a los números reales.

2.1.1. El escalar es un número real positivo.

Al multiplicar un vector por un escalar positivo se obtiene un vector de igual dirección y sentido, pero cuya magnitud equivale a la magnitud del vector original modificada tantas veces como el escalar lo indique.

$$\alpha \vec{A} = \vec{B} \text{ tal que } |\vec{B}| = \alpha |\vec{A}| \quad (2.1)$$

Ejemplo

Sea $\alpha = 3$ y $|\vec{A}| = 5$. Figura [2.1](#)

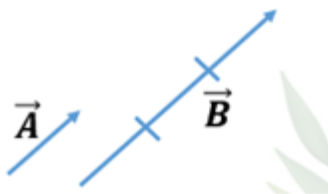


Figura 2.1: El vector A multiplicado por el escalar 3

$$|\vec{B}| = |\alpha \vec{A}|$$

$$|\vec{B}| = |\alpha| |\vec{A}|$$

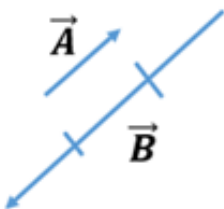
$$|\vec{B}| = |3| (5) = 15$$

2.1.2. El escalar es un real negativo.

Al multiplicar un vector por un escalar negativo, se obtiene un vector rotado un ángulo de 180° , cuya magnitud equivale a la magnitud del vector original modificada tantas veces como el valor absoluto del escalar lo indique. Gráfica [2.2](#).

Ejemplo

Sea $\alpha = -3$ y $|\vec{A}| = 5$.

Figura 2.2: El vector A multiplicado por el escalar -3

$$|\vec{B}| = |\alpha \vec{A}|$$

$$|\vec{B}| = |\alpha| |\vec{A}|$$

$$|\vec{B}| = |-3| (5)$$

$$|\vec{B}| = (3) (5) = 15$$

2.1.3. El escalar es el cero.

Si $\alpha = 0$, entonces:

$$|\vec{B}| = |\alpha| |\vec{A}|$$

$$|\vec{B}| = |0| |\vec{A}|$$

Por tanto:

$$\vec{B} = \vec{0} \quad (2.2)$$

Nota: Obviamente el escalar puede ser un número *fraccionario*, es decir, un *real racional*, $\frac{3}{5}$ por ejemplo.

Pero también puede ser un *real Irracional*, $\sqrt{2}$ por ejemplo.

2.2. Producto escalar o producto punto.

El producto escalar o producto punto es aquel donde se operan dos vectores mediante la operación *producto escalar* y se obtiene un escalar. El operador producto escalar o producto punto es $\circ$.

La operación $\vec{A} \circ \vec{B}$ se lee: $\vec{A}$ producto escalar con $\vec{B}$, o $\vec{A}$ producto punto con $\vec{B}$. Se recomienda hacer visible el operador cuando se escriba a mano, y si se escribe en un editor de ecuaciones no confundir el operador producto punto con otros símbolos semejantes como el de grados (visite el editor de ecuaciones de Word, por ejemplo).

Definición.

El producto escalar o producto punto se define como:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha \quad (2.3)$$

Donde los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se posicionan como se muestra en la figura 2.3.

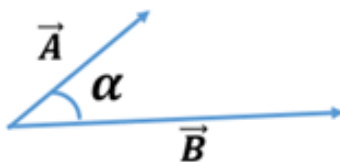


Figura 2.3: Posición de los vectores para determinar el ángulo en el producto punto

Ejemplo

Sea $|\vec{A}| = 7$, $|\vec{B}| = 9$, $\alpha = 60^\circ$. Hallar $\vec{A} \circ \vec{B}$.

$$\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$$

$$\vec{A} \circ \vec{B} = (7) (9) \cos 60^\circ$$

$$\vec{A} \circ \vec{B} = (7) (9) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{A} \circ \vec{B} = \left(\frac{63}{2}\right)$$

¿Qué dirección tiene el producto $\vec{A} \circ \vec{B}$? ¡Pues ninguno, porque el producto $\vec{A} \circ \vec{B}$ es un escalar!

2.3. Proyección de un vector sobre otro vector

Como se puede observar en el ejemplo:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = \vec{B} \circ \vec{A} \quad (2.4)$$

El producto escalar o producto punto de dos vectores es una operación
CONMUTATIVA.

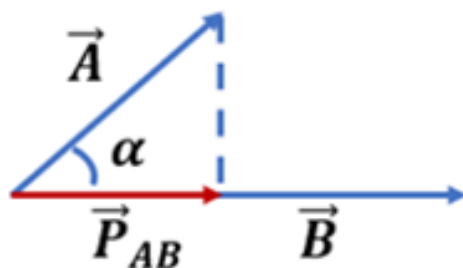


Figura 2.4: El vector proyección del vector A sobre el vector B

El *producto punto*, o *producto escalar*, entre vectores permite hallar la proyección de un vector sobre otro vector.

En la figura 2.4 se ha proyectado el vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ (en realidad una proyección a 90°), obteniéndose el vector $\vec{P}_{AB}$, el cual se llama *vector proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$* .

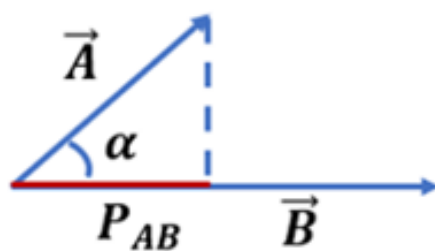


Figura 2.5: Proyección del vector A sobre el vector B

La magnitud del vector $\vec{P}_{AB}$, $|P_{AB}|$ o simplemente P_{AB} , se llama la *proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$* , y se representa simplemente con el segmento de recta equivalente. Figura 2.5.

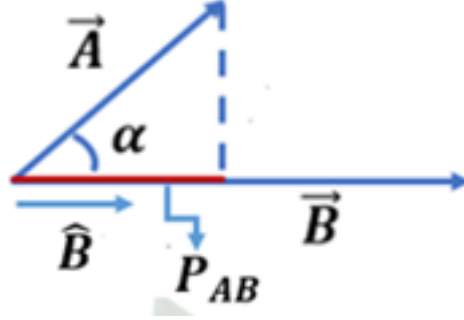


Figura 2.6: Vector unitario $\hat{B}$ construido sobre el vector B para hallar la proyección del vector A sobre el vector B

Para calcular la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$, construyamos el vector unitario $\hat{B}$, ver la figura 2.6, y realicemos el producto $\vec{A} \circ \hat{B}$.

$$\vec{A} \circ \hat{B} = |\vec{A}| |\hat{B}| \cos \alpha \quad (2.5)$$

$$\vec{A} \circ \hat{B} = |\vec{A}| \cos \alpha \quad (2.6)$$

Por trigonometría se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{P_{AB}}{|\vec{A}|} \quad (2.7)$$

$$P_{AB} = |\vec{A}| \cos \alpha \quad (2.8)$$

Por *ley transitiva*, se tiene que:

$$P_{AB} = \vec{A} \circ \hat{B} \quad (2.9)$$

Por tanto:

Para hallar la proyección de un vector sobre otro vector, se construye el vector unitario del vector sobre el cual se va a proyectar y se realiza el producto punto o escalar entre el vector que se va a proyectar y el vector unitario construido.

Para proyectar el vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$, se debe construir el vector $\hat{A}$ y realizar el producto escalar, o producto punto, con el vector $\vec{B}$.

$$P_{AB} = \vec{B} \circ \hat{A} \quad (2.10)$$

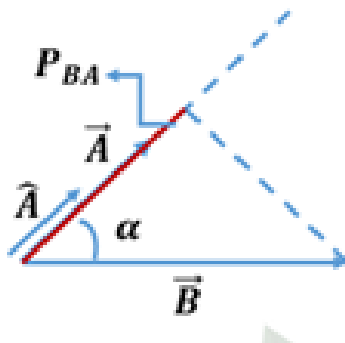


Figura 2.7: Proyección del vector B sobre el vector A

Es bueno observar que para proyectar el vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$, toca prolongar el vector $\vec{A}$ y sobre dicha prolongación construir la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.

Obsérvese que la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$, también puede escribirse como:

$$P_{AB} = \frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{|\vec{B}|} \quad (2.11)$$

Pues un vector unitario se construye dividiendo el vector por su magnitud.

Ejemplo.

Sea $|\vec{A}| = 5$, $|\vec{B}| = 7$ y $\alpha = 30^\circ$

$$P_{AB} = \vec{A} \circ \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$P_{AB} = (5)(1) \cos \frac{\pi}{6}$$

$$P_{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Vale la pena resaltar que, para hallar la proyección de un vector sobre otro vector, los dos vectores deben estar unidos por sus colas o puntos iniciales. Figura 2.8.

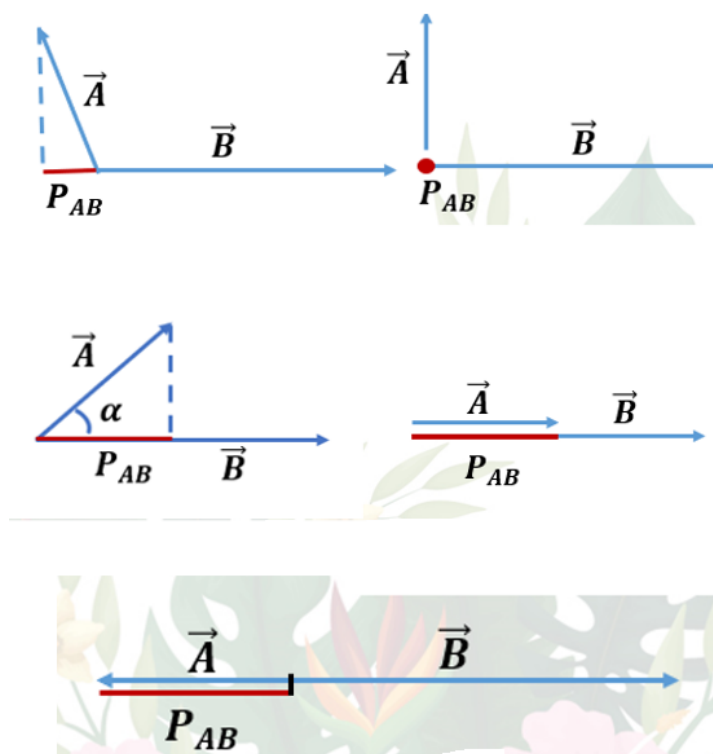


Figura 2.8: Proyección de vectores en diversas posiciones.

2.4. El concepto de trabajo como producto escalar.

En física, el concepto de trabajo se define como:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \circ d\vec{r} \quad (2.12)$$

Cuando un sistema físico (una partícula, por ejemplo) se traslada desde un punto r_1 hasta un punto r_2 , dentro de un campo de fuerzas $\vec{F}$. Dicho campo puede ser el campo gravitacional terrestre dentro del cual vivimos. Su unidad de medida es el *Joules* en el sistema internacional (*M. K. S. ampliado*) de medidas,

2.4. EL CONCEPTO DE TRABAJO COMO PRODUCTO ESCALAR. 37

o el *ergio* en el sistema *C. G. S.*

$$1 \text{ joules} = 1 \text{Kg} \frac{m^2}{s^2} \quad (2.13)$$

$$1 \text{ joules} = 1 \text{Newton } m \quad (2.14)$$

$$1 \text{ ergio} = 1 \text{gr} \frac{cm^2}{s^2} \quad (2.15)$$

$$1 \text{ ergio} = 1 \text{dina } cm \quad (2.16)$$

$$1 \text{ ergio} = 10^{-3} \text{Kg} \frac{10^{-4} m^2}{s^2} \quad (2.17)$$

$$1 \text{ ergio} = 10^{-7} \text{joules} \quad (2.18)$$

La integral de trabajo puede reescribirse aplicando la definición del producto escalar como:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F \cos \alpha dr \quad (2.19)$$

Si la magnitud de la fuerza (F) y su dirección (α) respecto a la trayectoria de integración, permanecen constantes, es decir, si el vector $\vec{F}$ es constante, entonces:

$$W = F \int_{r_1}^{r_2} dr \quad (2.20)$$

$$W = Fr \cos \alpha \quad (2.21)$$

$$W = \vec{F} \circ \vec{r} \quad (2.22)$$

Donde $\vec{r}$ es el vector desplazamiento $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Es decir que, para una **fuerza constante**, el trabajo realizado sobre un sistema físico queda definido como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento.

En la situación presentada en la figura 2.9 y según el método para sumar vectores, el vector fuerza ($\vec{F}$) puede representarse como la suma de un vector fuerza paralelo al desplazamiento del bloque ($\vec{F}_p$) y un vector fuerza perpendicular o normal ($\vec{F}_n$) al desplazamiento.

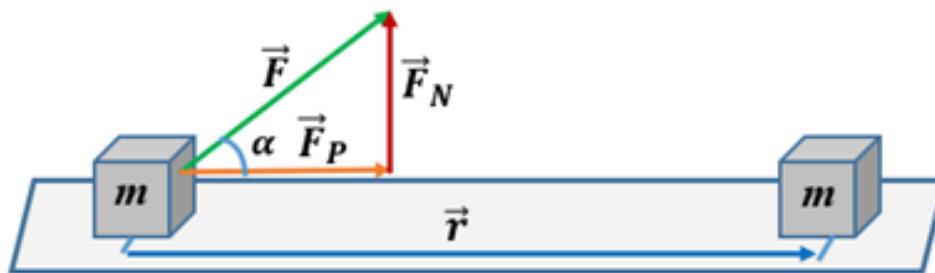


Figura 2.9: Esquema para calcular el trabajo realizado por la fuerza F sobre el sistema m

De

$$W = \vec{F} \circ \vec{r} \quad (2.23)$$

Se puede observar que solamente la fuerza paralela al desplazamiento ($\vec{F}_p$) hace trabajo diferente a cero, pues para la fuerza normal al desplazamiento ($\vec{F}_n$) el ángulo vale $\frac{\pi}{2}$ y $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Se puede concluir que:

2.4. EL CONCEPTO DE TRABAJO COMO PRODUCTO ESCALAR. 39

Solo aquellas fuerzas paralelas al desplazamiento del sistema físico hacen trabajo sobre el sistema.

Y, ¿entonces cómo explicar el que al levantar una carga desde el suelo al hombro y caminar con ella sobre una superficie plana durante un buen tiempo, al cabo de ello usted se encuentre sudoroso y cansado si según lo dicho las únicas fuerzas que realizan trabajo son las paralelas al desplazamiento?

¡OJO!

La pregunta anterior implica que para hablar del trabajo hecho sobre un sistema (o el trabajo hecho por el sistema), el sistema debe estar bien definido.

Cuando la fuerza no es constante en magnitud, pero el ángulo entre la fuerza y la trayectoria permanece constante y es conocido, el cálculo de la integral de trabajo es relativamente sencilla. En la mayoría de los casos se dice que el campo de fuerzas es conservativo. (Más adelante se hablará de ello).

Ejemplo

Una sonda interplanetaria es atraída por el sol con una fuerza dada por:

$$\vec{F} = \frac{1,3 \times 10^{23}}{r^2} \hat{r}$$

donde r es la distancia que separa a la sonda del sol. Determine el trabajo hecho por el sol sobre la sonda cuando su separación cambia de $1,5 \times 10^{11}m$ a $2,3 \times 10^{11}m$. Figura 2.10.



Figura 2.10: Sonda interplanetaria para el ejemplo.

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \circ d\vec{r}$$

$$W = 1,3 \times 10^{23} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\hat{r}}{r^2} \circ d\vec{r}$$

$$W = 1,3 \times 10^{23} \int_{1,5 \times 10^{11}}^{2,3 \times 10^{11}} \frac{dr}{r^2}$$

$$W = 1,3 \times 10^{23} \left[\frac{-1}{r} \right]_{1,5 \times 10^{11}}^{2,3 \times 10^{11}}$$

$$W = 1,3 \times 10^{23} \left(\frac{-1}{2,3 \times 10^{11}} - \left(\frac{-1}{1,5 \times 10^{11}} \right) \right)$$

$$W = \left(-0,56 \times 10^{12} + 0,86 \times 10^{12} \right)$$

$$W = 0,31 \times 10^{12} \text{ Joules}$$

Si utilizamos el teorema del trabajo y la energía:

$$W = -\Delta U$$

Entonces el cambio en la energía potencial de la sonda espacial es:

$$\Delta U = 0,31 \times 10^{12} \text{ Joules}$$

Y en general:

$$\Delta U = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

Las constantes se han omitido.

En algunos casos la evaluación de la integral de trabajo se complica o no se tienen los elementos suficientes para calcularla; pero si el campo de fuerzas es conservativo entonces se puede recurrir al, ya mencionado, **teorema de trabajo y energía** para calcular el trabajo.

Ejemplo

Batman, cuya masa es de **80,0Kg**, está colgando del extremo libre de una cuerda de **12m** de longitud, mientras que el otro extremo está fijado a la rama de un árbol. Figura 2.11. Él es capaz de hacer que la cuerda se balancee, como solo Batman lo sabe hacer, para que, con el tiempo conseguir que la cuerda gire lo suficiente y él pueda llegar a una cornisa, cuando la cuerda haga un ángulo de **60°** con la vertical. ¿Cuánto trabajo ha hecho la fuerza gravitacional sobre Batman en esta maniobra?

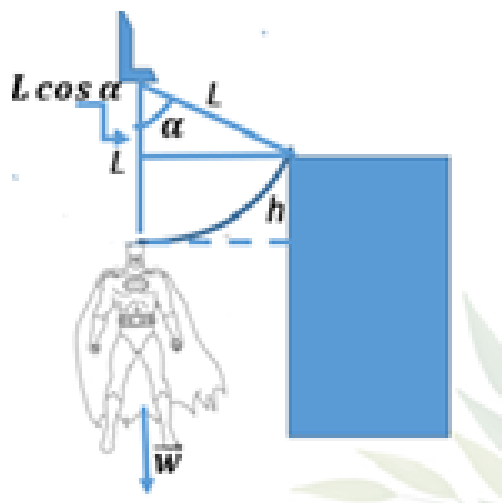


Figura 2.11: Batman para el ejemplo

Por el *teorema de trabajo y energía*:

$$W = \Delta U$$

Pero:

$$\Delta U = m_B g h - 0$$

Suponiendo el nivel cero de energía en el extremo inferior de la cuerda.

$$W = m_B g (L - L \cos \alpha)$$

$$W = (80,0 \text{Kg}) \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (12\text{m} - 12 \cos 60^\circ)$$

$$W = 4704 \text{Joules} \quad (2.24)$$

2.4.1. El campo gravitacional un Campo vectorial conservativo

Considere dos personas A y B que suben una carga tres escalones. A, la sube por las escaleras mientras que B utiliza un mecanismo de polea. ¿Cómo son los trabajos realizados? Figura 2.12.

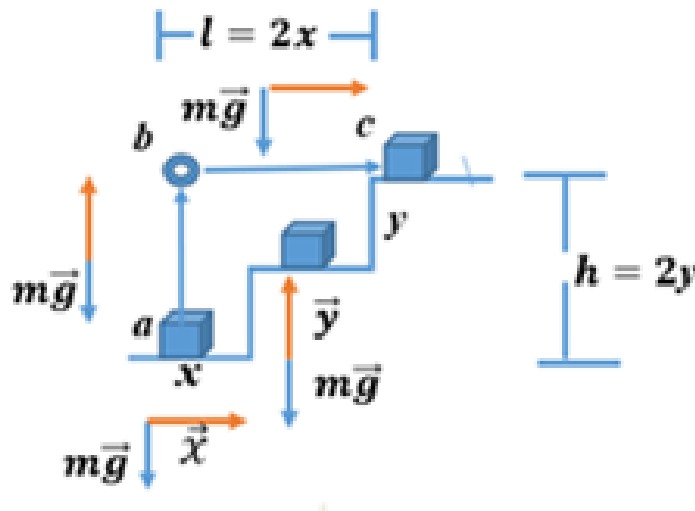


Figura 2.12: Esquema para mostrar que el campo gravitacional es un campo conservativo

Trabajo realizado por A. A, realiza cuatro trabajos.

Trabajo 1. A, desliza la masa m por la superficie del primer escalón la distancia x para dejarlo listo y subirlo al segundo escalón. Como la fuerza que actúa es la del peso de la carga (se supone que no hay rozamiento), entonces:

$$W_1 = m\vec{g} \circ \vec{x}$$

$$W_1 = mgx \cos \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = 0$$

Trabajo 2. *A*, eleva la carga una altura y (la altura del escalón) y, por tanto:

$$W_2 = m\vec{g} \circ \vec{y}$$

$$W_2 = mgy \cos \pi$$

$$W_2 = -mgy$$

Trabajo 3. *A*, realiza, en el segundo escalón, la misma acción que realizó en el primer escalón y, por tanto:

$$W_3 = 0$$

Trabajo 4. Para elevar la carga al escalón tres, *A* realiza igual trabajo al que realizó para subir la carga al segundo escalón, por tanto:

$$W_4 = -mgy$$

El trabajo realizado por *A*, es:

$$W_\tau = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$W_{\tau A} = -2mgy$$

trabajo realizado por B. *B*, realiza dos trabajos.

Trabajo 1. *B*, eleva la carga desde el primer escalón hasta la altura del tercer escalón mediante la cuerda y la polea. Es decir que *B*, eleva la carga una altura $2y$, por tanto:

$$W_1 = m\vec{g} \circ (2\vec{y})$$

$$W_1 = 2mgy \cos \pi$$

$$W_1 = -2mgy$$

Trabajo 2. *B*, lleva la carga en forma horizontal desde la polea hasta el escalón tres (El cómo pasa la carga por la polea se le preguntará a alguien que sepa), de tal manera que:

$$W_1 = m\vec{g} \circ (2\vec{x})$$

$$W_1 = 2mgx \cos \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = 0$$

Por tanto:

$$W_{TB} = -2mgy$$

Como se ve, el trabajo realizado por **A** es igual al trabajo realizado por **B**. Es decir que, el trabajo realizado por el campo vectorial gravitacional es independiente de la trayectoria por donde se realice. Se dice, por tanto, que *el campo vectorial gravitacional es un campo vectorial conservativo*.

Es decir:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \circ d\vec{r} = W_{r_2} - W_{r_1}, \vec{F} \text{ es conservativo} \quad (2.25)$$

Obsérvese que si la carga se subiera tal como lo hace **A**, pero se baja por la polea entonces el trabajo total es cero puesto que, al bajar la carga, la fuerza y la trayectoria tienen la misma dirección y por tanto ese trabajo se vuelve positivo.

Es decir:

Trabajo de subida por los escalones:

$$W_s = W_{TA} = -2mgy$$

trabajo de bajada por la polea:

$$W_B = -W_{TB} = 2mgy$$

Trabajo total:

$$W_T = W_s + W_B$$

$$W_T = -2mgy + 2mgy$$

$$W_T = 0$$

Como subir por la escalera la carga y bajarla por la polea es desplazar la carga por una *trayectoria cerrada* dentro del campo vectorial, entonces se puede decir que:

Si el trabajo realizado al desplazar un sistema por una trayectoria cerrada dentro de un campo vectorial es cero, entonces se dice que el campo vectorial es conservativo.

$$\oint \vec{F} \circ d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F} \text{ es conservativo.}$$

En física, afortunadamente, los campos vectoriales de interés son conservativos. Además, a un campo vectorial conservativo se le puede asociar un campo escalar, llamado *el potencial*, o *energía potencial*. Así, por ejemplo, los siguientes campos vectoriales son conservativos y por tanto, tiene su campo de potencial o de energía potencial:

Campo electrostático

$$\vec{E} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (2.26)$$

Energía potencial electrostática

$$U_E = -k \frac{q_1 q_2}{r} \quad (2.27)$$

Campo gravitacional

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (2.28)$$

Energía potencial gravitacional

$$U_g = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (2.29)$$

Campo de Hooke o, campo elástico

$$\vec{F}_E = -K\vec{x} \quad (2.30)$$

Energía potencial elástica

$$U_E = -\frac{1}{2}Kx^2 \quad (2.31)$$

La relación entre el *campo vectorial conservativo* y su *potencial escalar*, está mediado por el *operador gradiente* (∇), de tal forma que;

$$-\nabla U = \vec{F} \quad (2.32)$$

El *operador gradiente* está definido como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

2.5. Producto vectorial o producto cruz

El *producto vectorial* o *producto cruz* es aquel donde se operan dos vectores mediante la operación *producto vectorial* o *producto cruz* y se obtiene otro vector. El operador *producto vectorial* o *producto cruz* es $\times$.

La operación $\vec{A} \times \vec{B}$ se lee $\vec{A}$ *vectorialmente* $\vec{B}$, o $\vec{A}$ *cruz* $\vec{B}$.

Definición:

El *producto vectorial* o *producto cruz* entre el vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B}$ se define como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{cases} \text{Magnitud:} & |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha \\ \text{Dirección:} & \text{Ley de la mano derecha} \end{cases} \quad (2.33)$$

Donde los vectores deben estar posicionados como se muestra en la figura 2.13

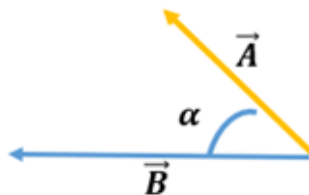


Figura 2.13: Posición de los vectores para determinar el ángulo en el producto vectorial

2.5.1. La ley de la mano derecha

Para direccionar el vector $\vec{A} \times \vec{B}$ se utiliza la *ley de la mano derecha*, la cual establece que el dedo índice de la mano derecha debe señalar en la dirección del primer vector, $\vec{A}$ en la figura 2.13, mientras que el dedo del corazón de la misma mano, debe señalar en la dirección del segundo vector, $\vec{B}$ según la figura 2.13. El vector $\vec{A} \times \vec{B}$ lo determina el dedo pulgar de la mano derecha, obviamente. En la figura 2.14 se muestra el posicionamiento de los dedos de la mano derecha.

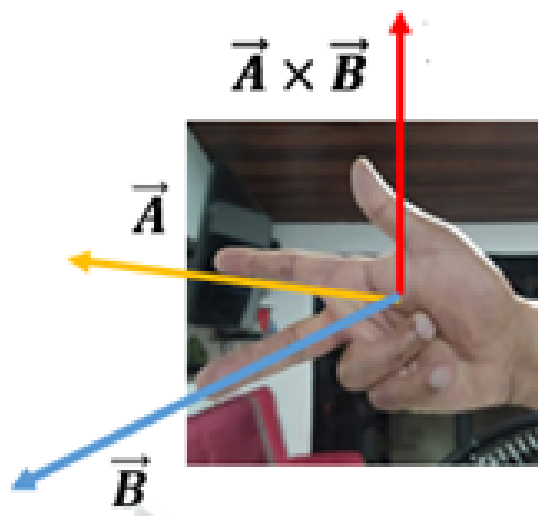


Figura 2.14: La ley de la mano derecha para $\vec{A} \times \vec{B}$

Si se hace el producto $\vec{B} \times \vec{A}$, entonces el dedo índice debe señalar en la dirección del vector $\vec{B}$ mientras que el dedo del corazón debe señalar en la dirección del vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B} \times \vec{A}$ estará direccionado por el dedo pulgar. Figura 2.15.

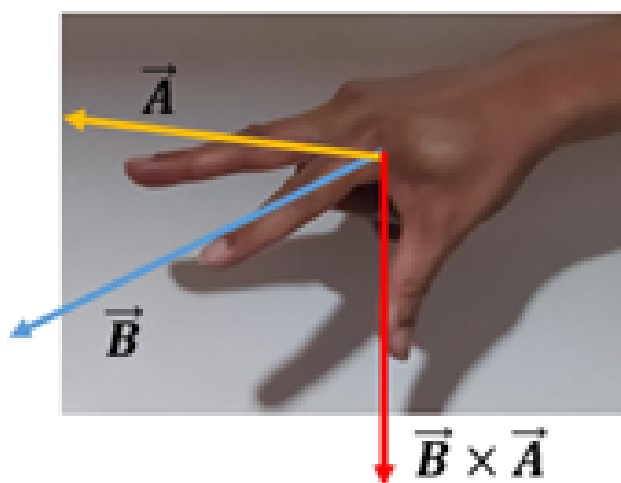


Figura 2.15: La ley de la mano derecha para $\vec{B} \times \vec{A}$

2.5.2. Otras versiones de la ley de la mano derecha

Existen versiones alternativas de la *ley de la mano derecha* que facilitan el trabajo para quienes tienen dificultades en los giros que se deben hacer a la mano derecha según lo requiera la situación.

La ley de la mano derecha utilizando los dedos palmares (índice, corazón, anular y meñique) y el dedo pulgar de la mano derecha

Para realizar el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ mediante esta versión de la mano derecha, se procede de la siguiente manera: los cuatro dedos que hemos llamado palmares se colocan en la dirección del primer vector, $\vec{A}$ en este caso, los cuales se enrollan hacia el segundo vector, $\vec{B}$, se estira el dedo pulgar el cual nos dará la dirección del vector $\vec{A} \times \vec{B}$. Figuras 2.16 y 2.17.

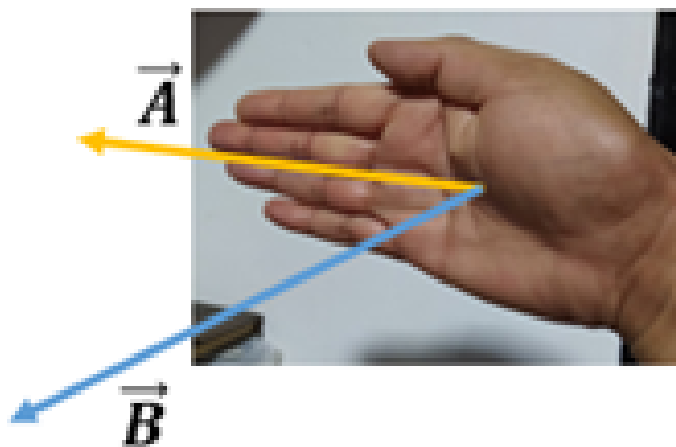


Figura 2.16: La ley de la mano derecha utilizando los dedos palmares

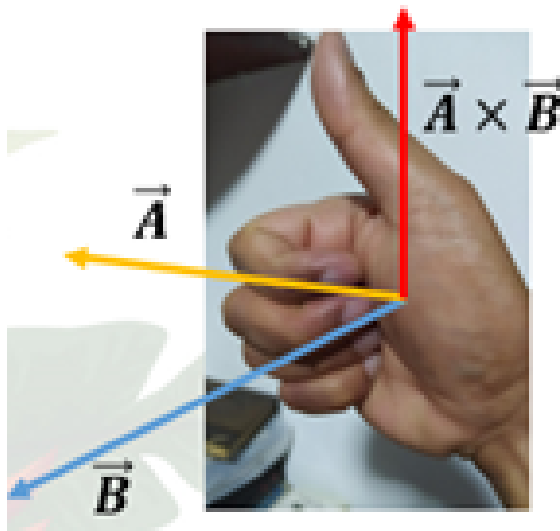


Figura 2.17: El dedo pulgar señala el producto vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Ley de la mano derecha utilizando un tornillo de rosca derecha.

Un tornillo de rosca a derecha es aquel que al girarlo en el sentido contrario a las manecillas del reloj desenroscan, los de rosca a izquierda son los que con el mismo movimiento enroscan; son los llamados tornillos de seguridad; puede encontrar uno en el conector en los cilindros de gas.

Para hacer el producto $\vec{A} \times \vec{B}$, se coloca la cabeza del tornillo sobre el plano definido por los dos vectores y en la unión de las colas de los vectores el tornillo. Se hace girar el tornillo en la dirección del primer vector, $\vec{A}$ en nuestro caso, hacia el segundo vector, $\vec{B}$, y la dirección en que avance la rosca del tornillo será la dirección del vector $\vec{A} \times \vec{B}$. Figura 2.18.

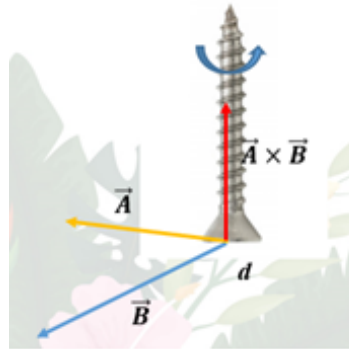


Figura 2.18: Producto vectorial utilizando un tornillo de rosca derecha

2.5.3. Visualización de producto vectorial o producto cruz en el plano de una hoja, del tablero o pantalla

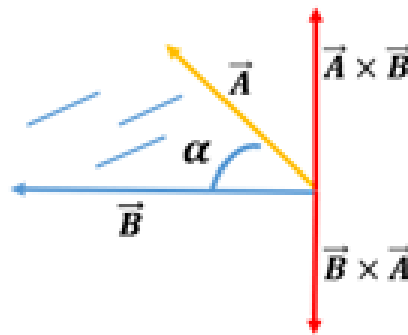


Figura 2.19: Producto vectorial cuando los vectores se encuentran en una superficie horizontal

Vista lateral

Imagínese que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se encuentran sobre la superficie de una mesa. Entonces, aplicando la ley de la mano derecha se obtienen los vectores $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$, los cuales son perpendiculares a la superficie de la mesa y por tanto perpendiculares a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

*Obsérvese que el producto cruz no es **conmutativo***

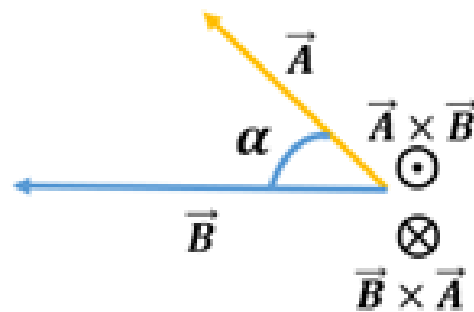


Figura 2.20: Producto vectorial cuando los vectores se encuentran en una superficie vertical

Vista frontal

Imagínese ahora que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se encuentran en el plano de la página, del tablero o de la pantalla. Como no se puede dibujar un vector perpendicular al plano de la página, del tablero o de la pantalla, entonces se ha convenido utilizar el símbolo $\odot$ para un vector que sale perpendicularmente del plano de la página, del tablero o de la pantalla y $\otimes$ para un vector que entra perpendicularmente al plano de la página, del tablero o de la pantalla.

Ejemplo

Considere que se necesita colocar una viga, de longitud L , que debe soportar dos cargas en sus extremos, ¿Dónde debe soportarse la viga con una columna para que no caiga? (Desprecie el peso de la viga).

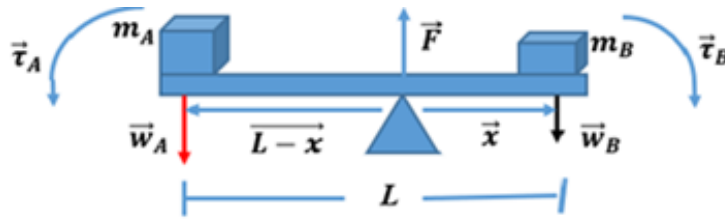


Figura 2.21: Columna soportando una viga que a la vez soporta dos cargas.

Una de las cantidades físicas definida mediante el producto cruz es el **torque** o **momento de torsión** $\vec{\tau}$, el cual es el responsable de producir rotaciones en el sistema. Se define como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Donde $\vec{r}$ es el brazo de giro o brazo de aplicación de la fuerza $\vec{F}$.

Obsérvese que las unidades de $\vec{\tau}$ en el sistema internacional son:

$$[\vec{\tau}]_{S.I.} = \text{metro Newton}$$

O también:

$$[\vec{\tau}]_{S.I.} = \text{Newton metro}$$

Pero no es el **Joules** que es la unidad de energía; es decir la unidad del torque no tiene denominación especial.

Las condiciones para el equilibrio de la viga son:

Condición de las fuerzas

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Condición de los torques

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0}$$

Tales condiciones fueron formuladas por *Arquímedes*, por medio de siete postulados y quince proposiciones, como las leyes de las palancas. Hoy en día, se conocen como *condiciones de equilibrio para el cuerpo rígido*.

Obsérvese que para el equilibrio de una partícula basta con la condición de las fuerzas

La primera condición nos dice simplemente que la columna para no partirse debe ejercer sobre la viga, como mínimo, una fuerza igual a la suma de las dos cargas. Esta condición constituye la condición para el equilibrio de una partícula.

La segunda condición nos dice que las cargas producen sobre la viga rotaciones en sentidos contrarios. Ello implica que los torques producidos por las cargas deben tener direcciones opuestas e igual magnitud. Es decir:

$$\vec{F} + \vec{w}_A + \vec{w}_B = 0$$

$$\vec{\tau}_A + \vec{\tau}_B = 0$$

Por tanto

$$\tau_A = \tau_B$$

$$xw_A \sin 90^\circ = (L - x) w_B \sin 90^\circ$$

$$xw_A = (L - x) w_B$$

$$xw_A = LW_B - xw_B$$

$$xw_A + xw_B = LW_B$$

$$x(w_A + W_B) = Lw_B$$

$$x = \frac{Lw_b}{w_A + w_B}$$

$$x = \frac{Lm_B g}{m_A g + m_B g}$$

$$x = \frac{Lm_B}{m_A + m_B}$$

Es decir que, la columna debe colocarse a una distancia

$$x = \frac{Lm_B}{m_A + m_B}$$

de la carga A . Obsérvese que x se conoce puesto que se suponen conocidas las masas de las cargas y la longitud de la viga.

2.5.4. Las leyes de las palancas según Arquímedes

Otro gran griego de la Antigüedad, que vivió un siglo después de la época de Aristóteles fue Arquímedes, padre de la ciencia mecánica, que nació en Siracusa, capital de la colonia griega de Sicilia. Como hijo de un astrónomo, se interesó muy pronto por las matemáticas, en las que adquirió una gran destreza y en el transcurso de su vida hizo una serie de contribuciones muy importantes en las diferentes ramas de la matemática. Su obra más importante en el dominio de la matemática pura fue el descubrimiento de la relación entre la superficie y el volumen de una esfera y el cilindro que la circunscribe; en efecto, de acuerdo con su deseo, su tumba está señalada por una esfera inscrita en un cilindro. En su libro titulado *Psammites* (o calculadores de arena) expone el método de escribir números muy largos dando a cada cifra un “orden” diferente según su posición y aplicándolo al problema de escribir el número de granos de arena contenidos en una esfera del tamaño de la Tierra.

En su famoso libro *Sobre el equilibrio de las superficies (en dos volúmenes)* desarrolla las leyes de la palanca y discute el problema de encontrar el centro de gravedad de cualquier cuerpo dado. A un lector moderno, el estilo con que Arquímedes escribía le parece más bien pesado y prolijo, semejante en muchos respectos al estilo de los libros de geometría de Euclides. De hecho, en la época de Arquímedes, la matemática griega estaba limitada casi exclusivamente a la geometría, porque el álgebra fue inventada mucho después por los árabes. Así, en diversas demostraciones en el campo de la mecánica y otras ramas de la física se valía de figuras geométricas más bien que formulando, como hacemos ahora, ecuaciones algebraicas. Como en la Geometría de Euclides, sobre la cual muchas veces un estudiante ha sudado en sus días escolares, Arquímedes formulaba las leyes fundamentales de la “estática” (es decir, el estudio del equilibrio) comenzando por formular los “postulados” y derivando de ellos cierto número de “proposiciones”. Reproducimos el comienzo del primer volumen:

1. *Pesos iguales a igual distancia están en equilibrio y pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso que está a mayor distancia.*
2. *Si estando los pesos a cierta distancia y en equilibrio, se añade algo a uno de ellos no hay equilibrio, sino que se 'inclinan hacia aquel al cual se ha añadido algo.*
3. Análogamente, si se quita algo a uno de los pesos, no están en equilibrio, si que se inclinan hacia el peso del que no se ha quitado nada.
4. Si figuras planas iguales y similares coinciden cuando se superpone una a otra, sus centros de gravedad también coinciden.
5. Si las figuras son desiguales pero similares, sus centros de gravedad estarán situados similarmente. Entiendo por puntos situados similarmente en relación con figuras similares, puntos tales que, si se trazan, líneas a su través a los ángulos iguales, resultan ángulos iguales con los lados correspondientes.
6. Si dos pesos a cierta distancia están en equilibrio, otros dos pesos iguales a ellos estarán también en equilibrio a las mismas distancias. (¿No está claro?)
7. En una figura cuyo perímetro es cóncavo en la misma dirección, el centro de gravedad debe estar dentro de la figura.

A estos postulados siguen quince proposiciones derivadas de ellos por directos argumentos lógicos. Damos aquí las primeras cinco proposiciones, omitiendo su prueba y citamos las pruebas exactas de la sexta proposición que implica la ley fundamental de la palanca.

Proposiciones

1. *Pesos que se equilibran a igual distancia, son iguales.*
2. *Pesos desiguales a igual distancia no se equilibrarán, sino que se inclinarán hacia el peso mayor.*
3. *Pesos desiguales a distancias desiguales se equilibrarán (o más bien pueden equilibrarse) cuando el peso mayor está a menor distancia.*
4. *Si dos pesos iguales no tienen el mismo centro de gravedad, el centro gravedad de los dos juntos es el punto medio de la línea que une sus centros gravedad.*
5. *Si tres pesos iguales tienen sus centros de gravedad en línea recta a distancias iguales, el centro de gravedad del sistema coincidirá con el del peso del medio.*

Gamow, George. Biografía de la física. Biblioteca general Salvat.

Taller 3

TRABAJO Y ENERGÍA

(PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO)

1. Un granjero engancha su tractor a un trineo cargado con leña y lo arrastra $20m$ sobre el suelo horizontal. El peso total del trineo y la carga es de $14700N$. El tractor ejerce una fuerza constante de $5000N$ a $36,9^\circ$ sobre la horizontal. Una fuerza de fricción de $3500N$ se opone al movimiento del trineo. Calcule el trabajo realizado por cada fuerza que actúa sobre el trineo y el trabajo total de todas las fuerzas.

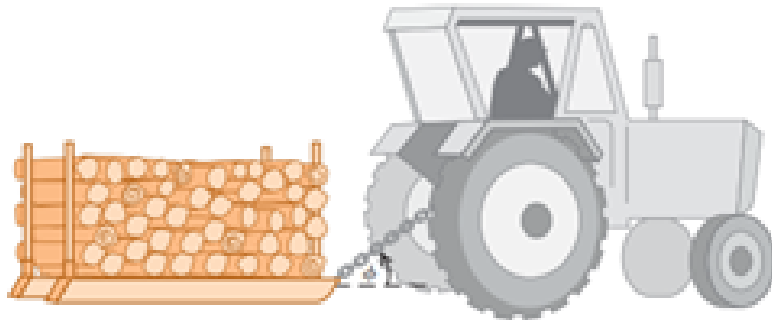


Figura 2.22: Granjero arrastrando con tractor una carga.

2. Una mujer que pesa $600N$ se sube a una báscula que contiene un resorte rígido. En equilibrio. El resorte se comprime $1,0cm$ bajo su peso. Calcule la constante de fuerza del resorte y el trabajo total efectuado sobre él durante la compresión.

3. En un día de campo familiar, le piden a usted empujar a su odioso primo Morton en un columpio. El peso de Morton es w , la longitud de las cadenas es R , y usted lo empuja hasta que las cadenas forman un ángulo θ_0 con la vertical. Para ello, usted ejerce una fuerza horizontal variable $\vec{F}$ que comienza en cero y aumenta gradualmente apenas lo suficiente para que Morton y el columpio se muevan lentamente y permanezcan casi en equilibrio. ¿Qué trabajo total realizan todas las fuerzas sobre Morton? ¿Qué trabajo realiza la tensión T en las cadenas? ¿Qué trabajo realiza usted aplicando la fuerza $\vec{F}$? ¿Qué trabajo hace la gravedad sobre Morton?. (Ignore el peso de las cadenas y el asiento).

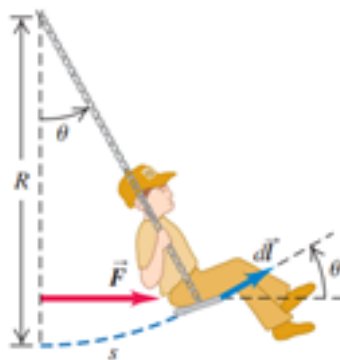


Figura 2.23: El primo Morton.

4. Un viejo cubo de roble con masa de $6,75\text{Kg}$ cuelga en un pozo del extremo de una cuerda, que pasa sobre una polea sin fricción en la parte superior del pozo, y usted tira de la cuerda horizontalmente del extremo de la cuerda para levantar el cubo lentamente $4,00\text{m}$.
- ¿Cuánto trabajo efectúa usted sobre el cubo al subirlo?
 - ¿Cuánta fuerza gravitacional actúa sobre el cubo?
 - ¿Qué trabajo total se realiza sobre el cubo?
5. Un obrero empuja horizontalmente una caja de 300Kg una distancia de $4,5\text{m}$ en un piso plano. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y la caja es de $0,25$.
- ¿Qué magnitud de fuerza debe aplicar el obrero?
 - ¿Cuánto trabajo realiza dicha fuerza sobre la caja?

- c) ¿Cuánto trabajo efectúa la fricción sobre la caja?
 - d) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza normal sobre la caja? ¿Y la gravedad?
 - e) ¿Qué trabajo total se realiza sobre la caja?
6. Un pintor de **75,0Kg** sube por una escalera de **2,75m** que está inclinada contra una pared vertical. La escalera forma un ángulo de **30°** con la pared.
- a) ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad sobre el pintor?
 - b) ¿La respuesta al inciso a) depende de si el pintor sube a rapidez constante o de si acelera hacia arriba de la escalera?
7. Un bateador golpea una pelota de béisbol con masa de **0,145Kg** y la lanza hacia arriba con rapidez inicial de **250m/s**.
- a) ¿Cuánto trabajo habrá realizado la gravedad sobre la pelota cuando esta alcanza una altura de **20,0m** sobre el bate?
 - b) Use el teorema trabajo - energía para calcular la rapidez de la pelota a esa altura. Ignore la resistencia del aire.
 - c) ¿La respuesta al inciso b) depende de si la pelota se mueve hacia arriba o hacia abajo cuando está a la altura de **20,0m**?
8. Se requiere un trabajo de **12,0J** para estirar un resorte de **3,0cm** respecto a su longitud no estirada.
- a) ¿Cuál es la constante de fuerza de este resorte?
 - b) ¿Qué fuerza se necesita para estirar **3,00cm** el resorte desde su longitud no estirada?
 - c) ¿Cuánto trabajo debe efectuarse para comprimir ese resorte **4,00cm** respecto a su longitud no estirada, y qué fuerza se necesita para estirarlo esta distancia?
9. Un objeto es atraído hacia el origen con una fuerza dada por $F_x = -k/x^2$. (Las fuerzas gravitacionales y eléctricas tienen esta dependencia de la distancia).
- a) Calcule el trabajo realizado por la fuerza F_x cuando el objeto se mueve en la dirección x de x_1 a x_2 . Si $x_2 > x_1$, ¿el trabajo hecho por F_x es positivo o negativo?

- b) La otra fuerza que actúa sobre el objeto es la que usted ejerce con la mano para moverlo lentamente x_1 a x_2 , ¿Qué tanto trabajo efectúa usted? Si $x_2 > x_1$, ¿el trabajo que usted hace es positivo o negativo?
10. Imagine que su primo Morton baja en patineta por una rampa curva en un parque. Tratando a Morton y a su patineta como una partícula, ésta describe un cuarto de círculo de radio $R = 3,00m$. La masa total de Morton y su patineta es de $25,0Kg$. Él parte del reposo y no hay fricción.
- a) Calcule su rapidez en la base de la rampa.
- b) Obtenga la fuerza normal que actúa sobre él en la base de la rampa.

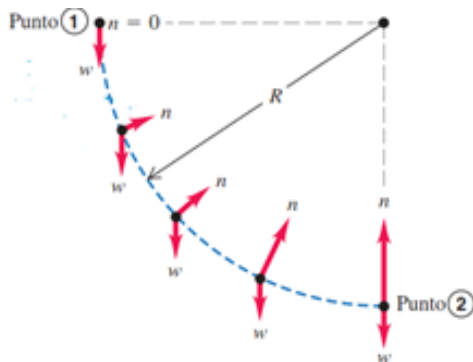


Figura 2.24: Esquema del deslizamiento del primo Morton en una rampa curva.

TALLER 4

TORQUE Y MOMENTO ANGULAR

PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ

1. Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, ensarta un tramo de tubo en el mango de sus llaves de tuercas y aplica todo su peso de **900N** al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de **0,80m**, y el mango y el tubo forman un ángulo de **19°** con la horizontal. Calcule la magnitud y la dirección del torque que el plomero aplica en torno al centro de la junta.

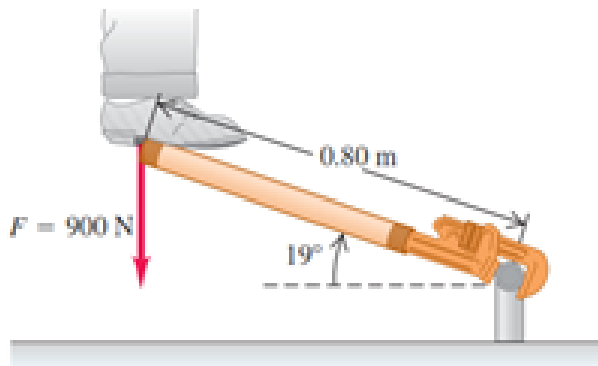


Figura 2.25: Cómo aflojar una junta.

2. Calcule el torque (magnitud y dirección) alrededor del punto **O** debido a la fuerza $\vec{F}$ en cada una de las situaciones mostradas. En todos los casos, la fuerza $\vec{F}$ y la varilla están en el plano de la página, la varilla mide **4,00m** de largo y la fuerza tiene magnitud $F = 10,0\text{N}$.



Figura 2.26: Torque para diversas posiciones de la fuerza y el brazo.

3. Una piedra cuelga del extremo libre de un cable enrollado en el borde exterior de una polea. La polea es un disco uniforme con masa de **10,0Kg** y **50,0cm** de radio, que gira sobre cojinetes sin fricción. Se determina que la piedra recorre **12,6m** en los primeros **3,00sg** partiendo del reposo. Calcule

- la masa de la piedra y
- la tensión en el cable.

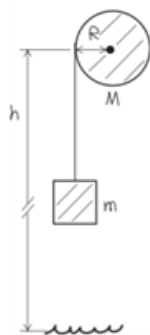


Figura 2.27: Sistema masa polea.

4. Una piedra de afilar en forma de disco sólido con **0,520m** de diámetro y masa de **50Kg** gira a **850rev/min**. Usted presiona un hacha contra el borde de la piedra con una fuerza normal de **160N** y la piedra se detiene en **7,50sg**. Calcule el coeficiente de fricción entre el hacha y la piedra. Ignore la fricción de los cojinetes.

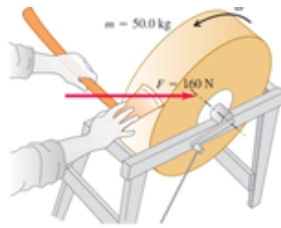


Figura 2.28: Piedra de afilar

5. El volante de un motor tiene momento de inercia de $2,50 \text{ Kg m}^2$ alrededor de un eje de rotación. ¿Qué torque constante se requiere para que alcance una rapidez angular de 400 rev/min en $8,00 \text{ sg}$, partiendo del reposo?
6. Una mujer con masa de 50 Kg está parada en el borde de un disco grande, con masa de 110 Kg y radio de $4,0 \text{ m}$, que gira a $0,50 \text{ rev/seg}$ alrededor de un eje que pasa por su centro. Calcule la magnitud del momento angular total del sistema mujer disco. Suponga que la mujer puede tratarse como un punto.
7. Una piedra de $2,00 \text{ Kg}$ tiene una velocidad horizontal con magnitud de $12,0 \text{ m/sg}$ cuando está en el punto P de la figura.
 - a) ¿Qué momento angular (magnitud y dirección) tiene con respecto a O en ese instante?
 - b) Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre la piedra es su peso, calcule la rapidez del cambio (magnitud y dirección) de su momento angular en ese instante.

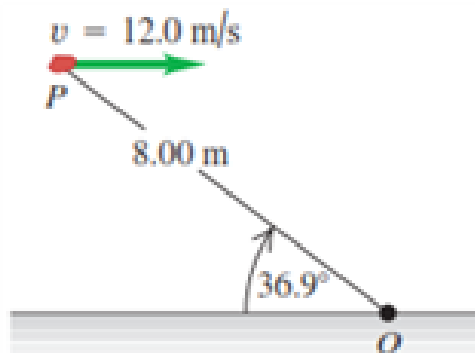


Figura 2.29: Momento angular de una piedra lanzada horizontalmente

8. Los brazos estirados de un patinador que prepara un giro pueden considerarse como una varilla delgada que pivotea sobre un eje que pasa por su centro. Cuando los brazos se juntan al cuerpo para ejecutar el giro, se pueden considerar como un cilindro hueco de pared delgada. Los brazos y las manos tienen una masa combinada de $8,0\text{Kg}$; estirados abarcan $1,8\text{m}$; Y encogidos, forman un cilindro con 25cm de radio. El momento de inercia del resto del cuerpo alrededor del eje de rotación es constante e igual a $0,40\text{Kg m}^2$. Si la rapidez angular original del patinador es de $0,40\text{rev/s}$, ¿cuál es la rapidez angular final?



Figura 2.30: Patinador

9. Calcule la magnitud del momento angular del segundero de un reloj alrededor de un eje que pasa por el centro de la carátula, si tal manecilla tiene una longitud de $15,0\text{cm}$ y masa de $6,00\text{gr}$. Trate la manecilla como una varilla delgada que gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo.
10. Una puerta de madera sólida de $1,00\text{m}$ de ancho y $2,00\text{m}$ de alto tiene las bisagras en un lado y una masa de $40,0\text{Kg}$. La puerta, que inicialmente está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un puñado de lodo pegajoso con masa de $0,500\text{Kg}$ que viaja en dirección perpendicular a la puerta a $12,0\text{m/s}$ justo antes del impacto. Calcular la rapidez angular final de la puerta. ¿Es apreciable la aportación del lodo al momento de inercia?

UNIDAD 3

VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS

3.1. Vectores en el plano o vectores en R^2

Si se utilizan las coordenadas que *René Descartes* (1596-1650) estableció en 1619 y que hoy se conocen como coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares, el plano, R^2 , queda dividido en cuatro partes, llamadas cuadrantes, y que se numeran en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj, figura 3.1.

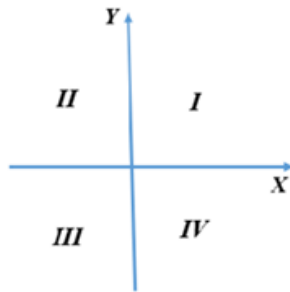


Figura 3.1: Los cuadrantes del plano cartesiano

Se puede expresar el vector que posiciona un punto del plano mediante el par de números correspondientes al punto, es decir, por medio de sus coordenadas.

Por ejemplo, figura 3.2, el vector $\vec{A}$ posiciona el punto (a, b) , por tanto, se puede escribir el vector $\vec{A}$ como:

$$\vec{A} = (a, b) \quad (3.1)$$

La dirección del vector $\vec{A}$ se toma como el ángulo positivo α y se expresa como

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (3.2)$$

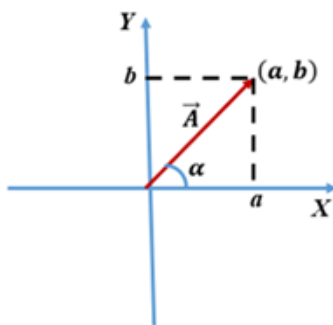


Figura 3.2: El vector A posicionando el punto (a, b) en el plano cartesiano.

La magnitud del vector $\vec{A}$ se obtienen mediante el *teorema de Pitágoras*:

$$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.3)$$

Recuérdese que:

1. La cantidad a medida sobre el eje X , se llama la abscisa del punto.

2. La cantidad b medida sobre el eje Y , se llama la ordenada del punto.
3. La pareja de números reales (a, b) se llama las coordenadas del punto.
4. Un ángulo positivo se define como el ángulo medido en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj y a partir del eje positivo de las X

Se han definido vectores unitarios sobre cada uno de los ejes, Figura 3.3. Sobre el eje de las X se ha definido el vector unitario $\hat{i}$, que se lee vector unitario i . Sobre el eje Y se define el vector $\hat{j}$ que se lee vector unitario jota.

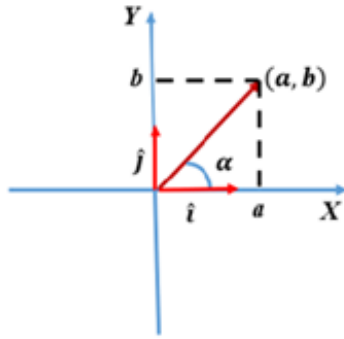


Figura 3.3: Los vectores unitarios rectangulares o cartesianos.

Con dichos vectores el vector $\vec{A}$ se escribe como;

$$\vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j} \quad (3.4)$$

Sin embargo, su dirección sigue siendo:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (3.5)$$

Y su magnitud:

$$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.6)$$

Ejemplo

Escribir el vector $\vec{C} = (3, 5)$ en términos de los vectores unitarios y hallar su magnitud y dirección. Ubicarlo en el plano.

El vector $\vec{C} = (3, 5)$ puede escribirse en términos de los vectores unitarios como:

$$\vec{C} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$$

Su magnitud es:

$$|\vec{C}| = \sqrt{3^2 + 5^2}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{34}$$

Su dirección es:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{5}{3}$$

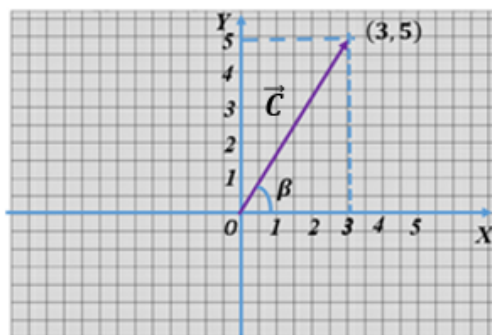


Figura 3.4: El vector $\vec{C}$ igual a la pareja ordenada (a, b)

Ejemplo

Dibujar en el plano el vector $\vec{D} = -2\hat{i} + 2\hat{j}$, hallar su magnitud, su dirección y escribirlo como un par coordenado.

La magnitud del vector $\vec{D}$ es:

$$|\vec{D}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$$

$$|\vec{D}| = \sqrt{8}$$

El vector $\vec{D}$ escrito como un par coordenado es:

$$\vec{D} = (-2, 2)$$

La dirección del vector $\vec{D}$ es:

$$\delta = \tan^{-1} \frac{2}{(-2)}$$

$$\delta = \tan^{-1}(-1)$$

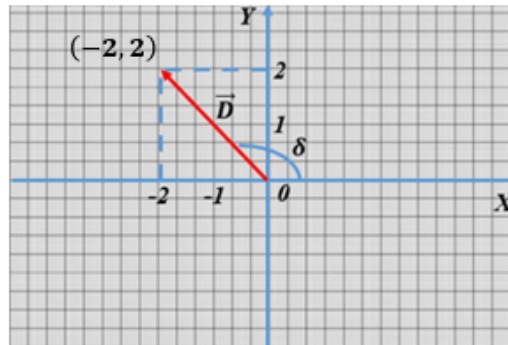


Figura 3.5: El vector $\vec{D}$ igual al par ordenado $(-2,2)$

Pero consultada la calculadora, se tiene que:

$$\delta = -45^\circ$$

Si se observa la figura 3.6, la calculadora ubica el vector $\vec{D}$ en el cuarto cuadrante, pero las coordenadas del vector $\vec{D}$ lo ubican en el primer cuadrante como se observa en la figura 3.5.

Es que si bien

$$\frac{-2}{2} = \frac{2}{-2} = -1 \quad (3.7)$$

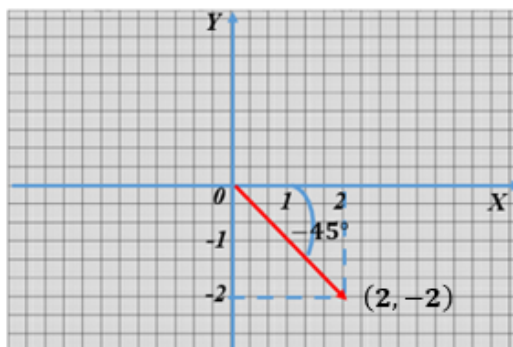


Figura 3.6: La información obtenida desde la calculadora

Lo cierto es que los dos puntos

$$(-2, 2) \text{ y } (2, -2) \quad (3.8)$$

están en cuadrantes diferentes; segundo y cuarto cuadrante respectivamente. Pero como la calculadora está programada para trabajar con funciones, entonces sus funciones trigonométricas están restringidas a los primeros 90° , es decir, al primer cuadrante.

Conclusión:

Debe decirse que la dirección del vector $\vec{D}$ es $\delta = 135^\circ$

3.2. Vectores en el espacio o vectores en R^3

Los ejes cartesianos para representar el espacio R^3 , se obtiene mediante la intersección de tres planos mutuamente perpendiculares. Dicha disposición divide el espacio en ocho partes llamadas octantes, como se puede apreciar en la figura 3.7. Si se quiere, imagine el salón de clase y los siete salones que limitan (o pueden limitar) con él.

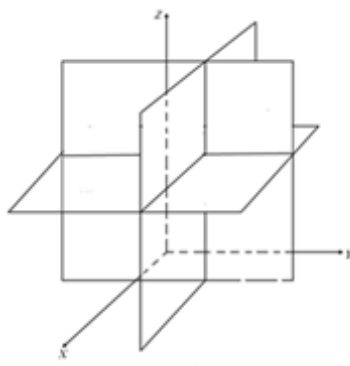


Figura 3.7: Los octantes del espacio cartesiano.

Como la intersección de dos planos es una recta, se tiene:

La intersección del plano $X - Z$ con el plano $Y - Z$ es el eje Z .

La intersección del plano $X - Z$ con el plano $X - Y$ es el eje X .

La intersección del plano $Z - Y$ con el plano $X - Y$ es el eje Y .

La intersección de los tres planos es un punto, y se le llama el origen.

En la figura 3.8, se muestra el vector $\vec{A}$ que posiciona el punto P y que se encuentra en el primer octante. Es bueno tener en cuenta la proyección del vector hacia el eje Z , pues existe la tendencia de proyectarlo paralelo al eje Y , es decir, proyectarlo 90° .

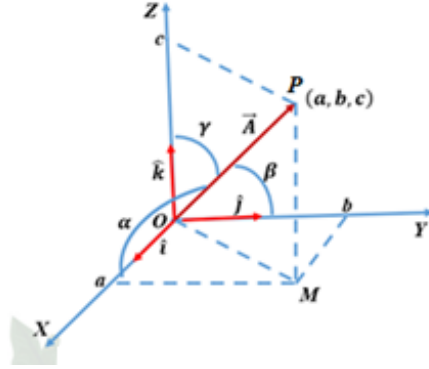


Figura 3.8: El vector A posicionando el punto $P(a, b, c)$ en el espacio cartesiano

En R^3 , los vectores pueden representarse como la terna de números reales que determinan las coordenadas del punto que el vector está posicionando.

Por tanto;

$$\vec{A} = (a, b, c) \quad (3.9)$$

La magnitud del vector $\vec{A}$ se obtiene mediante una doble aplicación del teorema de Pitágoras.

En el triángulo OaM , el cual es rectángulo en a , el segmento de recta $\overline{OM}$ es la hipotenusa, y, por tanto:

$$(\overline{OM})^2 = (\overline{Oa})^2 + (\overline{aM})^2 \quad (3.10)$$

O simplemente:

$$(\overline{OM})^2 = a^2 + b^2 \quad (3.11)$$

Ya que:

$$\overline{aM} = \overline{ob} \quad (3.12)$$

Ahora, en el triángulo **OMP** rectángulo en **M**, el segmento de recta $\overline{OP}$ es la hipotenusa, y, por tanto

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OM})^2 + (\overline{MP})^2 \quad (3.13)$$

O simplemente:

$$(\overline{OP})^2 = a^2 + b^2 + z^2 \quad (3.14)$$

Es decir que:

$$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2 + z^2} \quad (3.15)$$

Obviamente el vector $\vec{A}$ se puede escribir en termino de los vectores unitarios como:

$$\vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \quad (3.16)$$

Donde se ha definido el vector unitario $\hat{k}$, sobre el eje **Z**.

Mientras que en el plano solo se necesita un solo ángulo para direccionar un vector, en el espacio se necesitan tres ángulos.

1. El ángulo que forma el vector con el eje **X**. α en la figura 3.8
2. El ángulo que forma el vector con el eje **Y**. β en la figura 3.8
3. El ángulo que forma el vector con el eje **Z**. γ en la figura 3.8

Los cosenos de esos tres ángulos se llaman *cosenos directores* y cumplen con una propiedad importante: *la suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a uno.*

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (3.17)$$

Veamos:

Calculando las proyecciones del vector $\vec{A}$ sobre cada uno de los ejes, tenemos:

$$a = \vec{A} \circ \hat{i} \quad a = |\vec{A}| \cos \alpha \quad (3.18)$$

$$b = \vec{A} \circ \hat{j} \quad b = |\vec{A}| \cos \beta \quad (3.19)$$

$$c = \vec{A} \circ \hat{k} \quad c = |\vec{A}| \cos \gamma \quad (3.20)$$

Recuérdese que la proyección de un vector en alguna dirección se puede calcular mediante el producto punto entre el vector y un vector unitario construido en la dirección en que se va a proyectar.

Elevando al cuadrado las ecuaciones de la derecha, se tiene:

$$a^2 = |\vec{A}|^2 \cos^2 \alpha \quad (3.21)$$

$$b^2 = |\vec{A}|^2 \cos^2 \beta \quad (3.22)$$

$$c^2 = |\vec{A}|^2 \cos^2 \gamma \quad (3.23)$$

Sumando miembro a miembro se tiene:

$$a^2 + b^2 + c^2 = |\vec{A}|^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \quad (3.24)$$

Por tanto:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{|\vec{A}|^2} = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \quad (3.25)$$

Pero:

$$a^2 + b^2 + c^2 = |\vec{A}|^2 \quad (3.26)$$

Por lo que se llega a:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (3.27)$$

3.3. Suma de vectores en sistemas coordenados.

Hay que notar que un vector en $\mathbf{R}^2$ puede tratarse como un vector en $\mathbf{R}^3$. En efecto, el vector:

$$\vec{P} = 3\hat{i} - 5\hat{k} \quad (3.28)$$

Se puede completar como:

$$\vec{P} = 3\hat{i} + 0\hat{j} - 5\hat{k} \quad (3.29)$$

Lo que pasa es que el vector $\vec{P}$ es un vector que se encuentra en el plano $X - Z$.

Con la aclaración anterior, lo que se diga de la suma y las demás operaciones de vectores en $\vec{\mathbf{R}}^3$, es válido para vectores en $\vec{\mathbf{R}}^2$

Ejemplo

Sumar los vectores

$$\vec{M} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} \quad \vec{N} = -3\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k} \quad \vec{Q} = 2\hat{i} - 8\hat{k}$$

Y hallar su magnitud y sus cosenos directores.

Solución

Llámesese $\vec{R}$ al vector resultante de la suma de los vectores $\vec{M}$, $\vec{N}$ y $\vec{Q}$.

$$\vec{R} = (5\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + (-3\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k}) + (2\hat{i} - 8\hat{k})$$

Sumando componente a componente, se tiene:

$$\vec{R} = (5 - 3 + 2)\hat{i} + (-2 - 7 + 0)\hat{j} + (6 + 4 - 8)\hat{k}$$

$$\vec{R} = 4\hat{i} - 9\hat{j} + 2\hat{k}$$

También pudo haberse escrito como:

$$\vec{R} = ((5 - 3 + 2), (-2 - 7 + 0), (6 + 4 - 8)) \quad (3.30)$$

$$\vec{R} = (4, -9, 2) \quad (3.31)$$

La magnitud del vector $\vec{R}$ es:

$$|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + (-9)^2 + 2^2}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{101}$$

En cuanto a los cosenos directores se tiene:

$$a = \vec{A} \circ \hat{i}$$

$$a = |\vec{A}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{A}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{101}}$$

$$b = \vec{A} \circ \hat{j}$$

$$b = |\vec{A}| \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{b}{|\vec{A}|}$$

$$\cos \beta = \frac{-9}{\sqrt{101}}$$

$$c = \vec{A} \circ \hat{k}$$

$$c = |\vec{A}| \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{101}}$$

3.4. Productos con vectores en sistemas coordenados

3.4.1. Producto de un vector por un escalar.

Para multiplicar un vector por un escalar, simplemente se multiplica cada componente del vector por el escalar. Recuérdese que para las presentes notas de clase los escalares están en el conjunto de los números reales, $\mathbf{R}$.

Si

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (3.32)$$

Y m un escalar, entonces

$$m\vec{A} = mA_x \hat{i} + mA_y \hat{j} + mA_z \hat{k} \quad (3.33)$$

El producto de un vector por un escalar cumple con dos formas de ley distributiva:

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B} \quad (3.34)$$

Y

$$(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A} \quad (3.35)$$

Ejemplo

Sea el vector

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 7\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}$$

Y $m = 4$ un escalar. Hallar el vector $4\vec{A}$.

$$4\vec{A} = 4 \left(3\hat{i} - 7\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k} \right)$$

$$4\vec{A} = 12\hat{i} - 28\hat{j} + 6\hat{k}$$

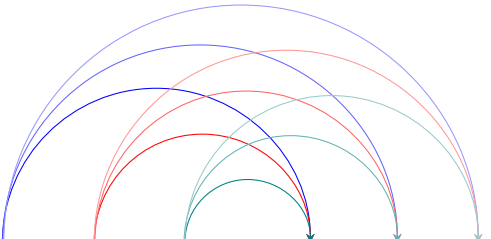
3.4. PRODUCTOS CON VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS 83

3.4.2. Producto escalar o producto punto entre dos vectores

Sean los vectores

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \quad (3.36)$$

Como por lo general los productos son distributivos con la suma, entonces se puede aplicar ley distributiva, entonces:



$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A}_x\hat{i} + \vec{A}_y\hat{j} + \vec{A}_z\hat{k}) \circ (\vec{B}_x\hat{i} + \vec{B}_y\hat{j} + \vec{B}_z\hat{k}) \quad (3.37)$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \vec{A} \circ \vec{B} = & A_x B_x \hat{i} \circ \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \circ \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \circ \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \circ \hat{i} \\ & + A_y B_y \hat{j} \circ \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \circ \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \circ \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \circ \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \circ \hat{k} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Puesto que

$$A_x, B_x, A_y, B_y, A_z, B_z \quad (3.39)$$

Son números reales, sus productos no presentan problema.

De tal forma que lo debe resolverse son los productos escalares o productos punto entre los vectores unitarios. Por tanto, aplicando la definición del producto punto se tiene:

$$\hat{i} \circ \hat{i} = |\hat{i}| |\hat{i}| \cos 90^\circ \quad (3.40)$$

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (3.41)$$

$$\hat{i} \circ \hat{j} = |\hat{i}| |\hat{j}| \sin \frac{\pi}{2} \quad (3.42)$$

$$\hat{i} \circ \hat{j} = 1 \times 1 \times 0 = 0 \quad (3.43)$$

De tal manera que:

$$\hat{j} \circ \hat{j} = \hat{k} \circ \hat{k} = 1 \quad (3.44)$$

$$\hat{i} \circ \hat{k} = \hat{j} \circ \hat{i} = \hat{j} \circ \hat{k} = \hat{k} \circ \hat{i} = \hat{k} \circ \hat{j} = 0 \quad (3.45)$$

Por tanto:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (3.46)$$

Ejemplo

Sean los vectores

$$\vec{P} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k} \quad \vec{Q} = -2\hat{i} + \hat{j} - 6\vec{k}$$

Hallar el producto $\vec{P} \circ \vec{Q}$.

3.4. PRODUCTOS CON VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS 85

Solución

Sin necesidad de realizar todo el procedimiento hecho anteriormente, simplemente se multiplican componentes semejantes entre sí y se suma.

$$\vec{P} \circ \vec{Q} = 3 \times (-2) + 5 \times 1 + (-2) \times (-6)$$

$$\vec{P} \circ \vec{Q} = 11$$

La pregunta es ¿11 qué?

Matemáticamente la respuesta es que el producto punto entre los dos vectores es **11**.

Pero si el vector $\vec{P}$ fuera una fuerza, por ejemplo, y el vector $\vec{Q}$ un desplazamiento, entonces el producto punto correspondería al trabajo realizado al desplazar un *sistema físico* según $\vec{Q}$ bajo la acción de la fuerza $\vec{P}$, y se diría que son **11 Joules** si el desplazamiento se encuentra medido en *metros* y la fuerza en *Newton*.

El vector proyección. En la unidad dos, donde se habló de los productos entre vectores libres, se encontró el valor de la proyección de un vector sobre otro vector mediante el producto escalar o producto punto entre vectores. Ahora se puede conocer cuál es el vector proyección de un vector sobre otro vector.

La proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ es la magnitud del vector $\vec{P}_{AB}$; es decir, $|\vec{P}_{AB}|$ o simplemente P_{AB} , la cual se halla definida como:

$$P_{AB} = \vec{A} \circ \hat{B} \quad (3.47)$$

Por tanto, el vector proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ será el vector unitario $\hat{B}$, multiplicado por la magnitud del vector proyección $\vec{P}_{AB}$, Figura 3.9

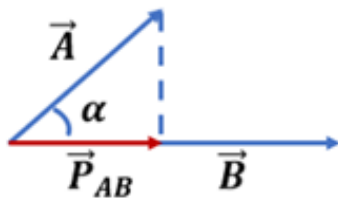


Figura 3.9: El vector proyección $\vec{P}_{AB}$ del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$

Es decir:

$$\vec{P}_{AB} = \vec{A} \circ \hat{B} \hat{B} \quad (3.48)$$

Lo que podemos escribir como:

$$\vec{P}_{AB} = \frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{B} \hat{B} \quad (3.49)$$

O si se quiere como:

$$\vec{P}_{AB} = \frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{B^2} \vec{B} \quad (3.50)$$

Ejemplo

Sean los vectores

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} \quad \vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

Hallar el vector proyección $\vec{P}_{AB}$

3.4. PRODUCTOS CON VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS 87

$$\vec{P}_{AB} = \frac{(3\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}) \circ (-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})}{(\sqrt{14})^2} (-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{P}_{AB} = \frac{-10}{14} (-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{P}_{AB} = \frac{5}{7}\hat{i} - \frac{10}{7}\hat{j} - \frac{15}{7}\hat{k}$$

3.4.3. Producto vectorial o producto cruz entre vectores

El producto vectorial o producto cruz entre vectores, se puede resolver mediante un *determinante*. Pero, ¿qué es un *determinante*?

Una *matriz* se define como un arreglo rectangular de elementos de algún conjunto. Es decir, es la disposición en filas y columnas de elementos de un conjunto. Por ejemplo, si el conjunto es el de los números reales, una *matriz* puede ser:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad (3.51)$$

Se dice entonces, que la *matriz* M es una *matriz* de orden 2×3 , dos filas y tres columnas.

Cuando una *matriz* tiene igual numero de columnas y de filas, se dice que la *matriz* es una *matriz cuadrada* y se le puede asociar un número real, el cual se llama el *determinante de la matriz*.

Por ejemplo, a la matriz N de orden 3×3 que es una *matriz cuadrada*, donde:

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.52)$$

Se le puede asociar el número real:

$$|N| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3.53)$$

El cuál es su determinante. ¿Pero de qué número se trata? La diferencia entre una *matriz* y un *determinante*, es que una *matriz* no se soluciona, solamente se transforma, mientras que un *determinante* se soluciona.

Uno de los métodos para solucionar un *determinante*, quizás el más general, se llama el *método por menores* establecido por el astrónomo, físico y matemático francés *Pierre-Simon Laplace (1749 -1827)*. Según este método el determinante se puede resolver por cualquier fila o por cualquier columna, y para ello se tiene en cuenta el *determinante de signos*:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad (3.54)$$

El *determinante* $|N|$ se resolverá por primera fila.

En primer lugar, se elimina la primera fila y la primera columna y se toma el determinante 2×2 que queda y se multiplica por el elemento común a la primera fila y la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3.55)$$

Según el determinante de signos el siguiente término es negativo eliminando la primera fila y la segunda columna, tomando el determinante 2×2 que queda y multiplicándolo por el elemento común a la primera fila y la segunda columna

3.4. PRODUCTOS CON VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS 89

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad (3.56)$$

Se repite el procedimiento con la primera fila y la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.57)$$

De tal manera que se llega a:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.58)$$

Teniendo en cuenta que un determinante 2×2 se resuelve como:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \quad (3.59)$$

Se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2((-1) \times 2 - 3 \times 1) - 1((-3) \times 2 - 3 \times 5) - 1((-3) \times 1 - (-1) \times 5) \quad (3.60)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-5) - 1(-21) - 1(2) = 9 \quad (3.61)$$

Regresando al producto vectorial, sean los vectores

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (3.62)$$

Su producto vectorial o producto cruz será:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3.63)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{k} \quad (3.64)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (3.65)$$

Ejemplo

Sean los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{B} = -4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, hallar el producto $\vec{A} \times \vec{B}$.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= ((-7(-5)) - 5 \times 3) \hat{i} - (2(-5) - 5(-4)) \hat{j} \\ &\quad + (2 \times 3 - (-7)(-4)) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 20\hat{i} - 10\hat{j} - 22\hat{k}$$

3.4. PRODUCTOS CON VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS 91

Una de las propiedades de los determinantes establece que, por cada permutación de una fila o columna que se haga en el determinante, éste cambia de signo. Por tanto:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3.66)$$

Y

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (3.67)$$

Tienen signo contrario; es decir que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (3.68)$$

Nuevamente, *el producto vectorial o producto cruz entre vectores no es conmutativo.*

3.4.4. Producto vectorial o producto cruz entre los vectores mediante la ley distributiva

El producto vectorial o producto cruz entre los vectores también puede resolverse por medio de la ley distributiva.

Sean los vectores:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (3.69)$$

Entonces, aplicando la ley distributiva se tiene:



$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A}_x \hat{i} + \vec{A}_y \hat{j} + \vec{A}_z \hat{k}) \times (\vec{B}_x \hat{i} + \vec{B}_y \hat{j} + \vec{B}_z \hat{k}) \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = & A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} \\ & + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} \\ & + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Resolviendo los productos vectoriales de los vectores unitarios, se tiene:

$$|\hat{i} \times \hat{i}| = 1 \times 1 \sin 0^\circ = 0 \quad (3.72)$$

De modo que:

$$\hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad (3.73)$$

Ahora:

$$|\hat{i} \times \hat{j}| = |\hat{i}| |\hat{j}| \sin \frac{\pi}{2} \quad (3.74)$$

$$|\hat{i} \times \hat{j}| = 1 \times 1 \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad (3.75)$$

La dirección del producto $\hat{i} \times \hat{j}$ se puede obtener por la ley de la mano derecha, pero también completando los vectores unitarios y resolviendo el determinante.

$$\hat{i} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \quad (3.76)$$

3.4. PRODUCTOS CON VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS 93

Puesto que el vector $\hat{i}$ se puede escribir como:

$$\hat{i} = \hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \quad (3.77)$$

Y el vector $\hat{j}$ como:

$$\hat{j} = 0\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k} \quad (3.78)$$

La dirección también se puede obtener teniendo en cuenta el carácter cíclico de los vectores unitarios.

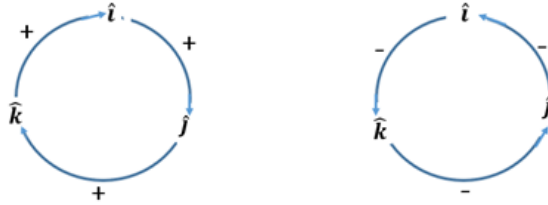


Figura 3.10: Propiedad cíclica de los vectores unitarios rectangulares

Cuando el giro se hace a derecha el producto es positivo, en caso contrario es negativo. Así que:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad (3.79)$$

Es decir que:

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \quad (3.80)$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad (3.81)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \quad (3.82)$$

De esta forma se tiene que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j} - A_y B_x \hat{k} + A_y B_z \hat{i} + A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i} \quad (3.83)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (3.84)$$

Ejemplo

Sean los vectores

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k} \quad y \quad \vec{B} = -4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

Hallar el producto de $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}) \times (-4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (2)(-4)\hat{i} \times \hat{i} + (2)(3)\hat{i} \times \hat{j} + (2)(-5)\hat{i} \times \hat{k} \\ &\quad + (-7)(-4)\hat{j} \times \hat{i} + (-7)(3)\hat{j} \times \hat{j} + (-7)(-5)\hat{j} \times \hat{k} \\ &\quad + (5)(-4)\hat{k} \times \hat{i} + (5)(3)\hat{k} \times \hat{j} + (5)(-5)\hat{k} \times \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 6\hat{k} + 10\hat{j} - 28\hat{k} + 35\hat{i} - 20\hat{j} - 15\hat{i}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-15 + 35)\hat{i} + (10 - 20)\hat{j} + (6 - 28)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 20\hat{i} - 10\hat{j} - 22\hat{k}$$

Si se observa el resultado es el mismo que el del ejemplo 3.4.3.1, pues son los dos mismos vectores.

3.4.5. Productos triples

Se llaman *Productos triples a productos punto (producto escalar) y cruz (producto vectorial) entre tres vectores y que son la forma:*

$$(\vec{A} \circ \vec{B}) \vec{C} \quad \vec{A} \circ (\vec{B} \times \vec{C}) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \quad (3.85)$$

Donde hay que tener cuidado con el orden de los productos.

Ejemplo

Sean los vectores

$$\vec{A} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} \quad \vec{B} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k} \quad \vec{C} = \hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$$

Hallar

$$\vec{A} \circ (\vec{B} \times \vec{C})$$

Obsérvese que en este producto el paréntesis es realmente innecesario, pues si se realiza primero el producto punto entonces queda el producto cruz entre un escalar y un vector lo cual no está definido. Por tanto:

$$\vec{A} \circ (\vec{B} \times \vec{C}) = (-4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \circ (3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{A} \circ (\vec{B} \times \vec{C}) = (-4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \circ (29\hat{i} - 11\hat{j} + 16\hat{k})$$

$$\vec{A} \circ (\vec{B} \times \vec{C}) = 154$$

TALLER 4.

1. En un sistema coordenado trace los siguientes vectores

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 5\hat{j} \quad \vec{B} = -3\hat{i} + 7\hat{j} \quad \vec{C} = -5\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{V} = 2\hat{i} + 2\hat{k} \quad \vec{W} = 2\hat{k} \quad \vec{U} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

2. Halle un vector (indicar el punto inicial y el punto final) con punto inicial $(P = 2, -1, 4)$ y que tenga la misma dirección que el vector $\vec{V} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$
3. Halle un vector con dirección opuesta a la del vector $\vec{W} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ y que tenga punto final $Q = (2, 0, -7)$
4. Sean $\vec{U} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\vec{V} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ $\vec{W} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

- a) Encontrar el vector $\vec{X}$ que satisface la ecuación

$$2\vec{U} - \vec{V} + \vec{X} = 7\vec{X} + \vec{W}$$

- b) Encuentre los escalares a, b, c que satisfacen la ecuación

$$a\vec{U} + b\vec{B} + c\vec{W} = 6\hat{i} + 14\hat{j} - 2\hat{k}$$

- c) $\left| 3\vec{U} - 5\vec{V} + \vec{W} \right|$

- d) $\left| \frac{1}{|\vec{W}|} \vec{W} \right|$

5. Halle todos los escalares k tales que $|k\vec{A}| = 3$ donde $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

6. Determine el número por el cual hay que multiplicar el vector no nulo $\vec{V}$, para obtener un vector $\vec{W}$ tal que
 - I. $|\vec{W}| = 5$ con $\vec{V}$ y $\vec{W}$ de igual sentido.
 - II. $|\vec{W}| = 1$ con $\vec{V}$ y $\vec{W}$ de sentido contrario
7. Calcular las longitudes de las diagonales de un paralelogramo construido con los vectores $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j}$ y $\vec{B} = 2\hat{j} + \hat{k}$
8. Dado el vector $\vec{V}$ con punto inicial $P = (5, 2, -2)$ y punto final $Q = (2, 0, 4)$
 - I. Hallar el punto medio del vector $\vec{V}$
 - II. Halle un punto sobre el vector $\vec{V}$ a una distancia de $\frac{2}{3} |\vec{V}|$ a partir del punto P.
9. Dos partículas se mueven con velocidades $\vec{V}_1 = 2\hat{i}$ y $\vec{V}_2 = 3\hat{j}$. Si en el instante $t = 0$ se encuentran en las posiciones : $x_1 = 3$; $y_1 = 0$ y $x_2 = 0$; $y_2 = -3$:
 - a) ¿Cuál es la posición de la partícula 1 con respecto a la partícula 2 en el instante $t = 0$?
 - b) ¿Cuál es la posición de la partícula 2 con respecto a la partícula 1 en el instante $t = 0$?
 - c) ¿A qué distancia se encuentran las partículas en ese instante?
 - d) Resuelva las preguntas anteriores para el instante $t = 1$.
10. Sea $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, hallar:
 - a) $(2\vec{A} + \vec{B}) \circ (\vec{A} - 2\vec{B})$
 - b) El ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$
11. Para qué valores de a $\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{B} = 2a\hat{i} + a\hat{j} - 4\hat{k}$ son perpendiculares?
12. Hallar la proyección del vector $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ sobre el vector $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$
13. Hallar un vector unitario perpendicular a

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

3.4. PRODUCTOS CON VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS 99

14. Hallar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo a lo largo de la recta que pasa por $(3, 2, -1)$ y $(2, -1, 4)$ en el campo de fuerzas dado por $\vec{F} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$
15. Efectuar los siguientes productos
 - a) $(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$
 - b) $(2\hat{i} - 4\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j})$
 - c) $(\vec{A} + 2\vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B})$ siendo $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$
16. Se aplica la fuerza $\vec{F} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ en el punto $(1, -1, 2)$. Hallar el momento de $\vec{F}$ respecto del punto $(2, -1, 3)$.
17. La velocidad angular de un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo viene dada por $\vec{\omega} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$. Hallar la velocidad lineal de un punto P del sólido cuyo vector de posición respecto de un punto del eje es $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$
18. Demostrar que:
 - a) $(\vec{A} + \vec{B}) \circ (\vec{A} - \vec{B}) = A^2 - B^2$
 - b) $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B}$
19. La inducción magnética $\vec{B}$ está definida por la ecuación de la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$. Realizando tres experimentos se encuentra si

$$\vec{V} = \hat{i} \quad \frac{\vec{F}}{q} = 2\hat{k} - 4\hat{j} \quad (3.86)$$

$$\vec{V} = \hat{j} \quad \frac{\vec{F}}{q} = 4\hat{i} - \hat{k} \quad (3.87)$$

$$\vec{V} = \hat{k} \quad \frac{\vec{F}}{q} = \hat{j} - 2\hat{i} \quad (3.88)$$

De los resultados de estos tres experimentos separados calcular la inducción magnética $\vec{B}$.

20. Una carga eléctrica q_1 moviéndose con velocidad $\vec{V}_1$ produce una inducción magnética $\vec{B}$ dada por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec{V}_1 \times \vec{r}_0}{r^2} \text{ en unidades mks.} \quad (3.89)$$

Donde $\vec{r}_0$ es el vector que va desde la carga q_1 hasta el punto en el cual $\vec{B}$ es medido (Ley de Biot-Savart).

- a) Mostrar que la fuerza magnética sobre una segunda carga q_2 , con velocidad $\vec{V}_2$, está dada por el triple producto vectorial:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{V}_2 \times (\vec{V}_1 \times \vec{r}_0) \quad (3.90)$$

- b) Escriba la correspondiente fuerza magnética $\vec{F}_1$ que q_2 ejerce sobre q_1 . Defina su vector radial unitario. Cómo son $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.
 c) Calcular $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en el caso en que q_1 y q_2 se mueven a lo largo de trayectorias paralelas.

21. Demuestre $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

22. Dados los tres vectores

$$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} \quad (3.91)$$

$$\vec{B} = \hat{j} + \hat{k} \quad (3.92)$$

$$\vec{C} = \hat{i} - \hat{k} \quad (3.93)$$

- a) Calcule el producto triple $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$. Note que $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$, da una interpretación geométrica de su resultado.
 b) Calcule $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$.

23. Hallar:

a)

$$(\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot \left[(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \right] \quad (3.94)$$

b)

$$(2\hat{i} - 3\hat{j}) \cdot \left[(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{k}) \right] \quad (3.95)$$

UNIDAD 4

VECTORES VARIABLES EN EL TIEMPO Y EL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS

4.1. Vector posición, vector velocidad y vector aceleración

Existen vectores que varían respecto a algún parámetro; en física el parámetro fundamental es el tiempo t , y el estudio de la variación de dichos vectores constituye el estudio del movimiento de una partícula, por lo menos en lo que a su parte cinemática corresponde.

El vector que varía en el tiempo recibe el nombre de *vector posición* y la curva que describe la cabeza del vector posición se llama *la trayectoria*. El vector posición es:

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (4.1)$$

t se llama *parámetro* y las ecuaciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ se llaman *ecuaciones paramétricas*.

Se define la velocidad de la partícula como la derivada temporal de la posición. Es decir:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.2)$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \left(x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k} \right) \quad (4.3)$$

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} \quad (4.4)$$

Lo que significa que:

$$\vec{v}_x = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} \quad (4.5)$$

$$\vec{v}_y = \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} \quad (4.6)$$

$$\vec{v}_z = \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} \quad (4.7)$$

En la gráfica 4.1 se muestra la velocidad de la partícula en el instante t_1 con sus correspondientes componentes en las direcciones X y Y .

Similarmente, se define la aceleración de la partícula como la variación temporal de la velocidad. Es decir:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j} + v_z(t) \hat{k} \right) \quad (4.8)$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \hat{k} \quad (4.9)$$

Lo que significa que:

$$\vec{a}_x = \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{i} \quad (4.10)$$

$$\vec{a}_y = \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{j} \quad (4.11)$$

$$\vec{a}_z = \frac{dv_z(t)}{dt} \hat{k} \quad (4.12)$$

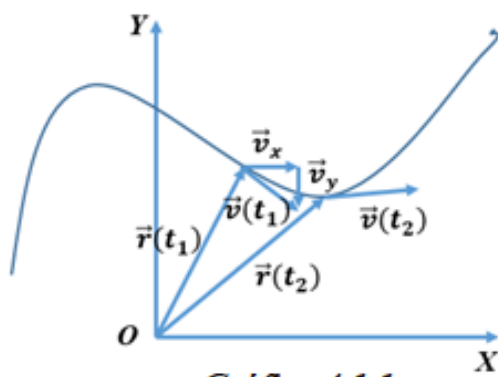


Figura 4.1: Trayectoria y velocidad tangencial de una partícula que se mueve en el plano

El hecho de poder escribir la posición, la velocidad y la aceleración en términos de sus componentes, constituye la expresión matemática del *principio de independencia de los movimientos*, enunciado por primera vez por *Galileo*, el cual establece que, *si un cuerpo se encuentra sometido a más de un movimiento simultáneamente, entonces cada movimiento se desarrolla con independencia de los demás*. Considerado al contrario nos habla de la composición de movimientos.

4.2. Movimiento unidimensional

Si el movimiento se realiza en una sola coordenada el *movimiento se dice unidimensional* y su trayectoria es una línea recta, por lo que también se dice

que es un *movimiento rectilíneo*.

4.2.1. Movimiento rectilíneo uniforme

Si el movimiento, además se realiza con velocidad constante, entonces se dice que el movimiento es *rectilíneo uniforme*. Supóngase que el movimiento se realiza en la dirección X , Gráfica 4.2

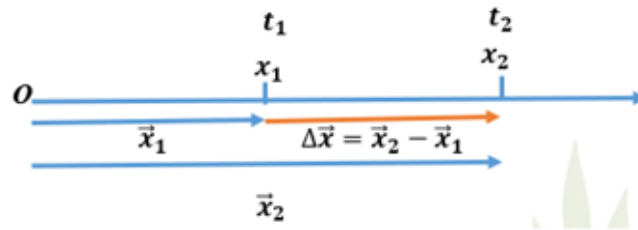


Figura 4.2: Cambio de posición en el movimiento rectilíneo uniforme

Entonces:

$$\vec{v}_x = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} \quad (4.13)$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} \quad (4.14)$$

$$dx(t) = v_x dt \quad (4.15)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt \quad (4.16)$$

$$x_2(t) - x_1(t) = v_x \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (4.17)$$

$$v_x = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{t_2 - t_1} \quad (4.18)$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.19)$$

Como el cambio de posición x , coincide con el espacio recorrido por la partícula y , si además hacemos $t_1 = 0$, entonces:

$$e = vt \quad (4.20)$$

4.2.2. Movimiento rectilíneo acelerado: Caída libre

Supóngase un cuerpo de masa m sometido a la acción de la fuerza de gravedad, es decir su peso, que se encuentra inicialmente a una altura

$$y_0 = h \quad (4.21)$$

y en reposo figura 4.3

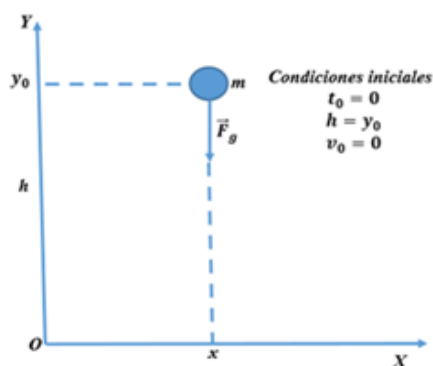


Figura 4.3: Condiciones iniciales para una masa que cae por la acción de la fuerza de gravedad

Entonces, aplicando la segunda ley de Newton o ley de movimiento, se tiene:

$$\vec{F}_g = m\vec{a} \quad (4.22)$$

Puesto que el movimiento es unidimensional, entonces se puede obviar el carácter vectorial:

$$-mg = ma \quad (4.23)$$

$$-g = a \quad (4.24)$$

Es interesante resaltar aquí, como se independiza el problema de la masa y la geometría del cuerpo, de tal forma que no importa cómo es y cuánta masa tiene el cuerpo que cae.

Entonces:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \quad (4.25)$$

$$dv_y = -gdt \quad (4.26)$$

De modo que, para conocer la velocidad del cuerpo en cualquier instante de tiempo, se tiene que integrar.

$$\int dv_y = \int gdt \quad (4.27)$$

La integración se puede realizar con integrales indefinidas y utilizando las condiciones iniciales.

$$v_y = -gt + C \quad (4.28)$$

Siendo C la constante de integración.

Aplicando las condiciones iniciales, se tiene:

$$v_0 = -gt_0 + C \quad (4.29)$$

$$0 = -g(0) + C \quad (4.30)$$

$$C = 0 \quad (4.31)$$

Por tanto, la velocidad del cuerpo en caída libre, en cada instante de tiempo, viene dada por:

$$v_y = -gt \quad (4.32)$$

Obsérvese que la velocidad también se puede hallar mediante integrales definidas.

$$\int_v^v dv_y = - \int_t^{t_0} g t \quad (4.33)$$

$$[v_y]_0^v = g [t]_{t_0}^t \quad (4.34)$$

$$v_y = -gt \quad (4.35)$$

Puesto que

$$v_0 = 0 \quad t_0 = 0 \quad (4.36)$$

Para hallar la posición o altura del cuerpo en cualquier instante de tiempo, se tiene:

$$\vec{v}_y = \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} \quad (4.37)$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.38)$$

$$dy(t) = v_y dt \quad (4.39)$$

$$\int dy(t) = \int v_y dt \quad (4.40)$$

$$y(t) = -g \int t dt \quad (4.41)$$

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + C_1 \quad (4.42)$$

Nuevamente utilizando las condiciones iniciales se tiene:

$$y_0 = -g \frac{t_0^2}{2} + C_1 \quad (4.43)$$

$$h = -g(0) + C_1 \quad (4.44)$$

$$h = C_1 \quad (4.45)$$

Por tanto:

$$y(t) = h - g \frac{t^2}{2} \quad (4.46)$$

Así que las ecuaciones para la caída libre de un cuerpo son:

$$y(t) = h - g \frac{t^2}{2} \quad (4.47)$$

$$v_y = -gt \quad (4.48)$$

$$a_y = -g \quad (4.49)$$

4.2.3. Movimiento rectilíneo acelerado: Caída con fricción

Considérese, gráfica 4.4, ahora un cuerpo cayendo, pero dentro de un medio viscoso, aire, por ejemplo, el cual produce sobre él una fuerza de fricción en dirección contraria a su movimiento y proporcional a su velocidad. Es decir:

$$\vec{F}_f = -\beta \vec{v} \quad (4.50)$$

Como, al igual que en el problema de caída libre, existe la libertad de escoger el nivel cero, entonces se escogerá el nivel cero en el punto de partida del cuerpo, con el fin de resaltar el hecho de que las fuerzas de fricción siempre se oponen al movimiento. Entonces por la segunda ley de Newton se tiene:

$$F_g - F_f = ma \quad (4.51)$$

$$mg - \beta v_y = m \frac{dv_y}{dt} \quad (4.52)$$

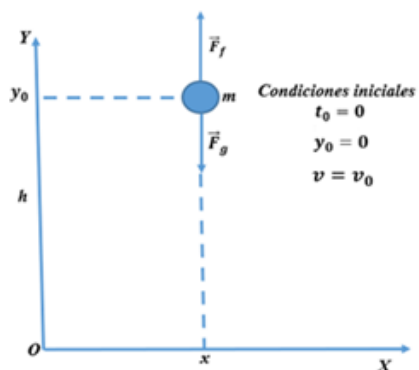


Figura 4.4: Condiciones iniciales para una masa una masa que cae dentro de un fluido (aire)

Separando variables se tiene:

$$\frac{mdv_y}{mg - \beta v_y} = dt \quad (4.53)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = mg - \beta v_y \quad (4.54)$$

$$du = -\beta dv_y \quad (4.55)$$

$$-\frac{du}{\beta} = dv_y \quad (4.56)$$

Reemplazando:

$$\frac{-\frac{m}{\beta} du}{u} = dt \quad (4.57)$$

$$-\frac{m}{\beta} \int \frac{du}{u} = \int dt \quad (4.58)$$

$$-\frac{m}{\beta} \ln u = t + C \quad (4.59)$$

$$-\frac{m}{\beta} \ln (mg - \beta v_y) = t + C \quad (4.60)$$

Utilizando las condiciones iniciales se tiene:

$$-\frac{m}{\beta} \ln (mg - \beta v_0) t_0 + C \quad (4.61)$$

$$-\frac{m}{\beta} \ln (mg - \beta v_0) = C \quad (4.62)$$

Por tanto:

$$\frac{m}{\beta} \ln (mg - \beta v_0) - \frac{m}{\beta} \ln (mg - \beta v_y) = t \quad (4.63)$$

$$\frac{m}{\beta} \ln \frac{mg - \beta v_0}{mg - \beta v_y} = t \quad (4.64)$$

$$\ln \frac{mg - \beta v_0}{mg - \beta v_y} = \frac{\beta}{m} t \quad (4.65)$$

Por la definición de logaritmo,

$$\text{Si } \ln x = y, \text{ entonces } y = e^x$$

Se tiene:

$$\frac{mg - \beta v_0}{mg - \beta v_y} = e^{\frac{\beta}{m}t} \quad (4.66)$$

Despejando v_y se tiene:

$$(mg - \beta v_0) e^{-\frac{\beta}{m}t} = mg - \beta v_y \quad (4.67)$$

$$v_y = - \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \quad (4.68)$$

Obsérvese que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_y = \frac{mg}{\beta} \quad (4.69)$$

Lo que significa que cuando las fuerzas que actúan sobre el cuerpo se equilibran, el cuerpo alcanza una velocidad constante, que se conoce como velocidad límite o velocidad terminal que es constante y con la cual el cuerpo termina cayendo.

Las gráficas 4.5 y 4.6 muestran el comportamiento de la velocidad del paracaidista cuando se supone que parte del reposo, $v_0 = 0$. Las constantes se han escogido solo con el propósito de mostrar el comportamiento de la curva.

En la gráfica 4.5 corresponde a la magnitud de la velocidad de caída del paracaidista, la cual aumenta hasta el valor terminal, en tanto que, la gráfica 4.6 se obtiene si se tiene en cuenta la dirección de la velocidad; es decir corresponde a la gráfica de la velocidad del paracaidista, la cual crece negativamente en valor absoluto.

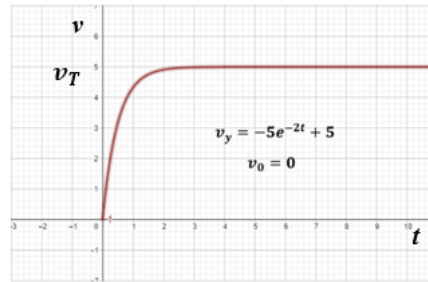


Figura 4.5: Gráfica de rapidez - tiempo para una partícula que cae dentro de un fluido

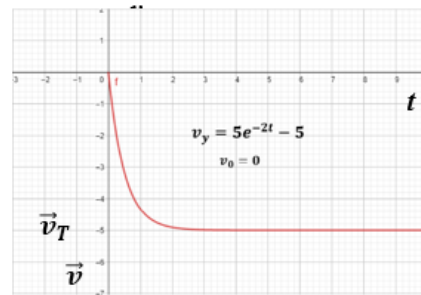


Figura 4.6: Gráfica velocidad - tiempo para una partícula que cae dentro de un fluido

Para hallar la posición del cuerpo en cualquier instante de tiempo, se tiene:

$$\vec{v}_y = \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} \quad (4.70)$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.71)$$

$$y(t) = \int v_y dt \quad (4.72)$$

$$y(t) = \int \left[-\left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) e^{\frac{-\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \right] dt \quad (4.73)$$

$$y(t) = - \int \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) e^{\frac{-\beta}{m}t} dt + \int \frac{mg}{\beta} dt \quad (4.74)$$

$$y(t) = - \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) \int e^{\frac{-\beta}{m}t} dt + \frac{mg}{\beta} t + C \quad (4.75)$$

$$y(t) = - \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) \left(-\frac{m}{\beta} e^{\frac{-\beta}{m}t} \right) + \frac{mg}{\beta} t + C \quad (4.76)$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$t = 0 \quad y_0 = 0 \quad (4.77)$$

Se tiene:

$$0 = - \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) \left(-\frac{m}{\beta} \right) + C \quad (4.78)$$

$$c = -\frac{m}{\beta} \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) \quad (4.79)$$

Por tanto:

$$y(t) = \frac{mg}{\beta} \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) e^{\frac{-\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} t - \frac{m}{\beta} \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) \quad (4.80)$$

$$y(t) = \frac{mg}{\beta} \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) \left(e^{\frac{-\beta}{m}t} - 1 \right) + \frac{mg}{\beta} t \quad (4.81)$$

Para un tiempo suficientemente grande, $(t \rightarrow \infty)$, se tiene que:

$$y(t) = \frac{mg}{\beta} t \quad (4.82)$$

Obsérvese que, después de alcanzar la velocidad terminal el paracaidista desciende con movimiento rectilíneo uniforme.

En cuanto a la aceleración se tiene:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} \quad (4.83)$$

$$a_y(t) = \frac{d \left(- \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) e^{\frac{-\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \right)}{dt} \quad (4.84)$$

$$a_y(t) = \frac{-\beta}{m} \left(\frac{mg}{\beta} - v_0 \right) e^{\frac{-\beta}{m}t} \quad (4.85)$$

$$a_y(t) = - \left(g - \frac{\beta}{m}v_0 \right) e^{\frac{-\beta}{m}t} \quad (4.86)$$

De tal forma que, para un tiempo lo suficientemente grande, ($t \rightarrow \infty$), se tiene que:

$$a_y(t) = 0 \quad (4.87)$$

Como debe ser.

De hecho, este es el movimiento que gobierna a una gota de lluvia o a un grano de granizo. Una gota de lluvia típica, cuyo diámetro es del orden de los **2mm** la velocidad terminal asciende a **6,5m/s**, **23,4Km/hr**, aproximadamente, y si lo que cae es una gota de lluvia grande (diámetro de **5mm**), lo hará a **9m/s**, lo que aproximadamente son **32km/h**.

De hecho, sabemos por experiencia, que durante una llovizna nos preocupa la mojada que vamos a tener, pero con gotas grandes además de la mojada nos preocupa también lo fuerte con que nos golpean las gotas de agua; sin embargo, gracias a la velocidad terminal que obtienen las gotas de agua soportamos la lluvia.

Pero con el granizo la situación es otra. Un grano de granizo perfectamente esférico de $0,5\text{cm}$ de diámetro, alcanza una velocidad terminal de cerca de los 50Km/Hr , uno de 2cm de diámetro alcanza los 100Km/Hr , en tanto que un grano de granizo de 4cm , parecido a una pelota de ping pong, ronda los 130Km/Hr . *¡Aunque no nos mojemos, lo mejor es correr!* (Datos tomados de <https://www.tiempo.com/noticias/divulgacion/la-velocidad-terminal-de-gotas-y-granizos.html>).

4.2.4. Movimiento unidimensional: Movimiento oscilatorio

Considérese un cuerpo sometido a la acción de una fuerza de la forma

$$\vec{F} = -ky\hat{j} \quad (4.88)$$

Es decir, una fuerza elástica o también una fuerza que cumple con la ley de Hooke. Figura 4.7.

Cuando el cuerpo se encuentra en su punto de equilibrio se le saca momentáneamente del equilibrio y se le deja bajo la acción de la fuerza elástica:

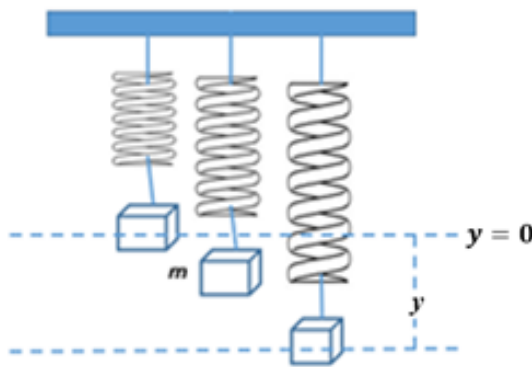


Figura 4.7: Movimiento oscilatorio de una partícula

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$-ky = ma \quad (4.89)$$

$$-ky = m \frac{dv_y}{dt} \quad (4.90)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{-k}{m} y \quad (4.91)$$

Pero:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (4.92)$$

Por tanto:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (4.93)$$

La cual es una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes, y que admite como solución:

$$y = Ae^{rt} \quad (4.94)$$

Su ecuación característica es:

$$r^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad (4.95)$$

De donde:

$$r = \pm \sqrt{k/m} \quad (4.96)$$

Obviamente $\sqrt{k/m}$ tiene como unidades sg^{-1} , y como corresponde a la solución angular del oscilador no es más que la frecuencia angular de oscilación del oscilador.

$$\left[\sqrt{k/m}\right]_{M.K.S} = \sqrt{\frac{N/m}{Kg}} = \sqrt{\frac{Kg^m/sg^2m}{Kg}} = sg^{-1} \quad (4.97)$$

y, por tanto:

$$w = \sqrt{k/m} \quad (4.98)$$

Por tanto, la solución para el oscilador es:

$$y = Ae^{\pm wt} \quad (4.99)$$

Lo cual significa que la ecuación del oscilador tiene dos soluciones diferentes y reales, por lo que:

$$y = Ae^{wt} + Ae^{-wt} \quad (4.100)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler, se tiene:

$$y = A \cos wt + iA \sin wt + A \cos wt - iA \sin wt \quad (4.101)$$

Si hacemos $y_0 = 2A$, entonces:

$$y = y_0 \cos wt \quad (4.102)$$

Su velocidad es:

$$v_y = \frac{dy}{dt} \quad (4.103)$$

$$v_y = -\omega y_0 \sin \omega t \quad (4.104)$$

Y su aceleración:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad (4.105)$$

$$a_y = -\omega^2 y_0 \cos \omega t \quad (4.106)$$

Obsérvese que:

$$a_y = -\omega^2 y \quad (4.107)$$

y_0 se llama la *amplitud*, y , se llama la *elongación* y obviamente la *amplitud* es la máxima *elongación* del movimiento.

Obsérvese que para $t = 0$, se obtiene $y = y_0$, lo que significa que el movimiento comienza en uno de los extremos del movimiento. Pero, el movimiento también puede comenzar en el centro del movimiento, o punto de equilibrio, es decir en $y = 0$. En dicho caso las ecuaciones del movimiento son:

$$y = y_0 \sin \omega t \quad (4.108)$$

$$v_y = -\omega y_0 \cos \omega t \quad (4.109)$$

$$a_y = -\omega^2 y_0 \sin \omega t \quad (4.110)$$

Las gráficas 4.8, 4.9 y 4.10 muestran el comportamiento de la elongación, la velocidad y la aceleración del movimiento oscilatorio.

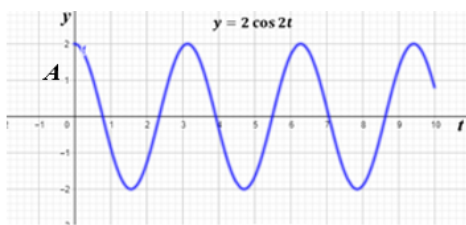


Figura 4.8: Gráfica elongación - tiempo para el movimiento oscilatorio

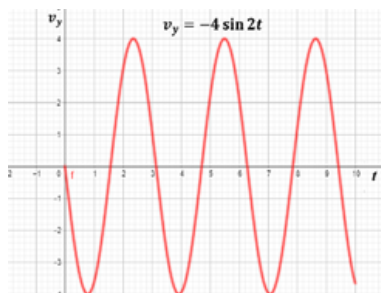


Figura 4.9: Gráfica velocidad - tiempo para el movimiento oscilatorio

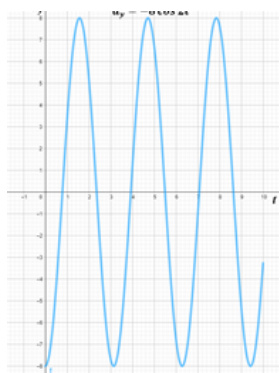


Figura 4.10: Gráfica aceleración - tiempo para el movimiento oscilatorio

4.2.5. Movimiento bidimensional: El movimiento parabólico

Cuando el movimiento se realiza en dos coordenadas, se dice que el movimiento es bidimensional. Es decir, el cuerpo se mueve en un plano y su trayectoria es una curva contenida en dicho plano.

Considérese una partícula que se mueve según las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = v_x t \quad (4.111)$$

$$y(t) = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4.112)$$

Donde v_x y v_{y0} son constantes y g es la aceleración de la gravedad en cercanías a la superficie terrestre.

Su vector posición será:

$$\vec{r}(t) = v_x t \hat{i} + \left(v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j} \quad (4.113)$$

Si la partícula se lanza bajo un ángulo de inclinación θ y una velocidad inicial v_0 , Figura 4.11, entonces:

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad (4.114)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \theta \quad (4.115)$$

Su trayectoria se obtiene eliminando el parámetro t en sus ecuaciones paramétricas:

$$t = \frac{x}{v_x} \quad (4.116)$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \quad (4.117)$$

Luego:

$$y(t) = (v_0 \sin \theta) \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \quad (4.118)$$

$$y = (\tan \theta) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (4.119)$$

Ecuación de la forma $y = bx - ax^2$, que corresponde a una parábola y donde $a = \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta}$.

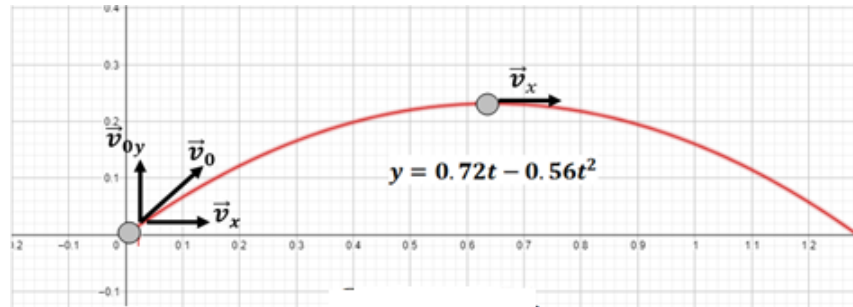


Figura 4.11: Lanzamiento de un proyectil. Movimiento parabólico.

Cuando la partícula es lanzada sin velocidad inicial en la dirección Y , $v_{y0} = 0$, y a una altura inicial, se dice que el movimiento es *semiparabólico*, gráfica 4.12, y su ecuación es:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \quad (4.120)$$

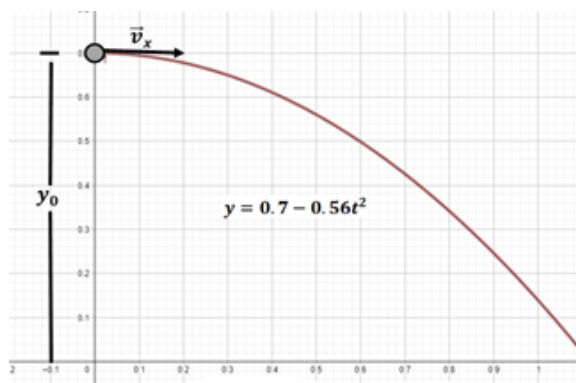


Figura 4.12: Movimiento semiparabólico

Como se ve, el movimiento parabólico es la composición de un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento rectilíneo vertical con aceleración constante, o movimiento uniformemente acelerado, **M. U. A.**

4.2.6. Movimiento bidimensional: El movimiento circular uniformes

Considérese un cuerpo sometido a dos movimientos oscilatorios desfasados $\frac{\pi}{2}$, es decir, los dos movimientos oscilatorios se desarrollan perpendiculares entre sí. Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = r \sin \omega t \quad (4.121)$$

$$y = r \cos \omega t \quad (4.122)$$

ω se llama la velocidad angular del movimiento y se mide en $\frac{\text{Radianes}}{\text{sg}}$.

Para eliminar el parámetro t , elévese cada una de las ecuaciones al cuadrado:

$$x^2 = r^2 \sin^2 \omega t \quad (4.123)$$

$$y^2 = r^2 \cos^2 \omega t \quad (4.124)$$

Sumando se tiene:

$$x^2 + y^2 = r^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \quad (4.125)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (4.126)$$

La ecuación obtenida corresponde a una circunferencia de radio r y centro en el origen; por tanto, la trayectoria que sigue el cuerpo es una circunferencia. Gráfica 4.13

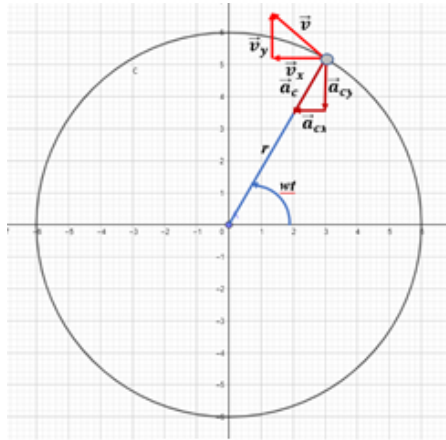


Figura 4.13: Movimiento circular uniforme de una partícula

Sus velocidades serán:

$$v_x = \frac{d(r \sin \omega t)}{dt} \quad (4.127)$$

$$v_x = r\omega \cos \omega t \quad (4.128)$$

$$v_y = \frac{d(r \cos wt)}{dt} \quad (4.129)$$

$$v_y = -rw \sin wt \quad (4.130)$$

Su velocidad total será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4.131)$$

$$v = \sqrt{r^2 w^2 (\sin^2 wt + \cos^2 wt)} \quad (4.132)$$

$$v = rw \quad (4.133)$$

Que es la velocidad tangencial de la partícula y que es constante en magnitud. Por ello se dice *movimiento circular uniforme*.

La relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular (w) se puede escribir vectorialmente como:

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \quad (4.134)$$

Donde el vector velocidad angular se define como un vector perpendicular al plano de rotación y cuya dirección se define mediante la ley de la mano derecha. Figura [4.14](#)

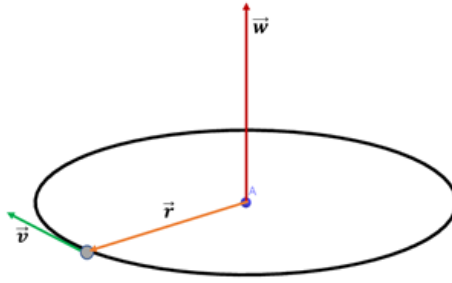


Figura 4.14: Relación entre la velocidad tangencial y la velocidad angular en el movimiento circular uniforme

Sus aceleraciones serán:

$$a_x = \frac{d(rw \cos wt)}{dt} \quad (4.135)$$

$$a_x = -rw^2 \sin wt \quad (4.136)$$

$$a_y = \frac{d(-rw \sin wt)}{dt} \quad (4.137)$$

$$a_y = -rw^2 \cos wt \quad (4.138)$$

Su aceleración total será:

$$a_c = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (4.139)$$

$$a_c = \sqrt{r^2 w^4 (\sin^2 wt + \cos^2 wt)} \quad (4.140)$$

$$a_c = rw^2 \quad (4.141)$$

Que no es más que la aceleración centrípeta de la partícula.

Pues:

$$a_c = r \left(\frac{v}{r} \right)^2 \quad (4.142)$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (4.143)$$

4.2.7. Movimiento tridimensional: Movimiento helicoidal

Cuando un movimiento se desarrolla en las tres coordenadas, se dice que es un movimiento tridimensional, es decir es un movimiento que se realiza en el espacio y su trayectoria es una curva espacial. Supóngase una partícula que se mueve según las ecuaciones paramétricas:

$$x = a \sin wt \quad (4.144)$$

$$y = a \cos wt \quad (4.145)$$

$$z = kt \quad (4.146)$$

Su posición será:

$$\vec{r} = a \sin wt \hat{i} + a \cos wt \hat{j} + kt \hat{k} \quad (4.147)$$

Sus velocidades serán:

$$v_x = aw \cos wt \quad (4.148)$$

$$v_y = -rw \sin wt \quad (4.149)$$

$$v_z = k \quad (4.150)$$

Sus aceleraciones serán:

$$a_x = -rw^2 \sin wt \quad (4.151)$$

$$a_y = -aw^2 \cos wt \quad (4.152)$$

$$a_z = 0 \quad (4.153)$$

Obsérvese que la partícula desarrolla un movimiento circular uniforme en el plano $X - Y$, mientras que avanza en la dirección Z con velocidad constante. La constante se llama avance o paso de rosca

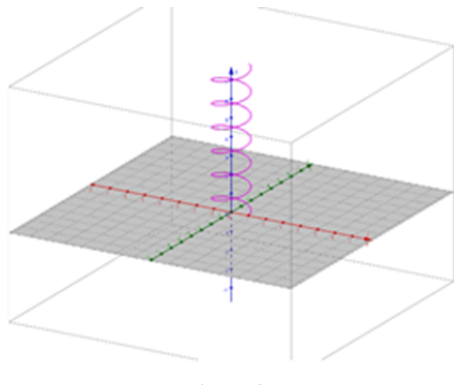


Figura 4.15: Movimiento Helicoidal de una partícula en el espacio

Las ecuaciones de la hélice o espiral de la gráfica son:

$$f(t) = \cos t \quad (4.154)$$

$$f(t) = \sin t \quad (4.155)$$

$$g(t) = 0,2t \quad (4.156)$$

4.2.8. El movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central. La segunda ley de Kepler

Un vector puede expresarse en coordenadas polares, ρ, φ y los vectores unitarios $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$.

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{\varphi}\dot{\varphi} \quad (4.157)$$

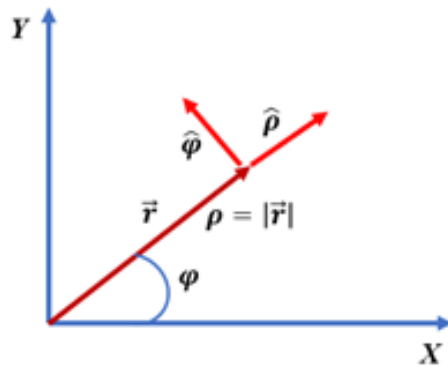


Figura 4.16: Coordenadas y vectores unitarios polares

Se puede mostrar (ver el libro sobre *sistemas coordenados curvilíneos ortogonales, notas de clase*, de este mismo autor) que el vector de posición en coordenadas polares es:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} \quad (4.158)$$

Y que la velocidad y la aceleración vienen dadas por:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\phi}\rho\hat{\phi} \quad (4.159)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\rho})\hat{\phi} \quad (4.160)$$

Por lo que la fuerza sobre la partícula es:

$$\vec{F} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\rho})\hat{\phi} \quad (4.161)$$

Donde la componente tangencial es cero por ser una fuerza central.

$$m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\rho}) = 0 \quad (4.162)$$

Multiplicando y dividiendo por ρ , se tiene:

$$\frac{m}{\rho}(\rho^2\ddot{\phi} + 2\rho\dot{\phi}\dot{\rho}) = 0 \quad (4.163)$$

O

$$\frac{m}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0 \quad (4.164)$$

De donde se deduce que

$$\rho^2\dot{\phi} = \text{constante} \quad (4.165)$$

Obsérvese que el momento angular por unidad de masa, llamado el momento cinético específico, $\vec{h}$,

$$\vec{h} = \vec{\rho} \times \vec{v} \quad (4.166)$$

Es en coordenadas polares:

$$\vec{h} = \rho^2 \dot{\phi} \hat{k} \quad (4.167)$$

Calculando el área barrida por el radio (ver figura 4.17), se tiene:

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{\rho} \times \Delta \vec{\rho}| \quad (4.168)$$

Calculando el área barrida por unidad de tiempo, se tiene:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \vec{\rho} \times \frac{\Delta \vec{\rho}}{\Delta t} \right| \quad (4.169)$$

Por lo que:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\vec{\rho} \times \vec{v}| \quad (4.170)$$

Reemplazando la velocidad en coordenadas polares.

$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\vec{\rho} \times (\dot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\phi} \rho \hat{\phi})| \quad (4.171)$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\rho \hat{\rho} \times (\dot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\phi} \rho \hat{\phi})| \quad (4.172)$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\rho \hat{\rho} \times \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \hat{\rho} \times \dot{\phi} \rho \hat{\phi}| \quad (4.173)$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\rho^2 \dot{\phi} \hat{k}| \quad (4.174)$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2} h \quad (4.175)$$

Lo que significa que el área barrida por el radio vector por unidad de tiempo, $\dot{A}$, es la misma siempre. Para que esto suceda debe darse que cuando el planeta se encuentra a una mayor distancia del sol entonces se mueve más despacio.

$\dot{A}$ se llama *velocidad areolar* del planeta.

Segunda ley de Kepler: El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

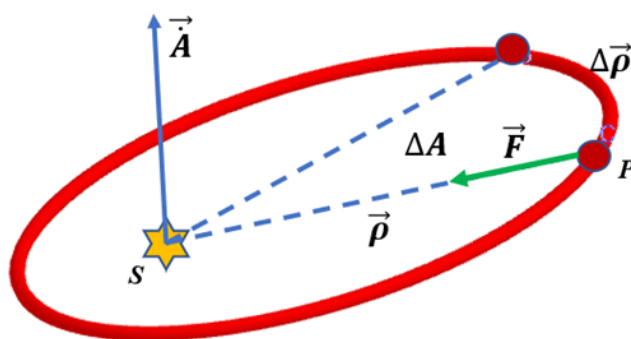


Figura 4.17: Planeta sometido a la acción de una fuerza central dirigida hacia el sol

TALLER 5.

1. Si: $\vec{r} = (t^3 + 2t)\hat{i} - 3e^{-2t}\hat{j} + 2\sin 5t\hat{k}$, encontrar: $\frac{d\vec{r}}{dt}$, $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ en $t = 0$
2. Una partícula se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = 3e^{-2t}, \quad y = 4\sin 3t, \quad z = 5\cos 3t$$

donde t es el tiempo

- a) Encontrar su velocidad y aceleración para cualquier tiempo.
 - b) Encontrar las magnitudes de la velocidad y la aceleración en $t = 0$.
 - c) Describa el movimiento.
3. Una partícula se mueve de tal forma que el vector de posición está dado por

$$\vec{r} = \cos wt\hat{i} + \sin wt\hat{j}$$

donde w es una constante. Mostrar que:

- a) La velocidad $\vec{v}$ de la partícula es perpendicular a $\vec{r}$.
- b) La aceleración $\vec{a}$ está dirigida hacia el origen y que su magnitud es proporcional a la distancia desde el origen.
- c) $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{a}$ un vector constante.

4. Una partícula se mueve en el espacio a lo largo de la curva

$$\vec{r} = (t^2 + t) \hat{i} + (3t - 2) \hat{j} + (2t^3 - 4t^2) \hat{k}$$

Encontrar la velocidad, la aceleración, la rapidez o magnitud de la velocidad y la magnitud de la aceleración en $t = 0$.

5. Una partícula se mueve en el espacio a lo largo de la curva definida por

$$x = e^{-t} \cos t \quad y = e^{-t} \sin t \quad z = e^{-t}$$

Encontrar la magnitud de la velocidad y la aceleración para cualquier tiempo t .

6. El vector posición de una partícula está dado para cualquier tiempo t por

$$\vec{r} = a \cos wt \hat{i} + a \sin wt \hat{j} + bt^2 \hat{k}$$

- Mostrar que aunque la rapidez de la partícula se incrementa con el tiempo la magnitud de la aceleración permanece constante.
 - Describa geométricamente el movimiento de la partícula.
7. La ecuación vectorial de una partícula que se mueve en un plano, viene dada en el SI por la expresión:

$$\vec{r} = (2t^2 - 1) \hat{i} + (t^3 + 1) \hat{j}$$

Calcular:

- El vector de posición inicial.
 - La distancia al observador (distancia al origen del sistema de referencia) a los 5sg de haber empezado a contar el tiempo.
 - Espacio recorrido por la partícula en el tercer segundo.
 - La trayectoria de la partícula.
8. Un cuerpo se mueve en el plano según la ecuación

$$\vec{r} = v_0 t \cos \pi \hat{i} + (v_0 t \sin \pi - at^2) \hat{j}$$

Determinar la magnitud de la velocidad en las direcciones x y y , así como también la aceleración y la trayectoria del cuerpo. Dibuje la trayectoria.

9. Una partícula se mueve a lo largo de la curva definida por

$$x = e^{-t} \cos t \quad y = e^{-t} \sin t \quad z = e^{-t}$$

Hallar:

- La velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo
 - La rapidez de la partícula en $t = 2$
 - La aceleración de la partícula en cualquier instante de tiempo
 - La magnitud de la aceleración de la partícula en $t = 2$
10. El vector de posición de una partícula está dado por
- $$\vec{r}(t) = 3 \cos 2t \hat{i} + 3 \sin 2t \hat{j} + (8t - 4) \hat{k}$$
- Hallar un vector unitario $\hat{T}$ tangente a la trayectoria
 - Muestre que $\vec{v} = v\hat{T}$
 - Halle el radio de curvatura del movimiento
 - Halle el vector normal unitario, $\hat{N}$, normal a la trayectoria
11. Demuestre que la aceleración de una partícula que viaja a lo largo de una curva con rapidez v está dada por

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{R} \hat{N}$$

12. Hallar la aceleración tangencial y la aceleración normal de una partícula que se mueve sobre la elipse dada por

$$\vec{r}(t) = a \cos wt \hat{i} + b \sin wt \hat{j}$$

13. Demostrar que si una partícula recorre una curva con una velocidad $\vec{v}$ y una aceleración $\vec{a}$, el radio de curvatura de la trayectoria es

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

UNIDAD 5

CAMPOS VECTORIALES Y CAMPOS ESCALARES

5.1. Campo escalar

Un campo escalar es una función real f , de varias variables en la que a cada punto de un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ le asigna un valor en el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$.

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \quad (5.1)$$

En física el concepto de campo es fundamental, de tal forma que el valor asignado por la función f a un punto determinado de $\mathbf{R}$ representa una magnitud física y el campo es, por lo tanto, la distribución espacial de dicha magnitud física. Por ejemplo, si la magnitud física es la temperatura entonces el campo escalar definido por la función f , representa la distribución espacial de la temperatura en un determinado espacio, el salón de clase, por ejemplo, en un instante determinado.

Ahora bien, puesto que los sistemas físicos, por lo menos en el nivel clásico, evolucionan en un espacio tridimensional, es decir, de tres variables, entonces los campos de interés para estas notas de clase son los campos definidos por

funciones de dos y tres variables.

5.1.1. Campos o funciones de dos variables

Un campo o una función de dos variables es una función real f , que a cada punto de un subconjunto de R^2 le asigna un valor en R .

$$f : R^2 \rightarrow R \quad (5.2)$$

La representación gráfica de un campo escalar corresponde a una superficie representada en el espacio tridimensional.

Ejemplo

La función:

$$f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$$

La cual asigna, por ejemplo, a la pareja $(x, y) = (2, 2)$ el valor de $\sqrt{56}$.

$$f : R^2 \rightarrow R$$

$$(2, 2) \rightarrow \sqrt{56}$$

Su representación gráfica corresponde a la semiesfera o hemisferio superior mostrado en la figura 5.1.

Muchas veces el análisis de la superficie se dificulta por lo que se opta por representarlo mediante *mapas de contorno*, también llamados como *curvas de nivel*. Un mapa de contorno o una curva de nivel se obtiene dándole valores constantes a la función $f(x, y)$. La figura 5.2 muestra las curvas de nivel o mapas de contorno para $f(x, y) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

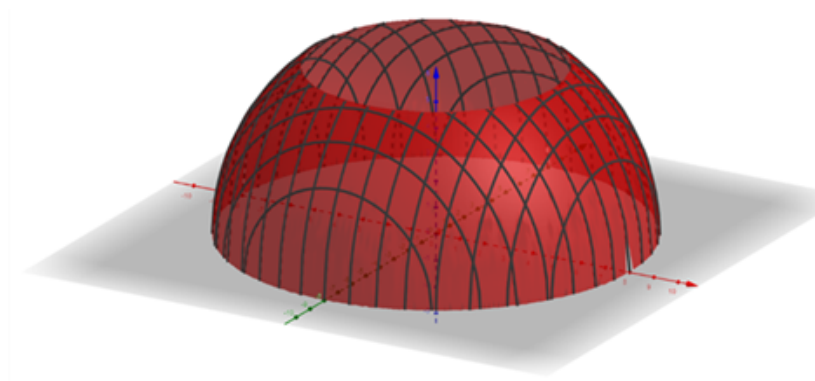


Figura 5.1: $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$

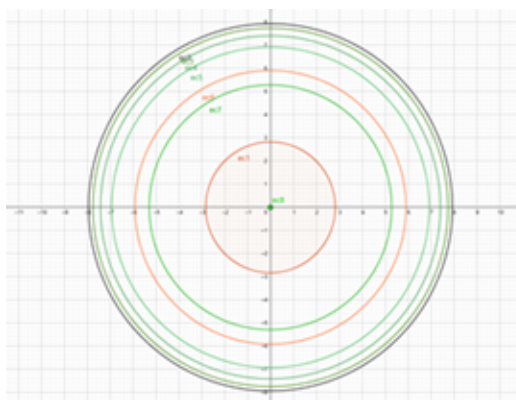


Figura 5.2: Curvas de nivel para $f(x, y) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ de la función de la figura 5.1

Ejemplo

La figura 5.3 corresponde a la superficie del paraboloide *hiperbólico* definida por el campo escalar

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

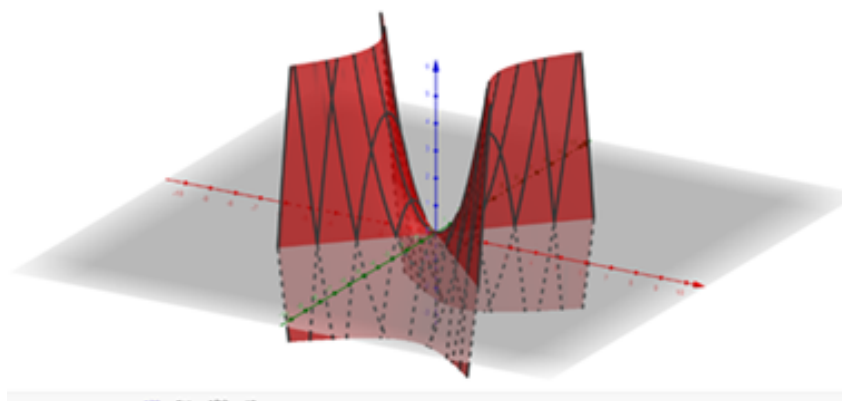


Figura 5.3: Paraboloide hiperbólico $f(x, y) = x^2 - y^2$

Y la figura 5.4 son las correspondientes a los *mapas de contorno* o *curvas de nivel* para $f(x, y) = 2, -2, 7, -4, 6, -6, 8, -8$, las cuales son *hipérbolas*, con las ecuaciones:

$$y = x$$

$$y = -x$$

Correspondientes a las asíntotas.

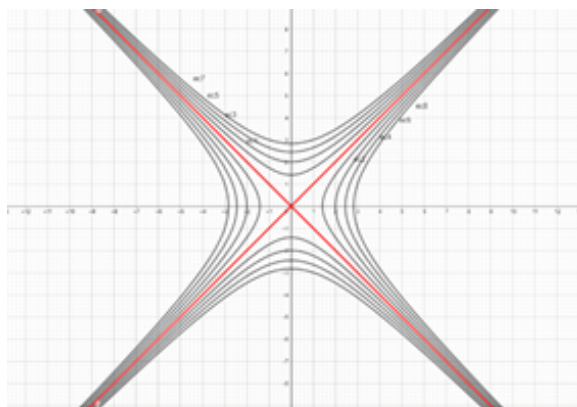


Figura 5.4: Curvas de nivel del paraboloide hiperbólico.

$$f(x, y) = 2, -2, 4, -4, 6, -6, 8, -8$$

5.1.2. Campos escalares o funciones de tres funciones

Un campo escalar o una función de tres variables es una función real f , que a cada punto de un subconjunto de $\mathbf{R}^3$ le asigna un valor en $\mathbf{R}$.

$$f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \quad (5.3)$$

Ejemplo

La función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Le asigna al punto $(x, y, z) = (2, 1, 2)$ el valor de 9. Es decir:

$$f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(2, 1, 2) \rightarrow 9$$

Es obvio que, la representación gráfica de la función no es posible en cuanto que se necesitan cuatro ejes para graficarla: un eje X , un eje Y , un eje Z y un eje para f .

El estudio de los campos escalares o funciones de tres variables se realiza por medio de las *superficies de nivel*, las cuales se obtienen asignándole un valor constante a la función $f(x, y, z)$. La figura 5.5 son las superficies de nivel correspondientes a $f(x, y, z) = 4, 10$.

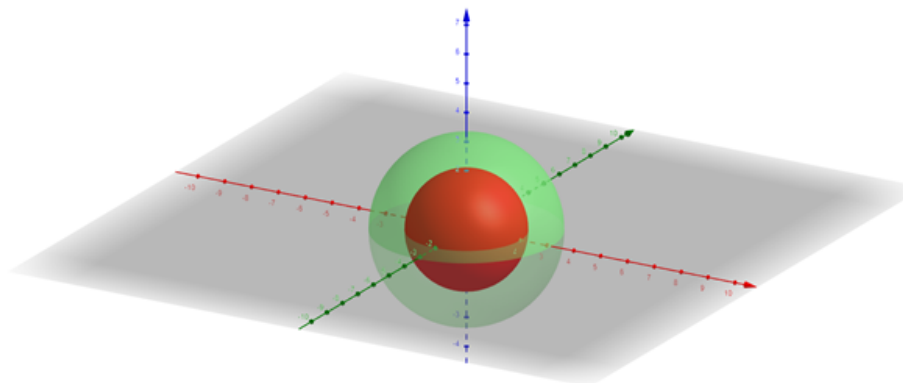


Figura 5.5: Superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $f(x, y, z) = 4, 10$

Ejemplo

Las superficies de nivel del campo escalar o función de tres variables dada por la ecuación

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

Para los valores constantes de $f(x, y, z) = 1$ y $f(x, y, z) = 4$ corresponden a planos y se muestran en la figura 5.6.

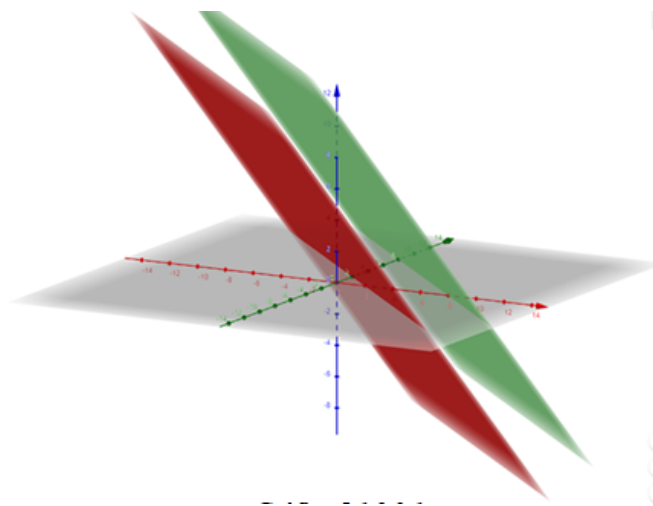


Figura 5.6: Superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x + y + z$
 $f(x, y, z) = 1, 4$

5.2. Campo vectorial

Un campo vectorial es una función vectorial de varias variables,

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) \quad (5.4)$$

La cual a cada punto de su dominio le asigna un vector correspondiente a una determinada magnitud vectorial que actúa en dicho punto.

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow V_n \quad (5.5)$$

La magnitud vectorial que actúa puede corresponder a una magnitud física, por ejemplo, el campo gravitacional, el campo eléctrico etc. Por tanto, los campos vectoriales de interés para estas notas de clase están definidos para $n = 2$ y 3 .

5.2.1. Campos vectoriales de dos componentes

Un campo vectorial de dos componentes es una función vectorial de dos variables, la cual asigna un vector de dos componentes a cada punto del dominio que es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{F}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2 \quad (5.6)$$

Ejemplo

El campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Asigna al punto $(3, 2)$ el vector

$$3\hat{i} + 2\hat{j}$$

Es decir:

$$\vec{F}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$$

$$(3, 2) \rightarrow 3\hat{i} + 2\hat{j}$$

La figura 5.7 es la representación gráfica del campo vectorial en cuestión.

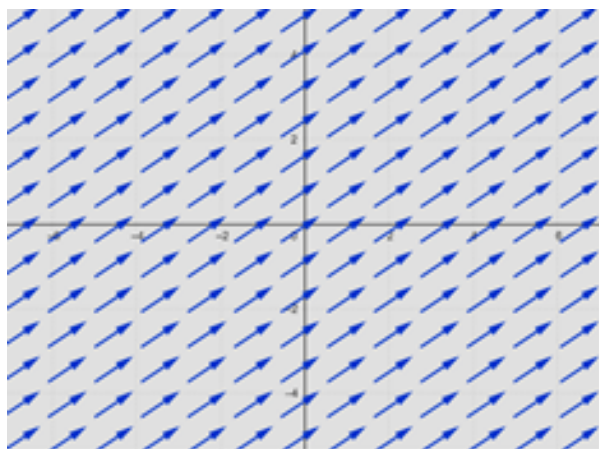


Figura 5.7: Campo vectorial $f(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$

Ejemplo

El campo vectorial

$$\vec{G}(x, y, z) = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

El cual desarrollado queda como:

$$\vec{G}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

Asigna al punto $(2, 5)$ el vector $-5\hat{i} + 2\hat{j}$. Es decir:

$$\vec{G}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$$

$$(2, 5) \rightarrow (-5, 2)$$

Su representación gráfica se encuentra en la figura [5.8](#)

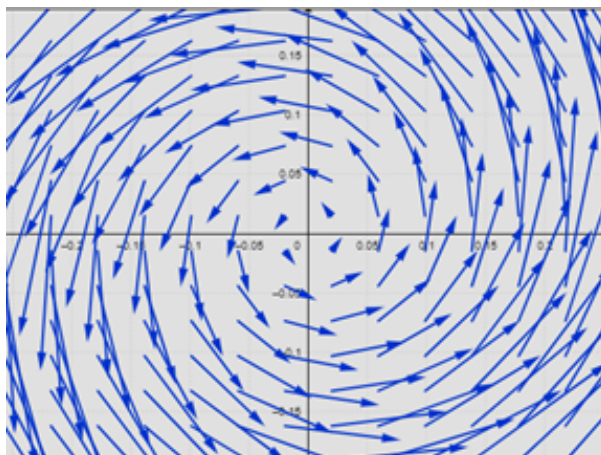


Figura 5.8: Gráfica bidimensional del campo vectorial $\vec{G}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$

5.2.2. Campos vectoriales de tres componentes

Un campo vectorial de tres componentes es una función vectorial de tres variables, la cual asigna un vector de tres componentes a cada punto del dominio que es un subconjunto de $\mathbf{R}^3$.

$$\vec{F}(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \rightarrow V_3 \quad (5.7)$$

Ejemplo

El campo Gravitacional

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

Que también puede escribirse como

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

Es un campo vectorial que le asigna a cada punto del espacio, $\mathbf{R}^3$, el vector

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

Donde hay que recordar que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Y, por tanto:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

La figura 5.9 es una representación gráfica del campo gravitacional, donde se ha tomado

$$Gm_1m_2 = 1$$

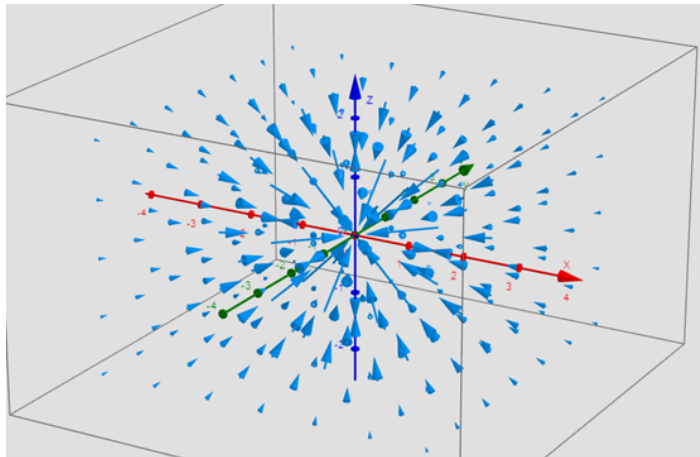


Figura 5.9: Gráfica del campo vectorial $\vec{F} = -\frac{(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

Ejemplo

El campo gravitacional en cercanías a la superficie terrestre, llamado el *peso de los cuerpos*, asigna a cada punto del espacio el vector

$$(0, 0, mg)$$

Es decir, es el campo vectorial

$$\vec{w} = mg\hat{k}$$

Su representación gráfica se encuentra en la figura 5.10, donde se supuesto $mg = 5$.

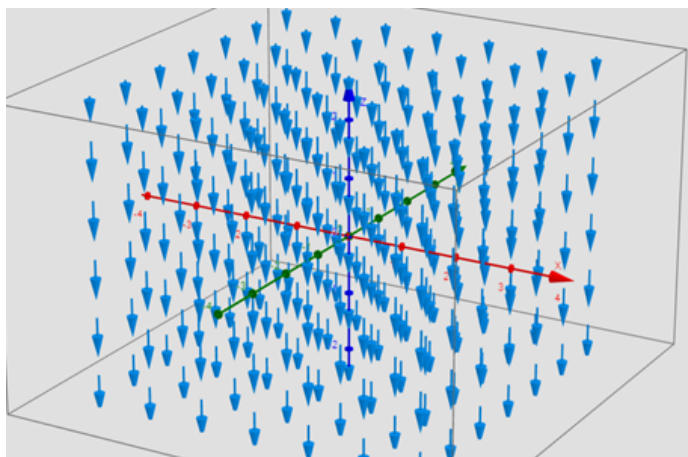


Figura 5.10: Gráfica del campo vectorial en cercanías a la superficie terrestre $\vec{w} = mg\hat{k}$

Es bueno tener en cuenta que los campos escalares, si bien no son escalares como tal, si se comportan como escalares; lo mismo puede decirse de los campos vectoriales, los cuales, aunque no son vectores como tal, si se comportan como vectores y, por ello, todas las operaciones definidas con vectores se pueden realizar con los campos vectoriales.

5.2.3. Campos Físicos escalares

La energía potencial eléctrica

Puesto que toda carga eléctrica sumergida en un campo eléctrico experimenta una fuerza dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (5.8)$$

Entonces, el desplazar dicha carga de un punto a otro dentro del campo requiere hacer un trabajo; dicho trabajo se define como la energía potencial eléctrica en punto determinado b , cuando se calcula con referencia a otro punto a , tomado como referencia; generalmente el infinito ∞ , donde se define la energía potencial eléctrica como 0.

$$U_E = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.9)$$

Para el campo eléctrico creado por una carga eléctrica puntual la energía potencial eléctrica está dada por:

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \text{ Joules} \quad (5.10)$$

Donde una de las cargas, q_1 por ejemplo, es la carga que produce el campo eléctrico, mientras que la otra q_2 , es la carga que se desplaza.

El potencial eléctrico

Si la energía potencial eléctrica se calcula por unidad de carga, se obtiene el potencial eléctrico V .

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.11)$$

Para potenciales de dos variables (en el plano) los *mapas de contorno* o *curvas de nivel* se llaman *curvas equipotenciales*. En potenciales de tres variables las *superficies de nivel* se llaman *superficies equipotenciales*.

Para una carga eléctrica puntual, el potencial está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \text{ voltios} \quad (5.12)$$

La figura 5.11, muestra, en el plano, el campo eléctrico, el potencial eléctrico y las curvas equipotenciales para una carga eléctrica puntual. En el espacio las superficies equipotenciales corresponden a esferas concéntricas.

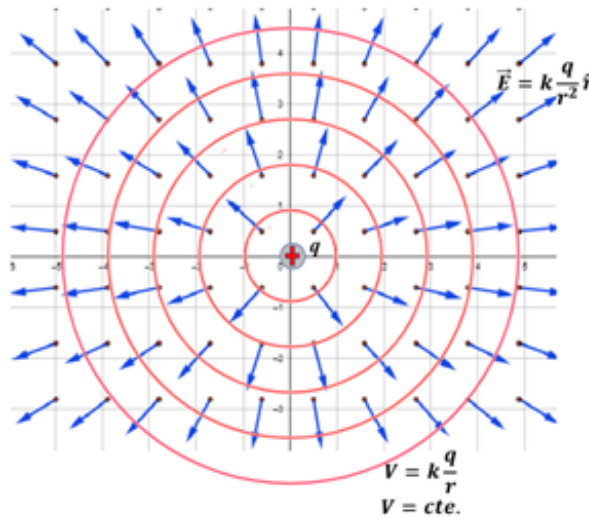


Figura 5.11: Campo eléctrico y líneas equipotenciales creado por una carga eléctrica puntual

La figura 5.12 muestra las líneas equipotenciales para un campo eléctrico constante y las curvas equipotenciales correspondientes. Si el campo es el creado dentro de un condensador de placas paralelas, las superficies equipotenciales corresponden a planos paralelos a las placas del condensador.

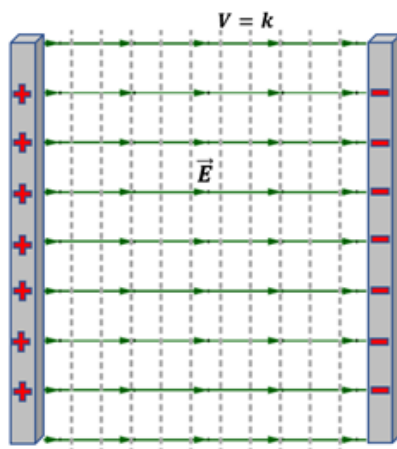


Figura 5.12: Gráfica unidimensional del campo eléctrico y las líneas equipotenciales dentro de un condensador plano

La densidad

Para un material homogéneo, como, por ejemplo, una lámina de aluminio o de caucho, definir la densidad de masa como la masa de la lámina dividida por su volumen es válido y a cada punto de la lámina le queda asignado el mismo valor de densidad. Es decir:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (5.13)$$

Pero si se trata de un material no homogéneo o algún lugar, como, por ejemplo, un trozo de madera o, por qué no, el salón de clase, la definición anterior de densidad no es completamente válida, y, por tanto, el procedimiento debe consistir en medir la densidad en cada punto mediante la elección de un volumen infinitesimal y medir la masa dentro de dicho volumen en cada punto del material o de la región escogida; es decir:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta V} \quad (5.14)$$

Hay que tener en cuenta que el campo escalar de densidad no solo es el

de densidad de masa, sino que también existen otras densidades, como, por ejemplo, la densidad electrónica de un material.

La temperatura

La temperatura en un determinado instante de tiempo, en cada punto de la cuchara con que estamos revolviendo el azúcar en el café, o de cada punto del salón de clase, en términos generales, no es la misma, por lo que se debe asignar a cada punto de la cuchara o del salón de clase una determinada temperatura en ese instante. Así se ha establecido un campo escalar que asigna a cada punto del objeto o de la región un valor de temperatura determinado.

Puede suceder que en ese instante hallan puntos sobre la superficie de la cuchara que tengan la misma temperatura, los cuales pueden conectar con una curva, la cual se denomina como una curva *Isoterma*. En el caso del salón de clase puede existir superficies con igual temperatura, la cual se le llama superficie *Isoterma*.

La presión

Debido a que en los fluidos (aire, agua, Aceite, Alcohol, lava, Salsa de tomate, Gases nobles **neón (Ne)**, **xenón (Xe)**, Sangre etc.) las fuerzas que cohesionan a sus moléculas son débiles, entonces los fluidos fluyen para adoptar la forma del recipiente que lo contiene, la principal característica por la que se los identifica.

Lo anterior conlleva a que los fluidos no puedan soportar *esfuerzos cortantes* y por tanto las fuerzas que ellos ejercen sobre cualquier superficie o que las superficies ejerzan sobre ellos sean perpendiculares a las superficies o a ellos en cualquier punto. Se define, por tanto, la presión en los fluidos como la magnitud de la fuerza normal a su superficie en algún punto por unidad de área que contenga dicho punto:

$$P = \frac{F_N}{A} \quad (5.15)$$

La unidad para la presión en el sistema internacional es, por tanto, el *pascal*, en honor a *Blas Pascal* (1623-1662) Filósofo, físico y matemático francés.

$$Pa = \frac{N}{m^2} \quad (5.16)$$

Otras unidades conocidas son:

La atmósfera Presión ejercida por la atmósfera terrestre al nivel del mar.

$$1 \text{ atmósfera} = 10^5 Pa \quad (5.17)$$

El bar

$$1 \text{ bar} = 10^5 Pa \quad (5.18)$$

Milímetros de mercurio

$$760 \text{ mm de Hg} = 1 \text{ atmósfera} \quad (5.19)$$

Las curvas que unen puntos de una superficie con igual presión se les llama *Isobaras* o *Isóbaras*.

Las superficies que tiene igual presión se le llama superficies *Isobaras* o *Isóbaras*.

5.2.4. Campos Físicos vectoriales

Campo gravitacional

Es el campo de fuerza con que se atraen dos partículas de masas m_1 y m_2 , la cual estableció en 1665 *Isaac Newton*.

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (5.20)$$

Donde G se conoce como *constante de gravitación universal de Newton* medida por primera vez por *Henry Cavendish* (1731-1810), físico y químico británico y francés en 1798.

r es la distancia que une los centros de las dos masas y $\hat{r}$ el vector unitario que se direcciona desde la masa m_1 hacia la masa m_2 , si se trata de la fuerza que se ejerce sobre m_2 debido a m_1 .

En la figura 5.9 se muestra una representación tridimensional del campo gravitacional y en la figura 5.10 se muestra el campo gravitacional en cercanías de la superficie terrestre, es decir:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (5.21)$$

Campo eléctrico

Es el campo que crea una carga eléctrica puntual q , *ley de Coulomb* para el campo eléctrico, nombrada así en honor al físico francés *Charles-Agustín de Coulomb* (1736-1806), quien la enunció en 1785.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r} \quad (5.22)$$

ϵ_0 es la constante de permitividad eléctrica del vacío y cuyo valor es $8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ si la carga q_1 se encuentra en el vacío o espacio libre. En cualquier otro medio la permitividad eléctrica se denota como ϵ y representa la forma en que un campo eléctrico afecta o es afectado por un medio.

En la figura 5.11 se muestra una representacional bidimensional del campo eléctrico creado por una carga eléctrica puntual positiva junto a el potencial eléctrico y las curvas equipotenciales.

Campo de velocidades en un fluido

El campo vectorial

$$\vec{G}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j} \quad (5.23)$$

Y cuya representación gráfica se encuentra en la figura 5.8 bien puede ser la representación del campo de velocidades de la superficie del agua en un remolino o del agua cuando se abre el desagüe de un lavamanos.

En la figura 5.13 se muestra una representación del campo vectorial de velocidades del agua en una tubería cilíndrica y cuya ecuación es:

$$v = v_{max} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right)^2 \right] \quad (5.24)$$

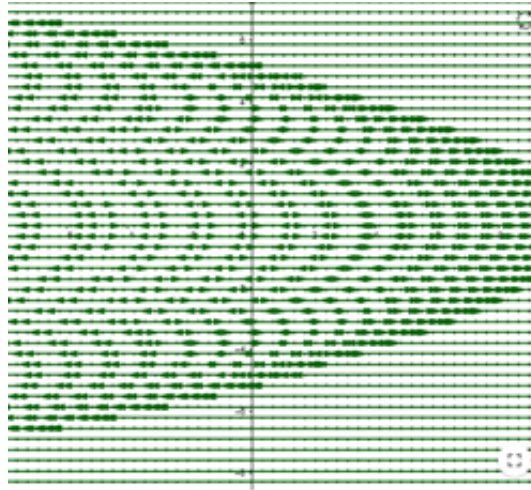


Figura 5.13: Gráfica bidimensional del campo de velocidad de un fluido dentro de una tubería cilíndrica

La figura 5.14 muestra bidimensionalmente el campo vectorial

$$\vec{V} = \frac{v_0}{l} (-x\hat{i} + y\hat{j}) \quad (5.25)$$

Que representa la velocidad de un fluido (aire) cuando choca contra una superficie plana, tal como una pared o una valla publicitaria.

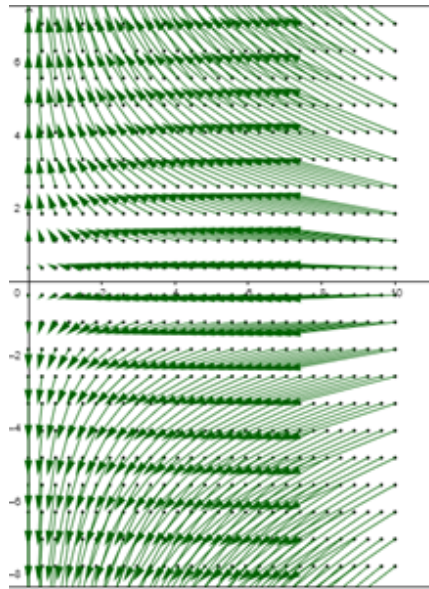


Figura 5.14: Gráfica del campo de velocidad de un fluido que choca contra una superficie plana

Taller 6

1. Utilice cualquiera de los siguientes recursos, JP Math. Campos Vectoriales en 2D <https://www.geogebra.org/m/snpf3Pfg>, Instituto GeoGebra de La Plata. Graficadora de campos vectoriales, <https://www.geogebra.org/m/V9Afznt5>, <https://ggbm.at/Tn5epr9C>, <https://ggbm.at/zDZHQhvx>, para dibujar cada uno de los siguientes campos vectoriales.

a) $\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j}$

b) $\vec{G} = (x, \sin y)$

c) $\vec{A} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}x^2$

d) $\vec{M} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

e) $\vec{Q} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

2. Utilizar el siguiente recurso, <https://www.geogebra.org/classic?lang=es>, para representar gráficamente las siguientes funciones.

a) $z = y^2 - x^2 - 1$

b) $z = \frac{1}{12}\sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2}$

3. Con el recurso Geogebra clásico, trace las curvas de nivel para cada una de las funciones dadas para los valores dados.

a) $z = x^2 + 4y^2 \quad c = 0, 1, 2, 3, 4$

b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad c = 0, 1, 2, 3$

4. Con el recurso Geogebra clásico, trace la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$, para el valor de c indicado.

$$a) \ f(x, y, z) = x - y + z \quad c = 1$$

$$b) \ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad c = 9$$

UNIDAD 6

EL OPERADOR NABLA (∇) Y LOS OPERADORES DERIVADOS. GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTACIONAL Y LAPLACIANO

6.1. El operador nabla, ∇

El operador nabla ∇ es un operador diferencial parcial, de primer orden, vectorial, que puede actuar sobre campos escalares y vectoriales. Como operador en si no tiene ningún significado, éste lo adquiere una vez que actúe sobre algún campo. Se define como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (6.1)$$

Es bueno recordar que el orden en una ecuación diferencial corresponde al de la derivada de mayor orden que hay en la ecuación. También vale la pena resaltar que, aunque no se le coloca la flecha de vector, si hay que tener presente

que es un operador vectorial y como tal se comporta como un vector.

6.2. El operador gradiente

Si

$$\phi = \phi(x, y, z) \quad (6.2)$$

es un campo escalar, entonces:

$$\nabla \phi(x, y, z) \quad (6.3)$$

Se llama el gradiente de ϕ .

Josiah Willard Gibbs (1839–1903) físico estadounidense es quien introduce el concepto de gradiente.

Utilizando la definición del operador nabra, se obtiene que el gradiente de un campo escalar es:

$$\nabla \phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \phi(x, y, z) \quad (6.4)$$

$$\nabla \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \hat{k} \quad (6.5)$$

Ejemplo

Considérese el campo escalar

$$\phi(x, y, z) = 3x^2z^3 + \ln y^2z$$

hallar su gradiente.

Solución.

$$\nabla \phi(x, y, z) = \frac{\partial (3x^2z^3 + \ln y^2z)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial (3x^2z^3 + \ln y^2z)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial (3x^2z^3 + \ln y^2z)}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla \phi(x, y, z) = (6xz^3) \hat{i} + \left(\frac{2yz}{y^2z} \right) \hat{j} + \left(9x^2z^2 + \frac{y^2}{y^2z} \right) \hat{k}$$

$$\nabla \phi(x, y, z) = (6xz^3) \hat{i} + \left(\frac{2}{y} \right) \hat{j} + \left(9x^2z^2 + \frac{1}{z} \right) \hat{k}$$

Nótese que el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial.

El valor del gradiente también puede calcularse para un punto del espacio en particular.

$$\nabla \phi(x, y, z)_{(-2,1,3)} = \left(6(-2)(3)^3 \right) \hat{i} + \left(\frac{2}{1} \right) \hat{j} + \left(9(-2)^2(3)^2 + \frac{1}{3} \right) \hat{k}$$

$$\nabla \phi(x, y, z)_{(-2,1,3)} = -324\hat{i} + 2\hat{j} - \frac{971}{3}\hat{k}$$

Ejemplo

La temperatura en un auditorio está dada por

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

Un mosquito ubicado en el punto $(1, 1, 2)$ en el auditorio, desea volar en una dirección tal que se caliente lo más pronto posible. ¿En qué dirección, debe volar?

Solución

Hallando el gradiente de temperatura en el auditorio, se tiene que:

$$\nabla T(x, y, z) = \frac{\partial (x^2 + y^2 - z)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial (x^2 + y^2 - z)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial (x^2 + y^2 - z)}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla T(x, y, z) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} - \hat{k}$$

Por lo tanto, el gradiente de temperatura en el punto $(1, 1, 2)$ es:

$$\nabla T(x, y, z)_{(1,1,2)} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

Por tanto, en esta dirección debe volar el mosquito para calentarse lo más pronto posible pues en esta dirección se encuentra la mayor variación de la temperatura en el auditorio.

¿Has visto la ubicación de los asistentes a una conferencia en la sala con aire acondicionado?

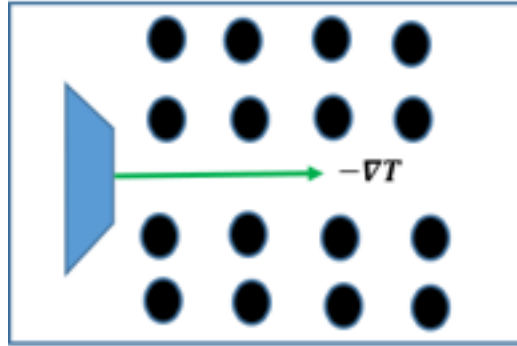


Figura 6.1: Distribución más probable de personas en un auditorio con aire acondicionado

6.3. Propiedades del operador gradiente

1. *El gradiente de un campo escalar es un vector perpendicular a la superficie $\phi(x, y, z) = \text{cte}$ en cualquier punto de ella.*

El diferencial de $\phi(x, y, z)$ es:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \quad (6.6)$$

Utilizando el producto punto se puede escribir:

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \right) \circ (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = 0 \quad (6.7)$$

Es decir:

$$d\phi = \nabla\phi \circ d\vec{r} = 0 \quad (6.8)$$

Lo que demuestra la propiedad enunciada.

Obsérvese que el gradiente posibilita la construcción de vectores unitarios perpendiculares a una superficie.

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (6.9)$$

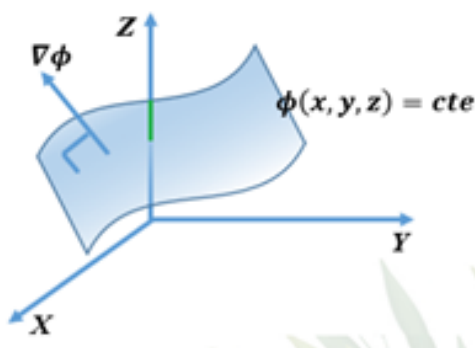


Figura 6.2: El vector gradiente en un punto cualquiera de una superficie

La figura 6.3 muestra la superficie de nivel

$$1 = x - y + z \quad (6.10)$$

Y el vector gradiente,

$$\nabla(x - y + z) = (1, -1, 1) \quad (6.11)$$

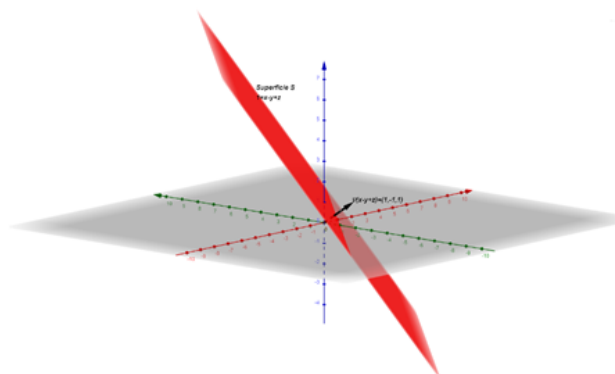


Figura 6.3: El vector gradiente sobre la superficie $1 = x - y + z$ en el punto $(1, -1, 1)$

2. *El gradiente de un campo escalar corresponde a la derivada direccional del campo escalar ϕ en la dirección $\vec{a}$ las, y, además, su magnitud es igual a la mayor variación del campo escalar en dicha dirección.*

La derivada direccional del campo escalar ϕ en la dirección $\frac{d\vec{r}}{ds}$, es:

$$\frac{d\phi}{dS} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dS} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dS} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dS} \quad (6.12)$$

Utilizando el producto punto, se tiene:

$$\frac{d\phi}{dS} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{k} \right) \circ \left(\frac{dx}{dS} \hat{i} + \frac{dy}{dS} \hat{j} + \frac{dz}{dS} \hat{k} \right) \quad (6.13)$$

Es decir:

$$\frac{d\phi}{dS} = \nabla\phi \circ \frac{d\vec{r}}{dS} \quad (6.14)$$

Como

$$\frac{d\vec{r}}{dS} \quad (6.15)$$

es un vector unitario, entonces:

$$\frac{d\phi}{dS} \quad (6.16)$$

es igual a la componente de $\nabla\phi$ en la dirección $\frac{d\vec{r}}{dS}$.

Además, como:

$$\nabla\phi \circ \frac{d\vec{r}}{dS} = |\nabla\phi| \left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| \cos\theta \quad (6.17)$$

Por lo que:

$$\left(\frac{d\phi}{dS} \right)_{\max} = |\nabla\phi| \quad (6.18)$$

6.4. La ley de transmisión del calor por conducción

En 1822, *Jean-Baptiste-Joseph Fourier* (1768 - 1830) Ingeniero y matemático francés, publicó su trabajo *Teoría analítica del calor* y con él su ley de transmisión del calor por conducción, la cual establece que

En un medio homogéneo el flujo de calor que se transmite desde una fuente caliente hacia una fuente fría. es proporcional al área transversal del medio mediante el cual se transmite el calor y al gradiente de temperatura, pero en dirección contraria a éste; la constante de proporcionalidad se llama la conductividad térmica del conductor (k).

$$\frac{dQ}{dT} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (6.19)$$

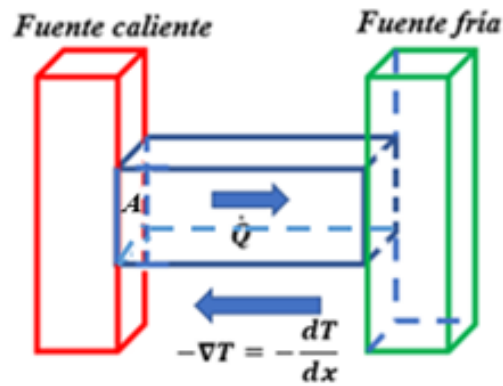


Figura 6.4: Transmisión del calor por conducción

Las unidades de la conductividad térmica, k , en el sistema M.K.S son:

$$[k]_{M.K.S} = \frac{W}{mK} \quad (6.20)$$

Si siguiendo la notación utilizada por Newton, $\frac{dQ}{dT}$ suele escribirse como $\dot{Q}$.

Si se mira la ley de *Fourier*, se puede interpretar el gradiente de temperatura como la razón entre la diferencia de temperatura entre dos puntos y la distancia que los separa. Interpretación similar se puede hacer de otros gradientes:

Gradiente de altura Mide el grado de inclinación de algo, por ejemplo, de un terreno. Se mide mediante la pendiente de la inclinación, es decir, mediante la razón entre la distancia vertical y la distancia horizontal. Sin más palabras por la pendiente. Sin embargo, en las competencias ciclisticas se suele oír que un determinado premio de montaña tiene un gradiente de tantos grados.

Gradiente de presión La diferencia de presión entre dos puntos de un fluido. En el aire este gradiente de presión es aprovechado por el chulo o gallinazo para alcanzar grandes alturas y grandes distancias sin el movimiento de sus alas.

Gradiente de voltaje La relación entre los voltajes de dos superficies equipotenciales, es decir, entre dos superficies que tienen el mismo potencial en todos sus puntos.

Gradiente de concentración Muy utilizado en química. Mide la diferencia de concentración de iones, entre dos puntos dentro de una membrana, por ejemplo.

Y así ...

6.5. El operador Divergencia

Sea $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial; si lo operamos según el producto punto con el operador nabla se obtiene lo que se denomina *la divergencia* del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$. Es decir:

$$\nabla \circ \vec{F}(x, y, z)$$

Se llama la divergencia de $\vec{F}$.

Si se considera que el campo vectorial es:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad (6.21)$$

Entonces:

$$\nabla \circ \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \circ (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \quad (6.22)$$

$$\nabla \circ \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (6.23)$$

Obsérvese que la divergencia de un campo vectorial da un campo escalar.

Ejemplo

Considérese el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = 3x^2z^2\hat{i} + 4y^2xz\hat{j} - z^3\hat{k}$$

Entonces:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial(3x^2z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(4y^2xz)}{\partial y} + \frac{\partial(-z^3)}{\partial z}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = 6xz^2 + 8yxz - 3z^2$$

Esta divergencia puede calcularse en punto cualquiera del espacio, por ejemplo, $(-2, 1, 4)$

$$\vec{F}(x, y, z)_{(-2, 1, 4)} = 6(-2)(4)^2 + 8(1)(-2)(4) - 3(4)^2$$

$$\vec{F}(x, y, z) = -304$$

La pregunta es, ¿304 qué? Si suponemos que el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = 3x^2z^2\hat{i} + 4y^2xz\hat{j} - z^3\hat{k}$$

nos describe la velocidad del agua en cada punto del espacio, entonces se diría que en el punto $(-2, 1, 4)$ del espacio está entrando un flujo de agua de $-304 \frac{m^3}{sg}$.

Es decir que la divergencia de un campo vectorial se puede interpretar como el flujo del campo en cuestión por unidad de volumen cuando el volumen tiende a cero.

Es decir:

$$\nabla \circ \vec{F}(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{F} \circ d\vec{S}$$

Donde $\oint \vec{F} \circ d\vec{S}$ es una integral de superficie o una integral de flujo. Por ello, una divergencia positiva se asocia a una fuente de campo mientras que una divergencia negativa se asocia con un sumidero. Es decir que, si en un punto del espacio la divergencia de un campo vectorial es positiva, se considera que desde ese punto el campo está divergiendo, en caso contrario se considera que el campo está convergiendo en dicho punto.

Ejemplo

Hallar

$$\nabla \circ (r^3 \vec{r})$$

El vector de posición $\vec{r}$ es:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Y su magnitud es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por lo que el ejercicio a resolver se puede escribir como:

$$\nabla \circ (r^3 \vec{r}) = \nabla \circ \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \right]$$

$$\nabla \circ (r^3 \vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \circ \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla \circ (r^3 \vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \right] x + \frac{\partial}{\partial y} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \right] y \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \right] z \end{aligned}$$

Realizando la derivada con respecto a x , se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} x \right] = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (2x) x + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

Similarmente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} y \right] = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (2y) y + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} z \right] = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (2z) z + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \nabla \circ (r^3 \vec{r}) = & 3 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} x^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \\ & + 3 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} y^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \\ & + 3 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} z^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \end{aligned}$$

$$\nabla \circ (r^3 \vec{r}) = \left[3 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right] (x^2 + y^2 + z^2) + 3 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

$$\nabla \circ (r^3 \vec{r}) = [3r] r^2 + 3r^3$$

$$\nabla \circ (r^3 \vec{r}) = 6r^3$$

En física se tiene que el campo eléctrico, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ producido por una carga eléctrica puntual tiene divergencia positiva diferente de cero cuando la carga eléctrica es positiva y su divergencia es negativa diferente de cero si la carga eléctrica que lo produce es negativa, por eso suele representarse como:

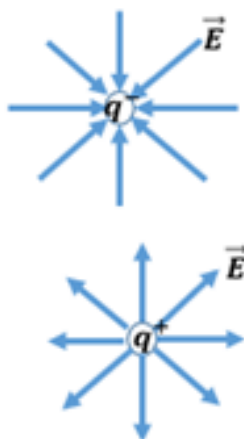


Figura 6.5: Campo eléctrico convergente y campo eléctrico divergente

El campo eléctrico dentro de un condensador de placas planas paralelas tiene divergencia cero, si no se tienen en cuenta las deformaciones en los extremos.

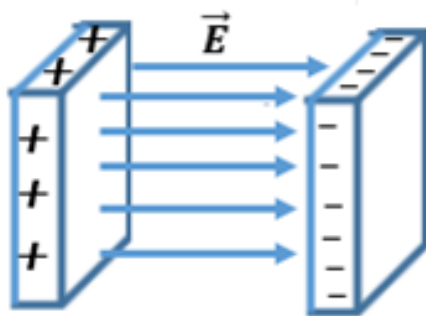


Figura 6.6: Campo eléctrico con divergencia cero

La divergencia del campo magnético $\vec{B}$, producido por un solenoide es cero, al igual que la divergencia del campo magnético $\vec{B}$ producido por un imán de barra.

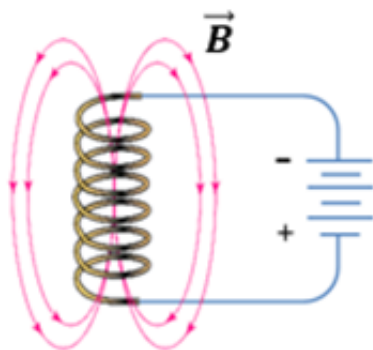


Figura 6.7: Campo magnético con divergencia cero

Se dice que, en general, todo campo vectorial que tiene divergencia nula en todo punto es solenoidal. Aunque hay que tener presente que para ello existe una condición fuerte.

La segunda ecuación de Maxwell o ley de Gauss para el campo magnético, nos dice que el campo magnético en general es solenoidal.

$$\nabla \circ \vec{B} = 0 \quad (6.24)$$

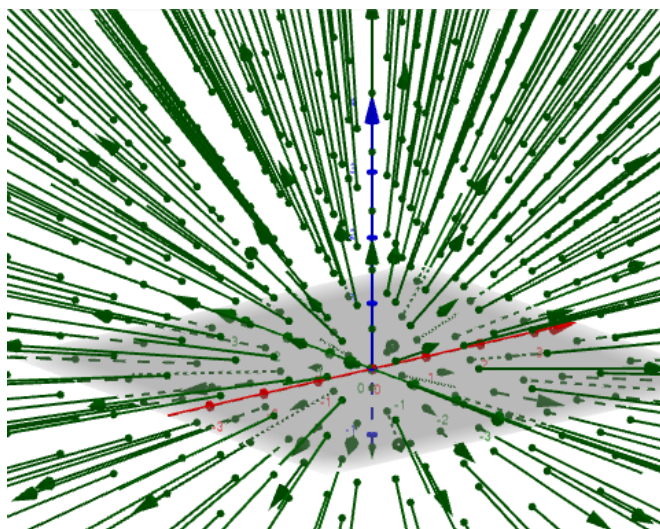


Figura 6.8: Representación tridimensional del campo $r^3\vec{r}$

6.6. El operador rotacional de un campo vectorial

Sea el campo vectorial

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad (6.25)$$

entonces:

$$\nabla \times \vec{A} \quad (6.26)$$

Se llama el rotacional del campo vectorial $\vec{A}$.

Utilizando la definición del operador nabla, se tiene que el rotacional del campo vectorial $\vec{A}$ es:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \quad (6.27)$$

Resolviendo por medio del determinante:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (6.28)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (6.29)$$

Ejemplo

Hallar el rotacional del Campo Vectorial

$$\vec{M} = 2x^2y\hat{i} - z^3y^3\hat{j} + xz^3\hat{k}$$

Solución

$$\nabla \times \vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & -z^3y^3 & xz^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{M} &= \left(\frac{\partial xz^3}{\partial y} - \frac{\partial (-z^3y^3)}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial 2x^2y}{\partial z} - \frac{\partial xz^3}{\partial x} \right) \hat{j} \\ &+ \left(\frac{\partial (-z^3y^3)}{\partial x} - \frac{\partial 2x^2y}{\partial y} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{M} = (3z^2y^3) \hat{i} - (z^3) \hat{j} - (2x^2) \hat{k}$$

Calculado en el punto $(-1, 3, 1)$ será:

$$\nabla \times \vec{M}_{(-1,3,1)} = 81\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

Ejemplo

Hallar

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right)$$

Recordando que:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Entonces:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \nabla \times \left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) &= \left(\frac{\partial \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial z} \right) \hat{i} \\ &+ \left(\frac{\partial \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial x} \right) \hat{j} \\ &+ \left(\frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial y} \right) \hat{k}\end{aligned}$$

Realizando la primera derivada, se obtiene:

$$\frac{\partial \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial y}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial y} = \frac{0 - 2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial y} = \frac{-2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Similarmente las otras derivadas dan:

$$\frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial z} = \frac{2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial z} = \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial x} = \frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) &= \left(\frac{-2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right) \hat{i} \\ &+ \left(\frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right) \hat{j} \\ &+ \left(\frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = \vec{0}$$

Nótese que el rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial.

El rotacional de un campo vectorial se puede interpretar como la circulación del campo vectorial sobre un camino cerrado que limita un área con dirección normal a ella misma cuando el área tiende a cero. Es decir:

$$\nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{A} \circ d\vec{r} \quad (6.30)$$

Físicamente se puede pensar en la siguiente situación. Si se está a orillas de un río uno encuentra regiones del río donde el agua corre mansamente (ahí es donde nos bañamos los que no sabemos nadar); si uno construye un molinete y pone en contacto uno de los brazos del molinete con el agua, el molinete no gira. Se dice entonces que el agua en esa región no tiene rotacional, o más precisamente que el campo de velocidades del agua tiene rotacional cero. Pero en otras regiones del río, al poner en contacto el molinete con el agua, éste comienza a girar. Se dirá entonces, que en esa región el campo de velocidades tiene rotacional diferente de cero.

Ni que decir del campo de velocidades en aquellas regiones peligrosas de los ríos y que se llaman remolinos. Igual sucede con el campo de velocidades de los tornados. También rota el campo magnético alrededor de una corriente eléctrica, tal como lo establece la ley de Ampere, y el campo eléctrico en una espira tal como lo establece la ley de Faraday-Lenz.

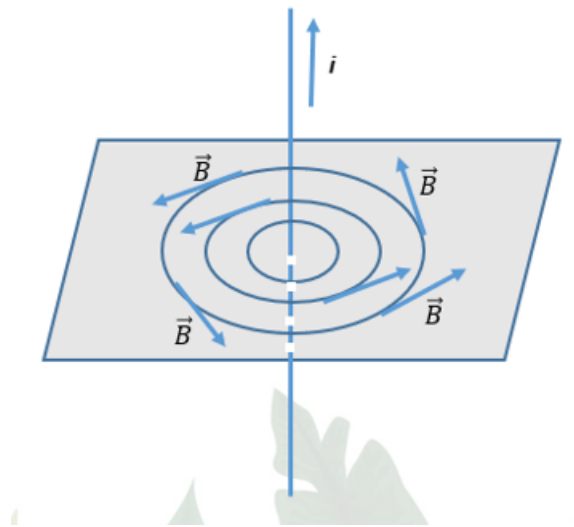


Figura 6.9: Ley de Ampere

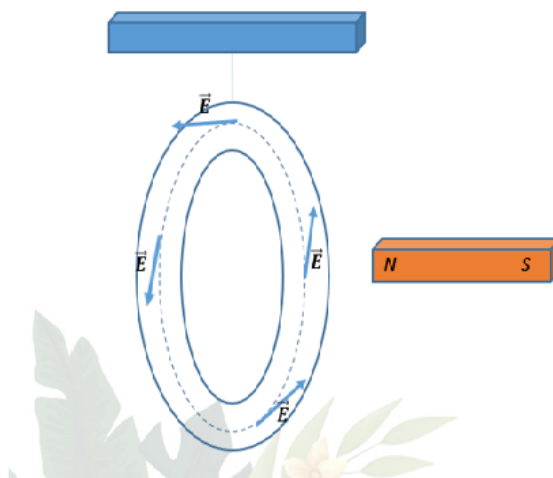
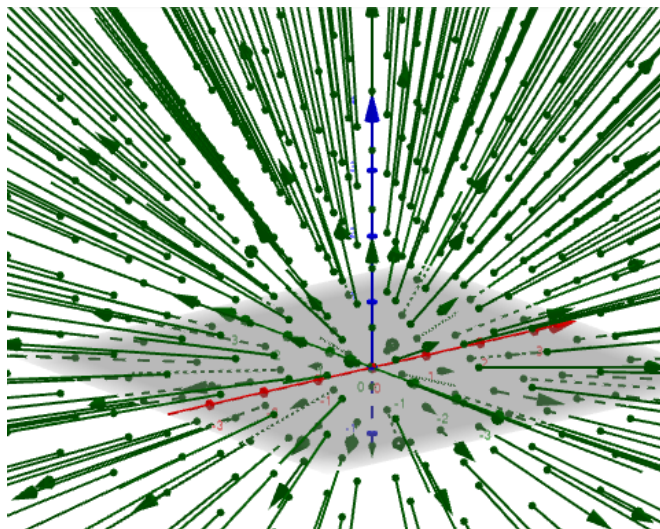


Figura 6.10: Ley de Faraday - Lenz

Figura 6.11: Representación tridimensional del campo $\frac{\vec{r}}{r^3}$

6.7. El operador laplaciano de un campo escalar

Sea

$$\Phi = \Phi(x, y, z) \quad (6.31)$$

un campo escalar.

Entonces:

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) \quad (6.32)$$

Se llama el laplaciano de Φ .

Teniendo en cuenta que

$$\vec{r} \circ \vec{r} = r^2 \quad (6.33)$$

entonces el laplaciano se puede interpretar como:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \circ \nabla \Phi \quad (6.34)$$

Es decir, la divergencia del gradiente de Φ .

El laplaciano es, por lo tanto:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (6.35)$$

Ejemplo

Encontrar

$$\nabla^2 (x^3 y^2 e^{xz})$$

en el punto $(1, -1, 1)$.

$$\nabla^2 (x^3 y^2 e^{xz}) = \frac{\partial^2 (x^3 y^2 e^{xz})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x^3 y^2 e^{xz})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (x^3 y^2 e^{xz})}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 (x^3 y^2 e^{xz}) = \frac{\partial (3x^2 y^2 e^{xz} + x^3 y^2 z e^{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (2x^3 y e^{xz})}{\partial y} + \frac{\partial (x^4 y^2 e^{xz})}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 (x^3 y^2 e^{xz}) &= (6xy^2 e^{xz} + 2x^2 y^2 z e^{xz} + 3x^2 y^2 z e^{xz} + x^3 y^2 z^2 e^{xz}) \\ &\quad + (2x^3 e^{xz}) + (x^5 y^2 e^{xz}) \end{aligned}$$

Calculando en el punto $(1, -1, 1)$ se tiene:

$$\nabla^2 (x^3 y^2 e^{xz})_{(1,-1,1)} = (4e + 2e + 3e + e) + (2e) + (e)$$

$$\nabla^2 (x^3 y^2 e^{xz})_{(1,-1,1)} = 13e$$

6.8. Clasificación de los campos

6.8.1. Campo vectorial incompresible o solenoidal - conservativo o irrotacional

Cuando un campo vectorial $\vec{A}$ tiene divergencia nula, se dice que el campo es un campo vectorial solenoidal o un campo vectorial incompresible.

Si

$$\nabla \circ \vec{A} = 0 \quad (6.36)$$

$\vec{A}$ es campo vectorial solenoidal o campo vectorial incompresible

De otra parte, si el rotacional del campo vectorial $\vec{A}$ es nulo entonces se dice que el campo vectorial $\vec{A}$ es un campo vectorial irrotacional o un campo vectorial conservativo.

Si

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{0} \quad (6.37)$$

$\vec{A}$ es un campo vectorial irrotacional o conservativo.

Un campo vectorial $\vec{A}$ con ambas condiciones es por tanto un campo vectorial *incompresible o solenoidal- conservativo o irrotacional*.

Un campo vectorial que cumple con ambas condiciones es de la forma:

$$\vec{A} = k\hat{i} \quad (6.38)$$

En la figura 6.12 se muestra una representación tridimensional de un campo de este tipo para $k = 3$ y en la figura 6.13 una representación bidimensional.

También puede decirse que $\vec{A}$ es un campo uniforme.

Definición.

Cuando un campo vectorial $\vec{A}$ es conservativo se puede expresar como menos el gradiente de un campo escalar U , el cual se llama el potencial de $\vec{A}$.

Si $\vec{A}$ es un campo vectorial conservativo entonces:

$$\vec{A} = -\nabla U \quad (6.39)$$

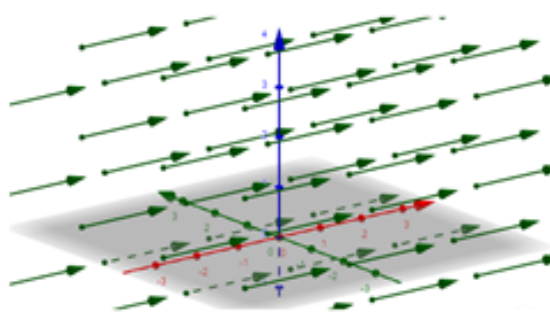


Figura 6.12: Representación tridimensional de un campo vectorial solenoidal conservativo

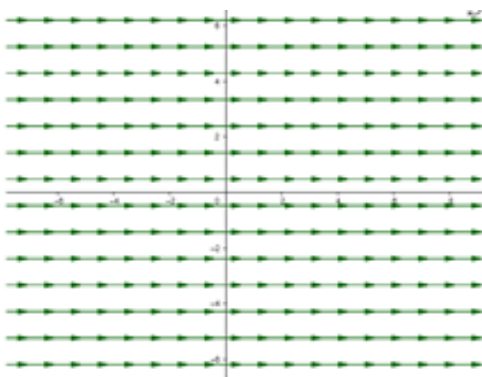


Figura 6.13: Representación unidimensional de un campo conservativo solenoidal

6.8.2. Campo vectorial convergente (divergente) e irrotacional (conservativo)

Un campo vectorial cuya divergencia sea diferente de cero se llama un campo vectorial divergente o convergente. Será convergente si el campo fluye hacia un punto del espacio (una carga eléctrica puntual negativa, por ejemplo) y será divergente si el campo fluye desde un punto del espacio (una carga eléctrica puntual positiva, por ejemplo).

Si

$$\nabla \circ \vec{A} \neq 0 \quad (6.40)$$

$\vec{A}$ es un campo vectorial convergente o divergente.

Si además el campo vectorial $\vec{A}$ es conservativo (irrotacional), es decir:

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (6.41)$$

Y

$$\nabla \circ \vec{A} > 0 \quad (6.42)$$

Entonces se habla de un campo de un *campo vectorial conservativo (irrotacional)-divergente* cuya ecuación es de la forma:

$$\vec{A} = k\vec{r} \quad (6.43)$$

Donde k es una constante.

Pero si el campo vectorial $\vec{A}$ es conservativo (irrotacional), es decir:

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (6.44)$$

Y

$$\nabla \circ \vec{A} < 0 \quad (6.45)$$

Entonces se habla de un *campo vectorial conservativo (irrotacional)-convergente* cuya ecuación es de la forma:

$$\vec{A} = -k\vec{r} \quad (6.46)$$

Donde k es una constante.

La figura 6.14 muestra un *campo vectorial conservativo - Divergente*, mientras que la figura 6.15 muestra un *campo vectorial conservativo - convergente*, en ambas gráficas

$$k = 1$$

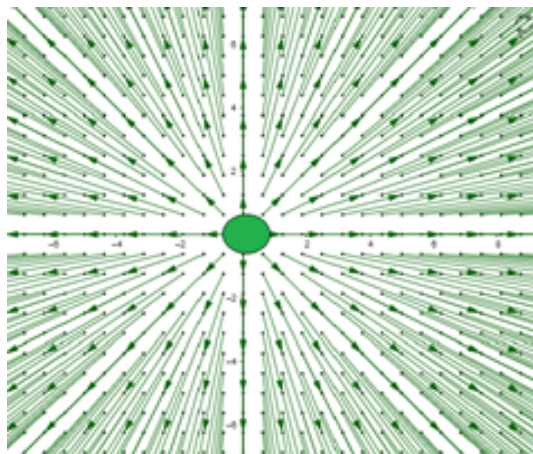


Figura 6.14: Campo vectorial conservativo divergente

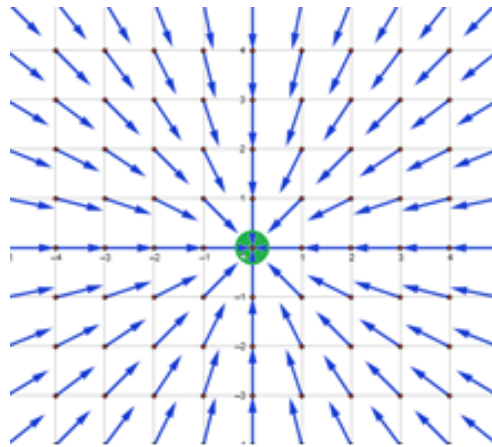


Figura 6.15: Campo vectorial conservativo convergente

6.8.3. Campo vectorial Solenoidal (incompresible) no conservativo

Un campo vectorial cuya divergencia sea igual a cero, pero su rotacional sea diferente de cero se llama un *campo vectorial solenoidal no conservativo*.

Si el campo vectorial $\vec{A}$ es solenoidal

$$\nabla \circ \vec{A} = 0 \quad (6.47)$$

Pero no conservativo

$$\nabla \times \vec{A} \neq 0 \quad (6.48)$$

Se dice que $\vec{A}$ es un campo solenoidal no conservativo.

Su ecuación es de la forma

$$\vec{A} = \vec{k} \times \vec{r} \quad (6.49)$$

Con

$$\vec{k} = \text{constante} \quad (6.50)$$

Por ejemplo, el campo vectorial

$$\vec{G}(x, y, z) = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (6.51)$$

Cuyo desarrollo da:

$$\vec{G}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j} \quad (6.52)$$

Es un campo vectorial solenoidal no conservativo.

Fácilmente se ve que su divergencia es cero, pues su segunda derivada da cero. De otra parte:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \quad (6.53)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (6.54)$$

$$\nabla \times \vec{A} = -\hat{k} \quad (6.55)$$

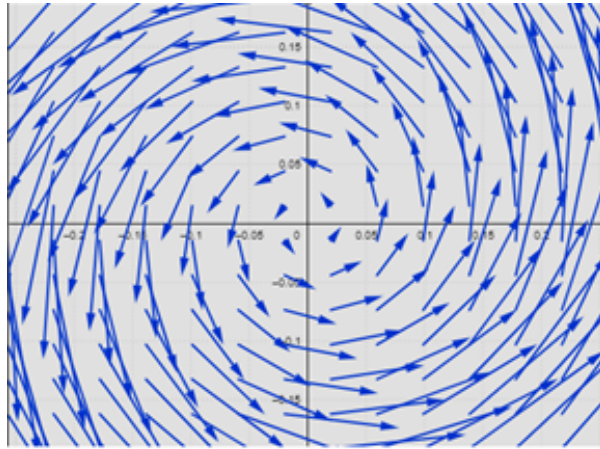


Figura 6.16: Campo vectorial solenoidal no conservativo

6.8.4. Campo vectorial divergente (convergente) no conservativo

Un campo vectorial cuya divergencia sea diferente de cero, y su rotacional también sea diferente de cero, se llama un *campo vectorial divergente (convergente) no conservativo*.

Si el campo vectorial $\vec{A}$ es tal que

$$\nabla \circ \vec{A} \neq 0 \quad (6.56)$$

y $\vec{A}$ es no conservativo

$$\nabla \times \vec{A} \neq 0 \quad (6.57)$$

Se dice que $\vec{A}$ es un campo divergente (convergente) no conservativo.

Su ecuación es de la forma

$$\vec{A} = \vec{k} \times \vec{r} + c\vec{r} \quad (6.58)$$

Con

$$\vec{k} \text{ y } c \text{ constantes.} \quad (6.59)$$

Por ejemplo, el campo vectorial

$$\vec{G}(x, y, z) = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) + (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (6.60)$$

Cuyo desarrollo da:

$$\vec{G}(x, y) = (x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j} + z\hat{k} \quad (6.61)$$

Es un *campo vectorial divergente no conservativo*. Figuras 6.17 y 6.18.

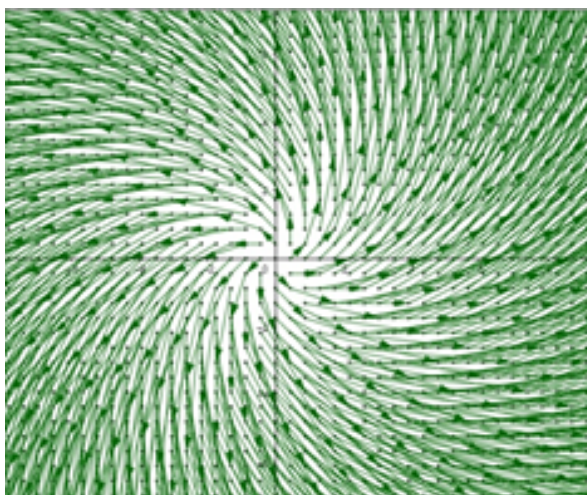


Figura 6.17: Campo vectorial divergente no conservativo

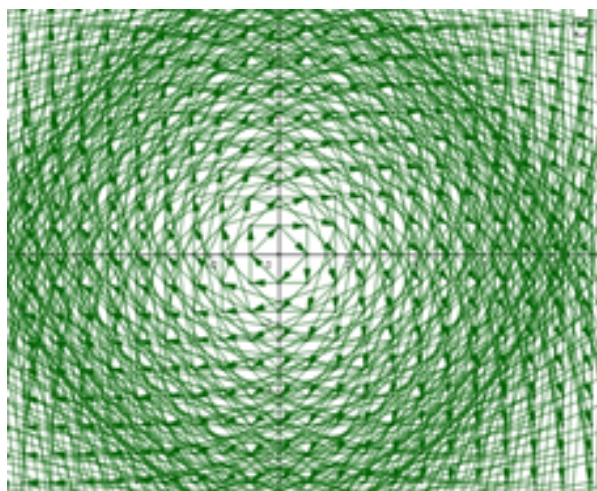


Figura 6.18: Campo vectorial convergente no conservativo

TALLER 7

1. Hallar $\nabla \phi$ siendo $\phi = (x^2 + y^2 + z^2) e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
2. Siendo $\phi = 2x^3y^2z^4$, hallar $\nabla \circ \nabla \phi$.
3. Hallar $\nabla |\vec{r}|^3$.
4. Siendo $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r}$ hallar $\nabla (\nabla \circ \vec{A})$.
5. Demostrar que $\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$
6. Siendo $\vec{\omega}$ un vector constante y $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, demostrar que $\nabla \circ \vec{v} = 0$.
7. hallar un vector unitario perpendicular a la superficie del paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 2, 5)$.
8. Siendo $F = x^2yz$ y $G = xy - 3z^2$ hallar $\nabla [(\nabla F) \circ (\nabla G)]$.
9. Si $\vec{A} = k\vec{r}$ muestre que $\nabla \circ \vec{A} = 3k$, siendo k una constante.
10. Si $\vec{A} = \vec{k} \times \vec{r}$ mostrar que $\vec{A}$ es solenoidal.
11. Siendo $\phi = 2x^3y^2z^4$, hallar $\nabla \circ \nabla \phi$.
12. ¿Para qué valor de la constante α el campo vectorial

$$\vec{A} = (\alpha xy - z^3) \hat{i} + (\alpha - 2) x^2 \hat{j} + (1 - \alpha) xz^2 \hat{k}$$

es irrotacional?

13. Siendo $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r}$ hallar $\nabla (\nabla \circ \vec{A})$.
14. Demostrar que $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$.

15. Demostrar que $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = \vec{0}$.
16. Encontrar $\nabla \times (e^{xy}\hat{i} + \sin xy\hat{j} + \cos^2 xz\hat{k})$
17. Calcular $\nabla \circ \nabla \times \vec{A}$ si $\vec{A} = x^2y\hat{i} + y^2z\hat{j} - 2xz\hat{k}$
18. Pruebe que $\nabla^2 (\ln r) = \frac{1}{r^2}$.
19. Mostrar $\vec{B} = (y + z \cos(xz))\hat{i} + x\hat{j} + x \cos(xz)\hat{k}$ es un campo conservativo.
20. Para un campo escalar V , mostrar que $\nabla \times \nabla V = \vec{0}$.
21. Determinar cuáles de los siguientes campos vectoriales son conservativos. Hallar la función potencial para los que son conservativos. Clasifique cada uno de los campos vectoriales.

$$a) \vec{F}(x, y, z) = xy^2z^2\hat{i} + x^2yz^2\hat{j} + x^2y^2z\hat{k}$$

$$b) \vec{Q}(x, y, z) = \frac{z}{y}\hat{i} - \frac{xz}{y^2}\hat{j} + \frac{x}{y}\hat{k}$$

$$c) \vec{P}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{j} + \hat{k}$$

APÉNDICES

Apéndice A

GRÁFICAS ESCALARES Y GRÁFICAS VECTORIALES

En alguna ocasión tuve que recibir una exposición que incluía la ley de Hooke y me presentaron algo así:

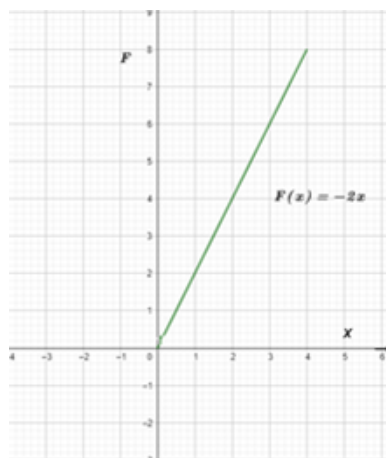


Figura A.1: Gráfica equivocada de la ley de Hooke.

Inmediatamente pregunté por qué si la recta tenía pendiente negativa estaba en el primer cuadrante y no en el segundo o cuarto cuadrante. Lo cierto era que

198 APÉNDICE A. GRÁFICAS ESCALARES Y GRÁFICAS VECTORIALES

ellos estaban confundiendo la ecuación escalar con la ecuación vectorial de la ley de Hooke. Es decir:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad \text{Ecuación vectorial de la ley de Hooke} \quad (\text{A.1})$$

$$F = kx \quad \text{Ecuación escalar de la ley de Hooke} \quad (\text{A.2})$$

Pues hay que recordar que la magnitud de un vector es siempre positiva. De tal forma que las respectivas gráficas son:

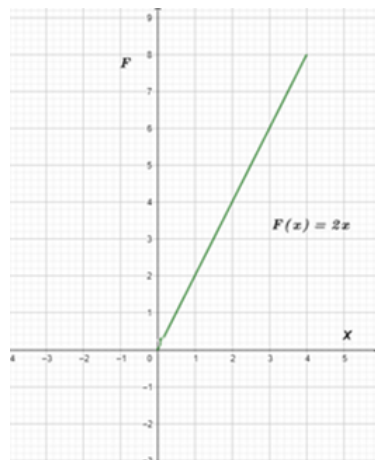


Figura A.2: Gráfica magnitud de la fuerza - estiramiento en la ley de Hooke.

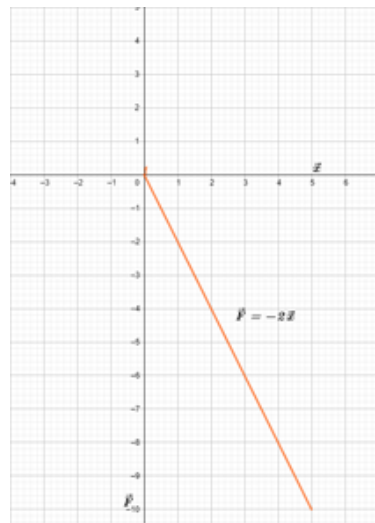


Figura A.3: Gráfica Fuerza - estiramiento de la ley de Hooke.

La diferencia entre una gráfica escalar y una gráfica vectorial también puede observarse en el problema de la caída de una partícula dentro de un medio que le produce una fricción en su movimiento, Gráfica A.4 y Gráfica A.5.

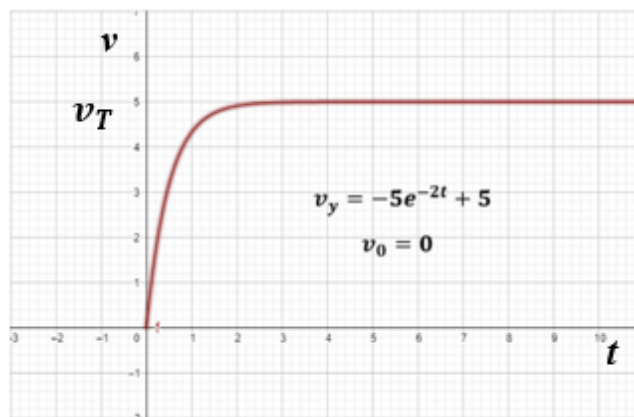


Figura A.4: Gráfica rapidez - tiempo para una partícula que cae dentro de un fluido.

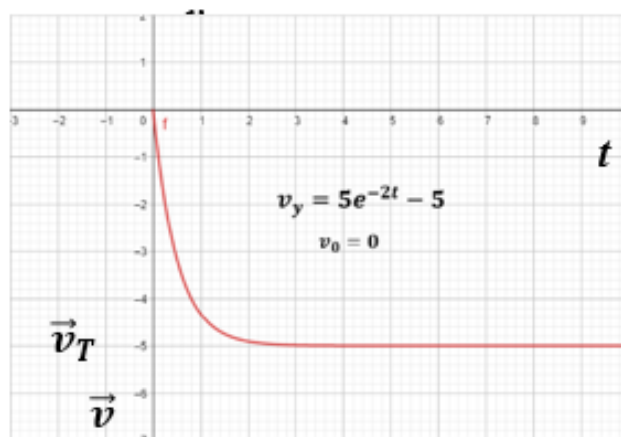


Figura A.5: Gráfica velocidad - tiempo para una partícula que cae dentro de un fluido.

En la primera gráfica se observa cómo aumenta la magnitud de la velocidad de la partícula desde un valor cero hasta la denominada velocidad terminal, en tanto que, en la segunda gráfica se observa cómo crece el vector velocidad desde una magnitud cero hasta una magnitud igual a la velocidad terminal si se considera la caída negativa.

Para ilustrar un poco más la diferencia entre una gráfica escalar y una gráfica vectorial se va a considerar una situación sencilla con el movimiento rectilíneo. Es que tengo la sensación (o, ¿la certeza?) que con la llegada del software la construcción y análisis de gráficos ha perdido interés, pero que para mi es fundamental, más si se estudia una carrera para la enseñanza de la física.

Supóngase que un automóvil se desplaza como sigue: parte de un punto O y avanza hasta un punto A durante 3 segundos con velocidad constante; luego parte hacia un punto B durante 2 segundos con aceleración constante. En B se detiene durante 2 segundos y después se desplaza hacia un punto C con velocidad constante durante tres segundos y donde vuelve a detenerse durante 1 segundo para luego regresar hasta D con velocidad constante durante 2 segundos.

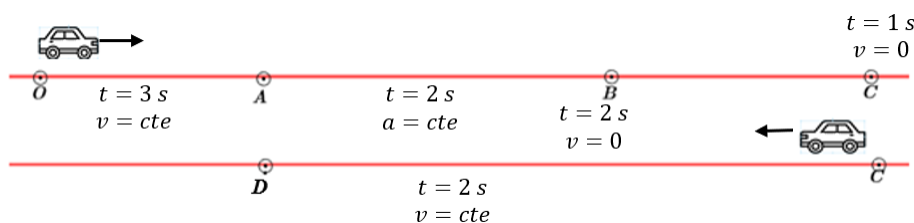


Figura A.6:

Para realizar las gráficas se tomaron los siguientes valores: entre O y A a la velocidad se le asignó un valor de **1**. La aceleración entre A y B se tomó como **2**. La velocidad entre B y C se le dio un valor de **2**, y entre C y D la velocidad fue de **3**.

La gráfica A.7 corresponde a la gráfica espacio recorrido o desplazamiento, x vs t . Se puede observar que el desplazamiento total del automóvil fue de **22 unidades** en un tiempo total de **13 segundos**.

La gráfica A.8 es la gráfica posición – tiempo, $\vec{x}$ vs t . Nos indica, mediante el vector $\Delta\vec{x}$ que al final del recorrido el automóvil ha tenido un cambio de posición de **4 unidades** en los **13 segundos** de recorrido respecto a su punto de partida. Obsérvese también, que la recta entre los **10** y los **13 segundos** tiene pendiente negativa, pues corresponde a la velocidad de regreso, la cual es negativa si las velocidades de ida se toman como positivas.

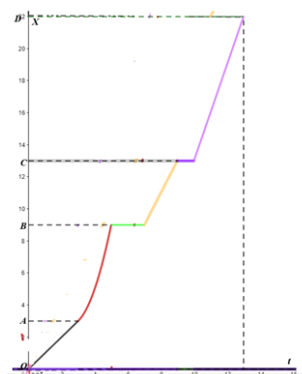


Figura A.7: Gráfica de rapidez - tiempo

202APÉNDICE A. GRÁFICAS ESCALARES Y GRÁFICAS VECTORIALES

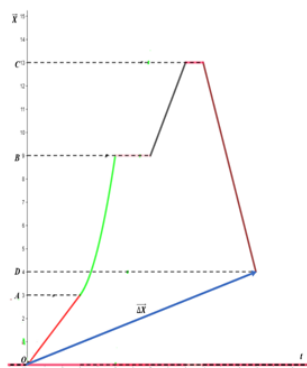


Figura A.8: Gráfica posición - tiempo

La gráfica A.9 corresponde a la gráfica rapidez- tiempo, v vs t . Se puede observar que en el trayecto $A-B$ se comienza con una rapidez inicial de 1 y se termina con una rapidez final de 5. La pendiente de la recta corresponde a la aceleración 2. Obsérvese también que el área total encerrada en la gráfica corresponde a la distancia total recorrida de **22 unidades**.

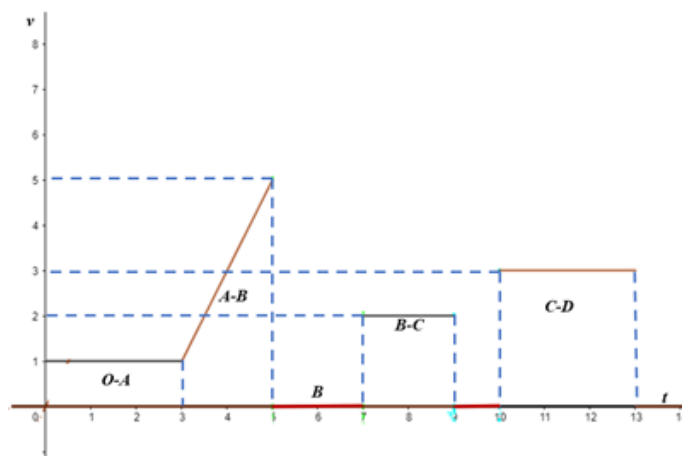


Figura A.9: Gráfica rapidez - tiempo

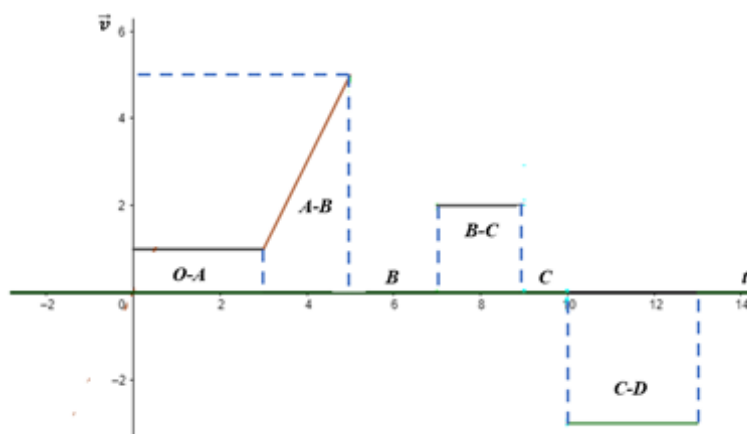


Figura A.10: Gráfica velocidad - tiempo

La gráfica A.10 corresponde a la gráfica velocidad – tiempo, $\vec{v}$ vs t . Obsérvese que la velocidad para el trayecto $C-D$ es negativa pues es la velocidad de regreso, la cual es de dirección opuesta a las otras velocidades.

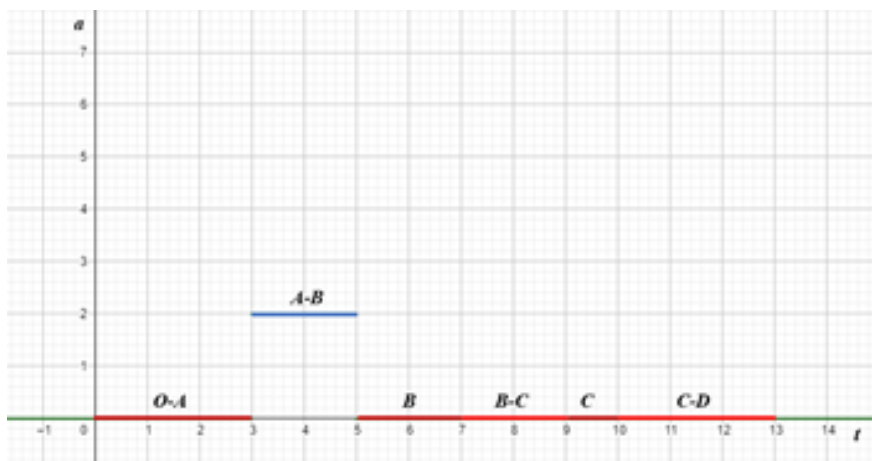


Figura A.11: Gráfica magnitud de la aceleración - tiempo

La gráfica A.11 corresponde a la gráfica magnitud de la aceleración – tiempo, a vs t , pero también puede corresponder a la gráfica aceleración – tiempo, a vs t , pues solo se asignó aceleración al trayecto $A-B$.

204APÉNDICE A. GRÁFICAS ESCALARES Y GRÁFICAS VECTORIALES

Pero para completar el ejercicio, si se le hubiera asignado aceleración al trayecto de regreso $C-D$, las gráficas correspondientes, $a \text{ vs } t$ y $\vec{a} \text{ vs } t$, serían las gráficas A.11 y A.12, las cuales se diferencian en la aceleración del trayecto $C-D$ que es de dirección opuesta a la aceleración del trayecto $A-B$.



Figura A.12: Gráfica aceleración - tiempo

Apéndice B

LA COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS SEGÚN GALILEO

“...puesto que Ptolomeo, Tycho, y otros astrónomos y filósofos, aparte de los argumentos de Aristóteles, confirmados y fortificados por ellos; presentan otros nuevos, considero que bien se podrían oír todos a la vez, para no tener que hacer la réplica luego, con las mismas o similares respuestas dos veces. Así, Sr. Simplicio, preferís referirlos vos mismo, o bien queréis que yo os alivie de esa carga; estoy dispuesto a complaceros”.

Le propone Salviati a Simplicio, quienes, junto a Sagredo, discuten sobre el modelo Tolemaico y el modelo Copernicano para explicar el universo. A lo que Simplicio responde:

... “Prefiero que seáis vos quien los expongáis, ya que, por haber hecho mejor estudio de ellos, lo haréis más rápidamente e incluso los aportaréis más numerosos”.

“Salviati. Sea como vos queréis. Todos, pues, presentan como mejor prueba, la deducida de la experiencia de los cuerpos graves, los cuales, cayendo desde lo alto, siempre lo hacen por una línea recta y perpendicular a la superficie de la Tierra; argumento, considerado irrefutable, de que la Tierra es inmóvil; pues, si ella se moviese con la rotación diurna, al dejar caer una piedra desde lo alto de una torre, y al ser arrastrada la torre por la rotación de la Tierra durante el tiempo que la piedra emplea en su caída, aquélla correría muchos centenares de brazas hacia oriente, y la piedra, en consecuencia, habría

de caer otro tanto espacio desplazada de la torre. Este efecto lo confirman con otra experiencia, es decir, dejando caer una bola de plomo desde la cima del mástil de una nave en reposo y señalando el lugar exacto donde esa bola incide, que es próximo al pie del mástil; y dejando caer la misma bola desde el mismo punto de la cima del mástil, estando la nave en movimiento, se observará que el punto de incidencia estará alejado del primer punto señalado en tanto espacio cuanto ha sido el del avance de la nave; y esto lo explican diciendo que el movimiento natural de una bola puesta en libertad es el de dirigirse en línea recta hacia el centro de la Tierra. . . ”

Después de una ardua y larga discusión Salviati concluye:

... “Sería, pues, su movimiento un compuesto de dos, esto es, aquel con que mide la torre y aquel con que la sigue; de ese compuesto resultaría que la piedra describiría no una línea simple recta y perpendicular, sino una transversal y tal vez no recta”.

Este es el principio de composición de los movimientos que establece Galileo, y que puede formularse como:

Si un cuerpo se encuentra sometido a más de un movimiento, cada uno de los movimientos se desarrolla con independencia de los demás.

Este es el caso de la bola de plomo cayendo de la cima de un mástil de un barco que se mueve. Puesto que la altura del mástil de un barco o velero es de alrededor de 16 m, se comprende que la curvatura de la tierra no tiene mayor incidencia en la situación, por tanto, puede considerarse que el barco se mueve en línea recta y con velocidad constante.

Por lo tanto, la caída de la bola de plomo se encuentra sometida al movimiento rectilíneo uniforme del barco (o como dice Galileo, la bola participa del movimiento del barco) y al movimiento de caída libre cuando se observa el barco desde la orilla. Para quienes viajan en el barco, por llevar la misma velocidad horizontal que la bola y el barco verán caer la bola directamente hacia el piso. Es decir:

Desde la orilla

$$x = vt \tag{B.1}$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \tag{B.2}$$

Y, por tanto, eliminando el parámetro t , se tiene:

$$y = \frac{g}{2v^2}x^2 \quad (\text{B.3})$$

Que es la *transversal y tal vez no recta* que decía Galileo y que nosotros llamamos Parábola. Desde el barco:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{B.4})$$

La bola cae en línea recta.

Para ambos la bola cae justo al pie del mástil.

La participación del movimiento del barco por la bola de plomo, lo saben muy bien quienes se bajan de un carro en movimiento, pues saben que al desprenderse del carro llevan la misma velocidad del carro y por tanto deben saltar de tal manera que paren paulatinamente.

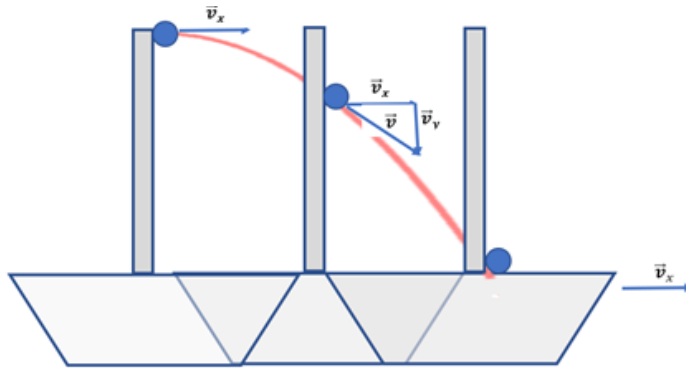


Figura B.1: Caída de una masa desde lo alto de un mástil de un velero en movimiento según Galileo.

Suponiendo una velocidad de $40 \frac{Km}{Hr}$, $11,1 \frac{m}{sg}$, para Simplicio (los aristotélicos) La bola de plomo caería:

$$x = \left(11,1 \frac{m}{sg} \right) (1,08 sg) \quad (B.5)$$

$$x = 11,98m \quad (B.6)$$

Por detrás del mástil.

Y, ¿qué pasa si la bola de plomo cae desde una torre de **400m** de altura, la cual es arrastrada por la rotación de la tierra? En este caso la curvatura y la rotación de la tierra deben tenerse en cuenta y, la situación se analiza desde el punto de vista de un observador ligado a la tierra el cual es un observador no inercial que observa la bola de plomo en caída libre. Al fin y al cabo, en la época de Galileo pensar en un observador inercial ubicado en el espacio era poco probable el cual observaría efectos como la fuerza de Coriolis.

Se sabe que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (B.7)$$

Donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de la bola de plomo cuando se encuentra sobre una circunferencia de radio $\vec{r}$.

Asumiendo que la órbita es circular, entonces:

$$v = \omega r \quad (B.8)$$

Por lo tanto, la velocidad en la punta es mayor que en el piso. En caída libre después de un tiempo t habrá descendido

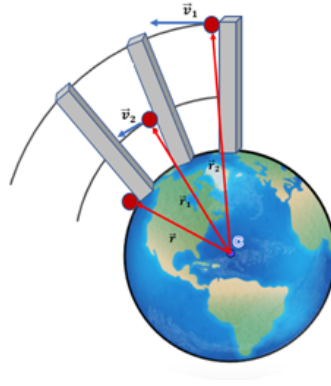


Figura B.2: Caída de bola de plomo según Galileo.

$$\Delta h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{B.9})$$

Y por lo tanto la velocidad tangencial se habrá disminuido en

$$\Delta v = w \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{B.10})$$

Para un tiempo T total de caída tendremos

$$H = \frac{1}{2}gT^2 \quad (\text{B.11})$$

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (\text{B.12})$$

Y, como:

$$\Delta v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{B.13})$$

Entonces:

$$\Delta x = \int_0^t \frac{1}{2} w g t^2 dt \quad (\text{B.14})$$

$$\Delta x = \frac{1}{6} w g T^3 \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta x = \frac{1}{6} w g \left(\frac{2H}{g} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{B.16})$$

Calculando para **400m**:

$$\Delta x = \frac{1}{6} (7,27 \times 10^{-5}) s g^{19,8} \frac{m}{s g^2} \left(\frac{2 \times 400m}{9,8 \frac{m}{s g^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{B.17})$$

$$\Delta x = 8759,38 \times 10^{-5} m \quad (\text{B.18})$$

$$\Delta x = 0,088m \quad (\text{B.19})$$

Para

$$H = 4Km \quad (\text{B.20})$$

$$\Delta x = \frac{1}{6} (7,27 \times 10^{-5}) s g^{-19,8} \frac{m}{s g^2} \left(\frac{2 \times 40000m}{9,8 \frac{m}{s g^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{B.21})$$

$$\Delta x = 276952,95 \times 10^{-5} m \quad (\text{B.22})$$

$$\Delta x = 2,76m \quad (\text{B.23})$$

Si la bola de plomo cayera exclusivamente con un movimiento de caída libre, la bola de plomo caería:

$$x = wrt \quad (\text{B.24})$$

$$x = (7,25 \times 10^{-5} \text{sg}^{-1}) (6371 \times 10^3 \text{m}) (9,03 \text{sg}) \quad (\text{B.25})$$

$$x = 4170,9m \quad (\text{B.26})$$

al oeste de la torre según Simplicio (los aristotélicos).

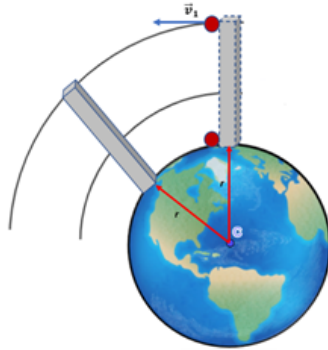


Figura B.3: Caída de la bola de plomo según la teoría Aristotélica

Apéndice C

LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

NEWTON AL VOLANTE

*El astronauta Bill Anders iba camino a la luna en el Apolo 8 cuando, en una comunicación por radio, su hijo pequeño le preguntó quién conducía la nave. **Isaac Newton**, replicó Anders, con lo que quiso decir que no hay necesidad de conducir una nave espacial como se conduce un coche, continuamente, sin quitar la vista del camino, corrigiendo el rumbo con ligeros golpes de volante, de acelerador y de freno. Tras el lanzamiento, una vez fuera de la atmósfera, la nave queda a merced de la fuerza de gravedad, como cualquier objeto en el espacio. Si las cosas están bien calculadas (si se han sabido ajustar las condiciones iniciales), sucede lo que dice el capitán Haddock cuando el profesor Tornasol le pregunta retóricamente qué cree que ocurrirá si el cohete en el que viajan sigue avanzando en dirección a la luna: **Acabaríamos por llegar, supongo.** (de Régules, Sergio. *Las teorías del caos y la complejidad. El mundo es un caleidoscopio. Colección descubrir la ciencia.* Impresa Ibérica. España. 2016.)*



Figura C.1: Isaac Newton 1642 - 1727

Para deducir la ley de gravitación universal, puede considerarse que un planeta con masa gira alrededor del sol siguiendo una órbita circular, lo cual no le quita validez alguna pues, al fin y al cabo, las órbitas de los planetas tienen excentricidad pequeña; Venus 0.0068, Neptuno 0.0086, tierra 0.0167, Urano 0.0472, júpiter 0.0484, saturno 0.0541, marte 0.0934 y los de mayor excentricidad Mercurio 0.2056 y Plutón 0.2488. (https://es.wikipedia.org/wiki/Excentricidad_orbital). Recuérdese que la excentricidad de una elipse se encuentra entre 0 y 1 y la de la circunferencia es 0.

Por tanto, el planeta en su órbita tiene una aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (\text{C.1})$$

Pero:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{C.2})$$

En el caso de una órbita circular, se tiene:

$$v = \omega r \quad (\text{C.3})$$

Por tanto:

$$a_c = \frac{w^2 r^2}{r} \quad (\text{C.4})$$

$$a_c = w^2 r \quad (\text{C.5})$$

Puesto que:

$$w = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{C.6})$$

Entonces:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad (\text{C.7})$$

La fuerza con que es atraído un planeta por el sol no es más que la fuerza centrípeta (por lo menos para una órbita circular) con que el planeta gira alrededor del sol, es decir:

$$F_c = m_p a_c \quad (\text{C.8})$$

$$F_c = m_p \left(\frac{4\pi^2}{T^2} r \right) \quad (\text{C.9})$$

La tercera ley de Kepler establece que la razón del cuadrado del período de rotación de un planeta alrededor del sol al cubo de su distancia al sol es la misma para todos los planetas, es decir:

$$\frac{T^2}{r^3} = k \quad (\text{C.10})$$

Reemplazando el cuadrado del período y, teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta no es más que la fuerza con que el sol atrae al planeta, es decir, la fuerza gravitacional, se tiene:

$$F_g = \frac{4\pi^2}{kr^2} m_p \quad (\text{C.11})$$

$$F_g = q_p \frac{m_p}{r^2} \quad (\text{C.12})$$

Donde:

$$q_p = \frac{4\pi^2}{k} \quad (\text{C.13})$$

Se puede considerar como una constante asociada al planeta que orbita alrededor del sol.

Pero la tercera ley de Newton establece que a toda acción le corresponde una reacción, de tal forma que el planeta ejerce sobre el sol una fuerza de atracción igual en magnitud a la ejercida por el sol sobre el planeta. Es decir:

$$F_g = q_s \frac{m_s}{r^2} \quad (\text{C.14})$$

Por tanto:

$$q_p \frac{m_p}{r^2} = q_s \frac{m_s}{r^2} \quad (\text{C.15})$$

$$q_p m_p = q_s m_s \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{q_p}{m_s} = \frac{q_s}{m_p} = G \quad (\text{C.17})$$

Lo que significa que la razón inversa entre las masas y las constantes del planeta y el sol es constante, la cual se ha llamado G .

De tal forma que:

$$q_p = Gm_s \quad (\text{C.18})$$

Por tanto:

$$F_g = Gm_s \frac{m_p}{r^2} \quad (\text{C.19})$$

Pero como la fuerza es una cantidad vectorial y además es atractiva entonces:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_s m_p}{r^2} \hat{r} \quad (\text{C.20})$$

Donde $\hat{r}$ es el vector unitario construido sobre el vector que posiciona al planeta respecto al sol.

Esta es la *ley de gravitación universal* deducida por Newton en el tercer libro de sus *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the world*.

Esta ley también puede escribirse como:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_s m_p}{r^3} \vec{r} \quad (\text{C.21})$$

Teniendo en cuenta que:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{C.22})$$

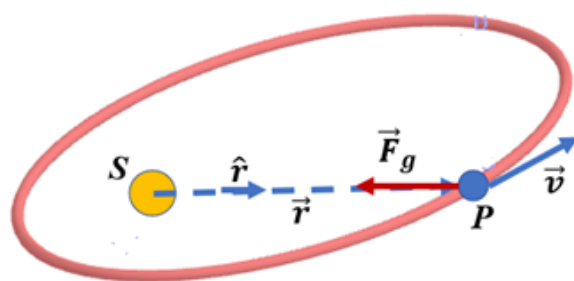


Figura C.2: Planeta en su órbita elíptica alrededor del sol bajo la influencia de la ley de la gravitación

Apéndice D

UN PROBLEMA CON HISTORIA

“Era enero de 1684, y Hooke compartía mesa con otros dos insignes tertulianos, Edmund Halley y Christopher Wren. Discutían sobre uno de los problemas que han preocupado a la humanidad desde tiempos inmemoriales: ¿cómo y por qué se mueven los planetas en el cielo? Los tres tenían en común un interés apasionado por el movimiento planetario y otros asuntos científicos, y los tres eran miembros, precisamente por ello, de la Royal Society de Londres.

... Los tres contertulios daban vueltas al problema del movimiento planetario: ¿cómo y por qué se desplazan los planetas en el cielo?... Para responderla, Hooke había postulado la existencia de una fuerza de atracción del Sol sobre los planetas inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. A la misma conclusión había llegado Wren unos años antes, y también Halley más recientemente. De ese planteamiento surgía una pregunta: ¿qué tipo de órbita seguirá un planeta sobre el que actúe una fuerza atractiva central de ese tipo?...

De los tres, fue Halley quien tuvo la idea más brillante para dar con la solución del problema: acudirían al consejo de un científico de Cambridge, catedrático lucasiano del Trinity College y autor de una controvertida propuesta sobre la naturaleza de la luz y los colores. Un individuo retraído, con fama de picajoso, y con quien el propio Hooke había tenido sus más y sus menos; pero, por encima de todo, un excelente matemático: Isaac Newton”. (Guardaño, A.)

Así, en “agosto de 1684. Una carroza transporta de Londres a Cambridge a un astrónomo que acaba de perder la posibilidad de adjudicarse un premio. Nuestro viajero se llama Edmond Halley; todavía no ha cumplido los treinta años... El matemático y arquitecto Christopher Wren había prometido premiar con un libro valorado en 40 chelines a quien, entre Halley y Robert Hooke, el más brillante experimentador de la Regia Sociedad, respondiera cierta (la) pregunta... .

(Newton) Enseguida le comunicó a su huésped que la cuestión no le era extraña: se la había planteado algunos años atrás; la respuesta era que una fuerza en la dirección del sol e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del sol era lo único necesario para explicar todo el Sistema del Mundo... .

En noviembre de 1684 Newton confió a Edward Paget... la tarea de entregar a Halley un breve manuscrito.” (Guicciardini, Niccoló)

La solución del problema, la cual se puede leer en Los Principia, es de carácter geométrico y haciendo uso, de las llamadas por él como *cantidades evanescentes*, vale decir con lo que hoy se conoce como paso al límite.

Aquí se presenta la solución analítica a la pregunta *¿qué tipo de órbita seguirá un planeta sobre el que actúe una fuerza atractiva central de ese tipo?*

Recordemos que en las coordenadas polares (ρ, φ) , la aceleración de una partícula se expresa como:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \hat{\varphi} \quad (\text{D.1})$$

Donde el primer término es la aceleración radial y el segundo término es la aceleración tangencial. (Ver *Sistemas coordenados curvilíneos ortogonales (Notas de clase)* de este mismo autor).

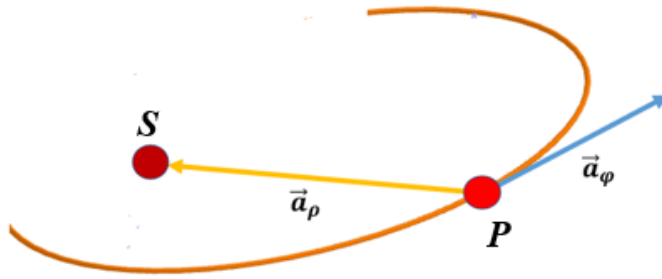


Figura D.1: Componentes radial y angular de la fuerza central que el sol ejerce sobre un planeta

Si la fuerza que actúa sobre el planeta se encuentra dirigida hacia el sol, entonces la componente tangencial de la fuerza es cero y, por tanto:

$$m (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = 0 \quad (\text{D.2})$$

El momento angular del planeta es:

$$\vec{L} = \vec{\rho} \times m\vec{v} \quad (\text{D.3})$$

$$L = \rho m v \sin \alpha \quad (\text{D.4})$$

Siendo α el ángulo entre el radio y la velocidad. Si aproximamos la órbita a una circunferencia, entonces:

$$L = \rho m v \quad (\text{D.5})$$

$$L = \rho m \rho \dot{\theta} \quad (\text{D.6})$$

O

$$L = \rho^2 \dot{\theta} \quad (\text{D.7})$$

Si se deriva con respecto a t se obtiene la componente tangencial de la fuerza que actúa sobre el planeta, y, por tanto, se puede reescribir la componente tangencial de la fuerza como:

$$\rho^2 \dot{\theta} = h \quad (\text{D.8})$$

De aquí se obtiene:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{D.9})$$

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} \quad (\text{D.10})$$

$$\dot{\rho} = \frac{h}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \quad (\text{D.11})$$

Lo que puede reescribirse como:

$$\dot{\rho} = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (\text{D.12})$$

De otra parte:

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{D.13})$$

$$\ddot{\rho} = \frac{h}{\rho^2} \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} \quad (\text{D.14})$$

Sustituyendo $\dot{\rho}$, se tiene:

$$\ddot{\rho} = \frac{h}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left(-h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \quad (\text{D.15})$$

$$\ddot{\rho} = -\frac{h^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (\text{D.16})$$

Al sustituir $\ddot{\rho}$ y $\dot{\theta}$ en la ecuación de la componente radial de la fuerza se tiene:

$$m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = -F \quad (\text{D.17})$$

$$m \left(-\frac{h^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \rho \left(\frac{h^2}{\rho^4} \right) \right) = -F \quad (\text{D.18})$$

$$mh^2 \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) = F \quad (\text{D.19})$$

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) = \frac{F}{mh^2 \frac{1}{\rho^2}} \quad (\text{D.20})$$

Haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{1}{\rho} \quad (\text{D.21})$$

Entonces:

$$\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = \frac{F}{mh^2 u^2} \quad (\text{D.22})$$

La cual es la ecuación que gobierna a todos los planetas, satélites y asteroide que orbitan alrededor del sol o de algún planeta.

Como la fuerza de atracción gravitacional Newton la había establecido en el tercer libro de sus principia, *Sobre el sistema del mundo*, como:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (\text{D.23})$$

O

$$F = GMmu^2 \quad (\text{D.24})$$

Sustituyendo F , se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (\text{D.25})$$

Que es una ecuación diferencial con coeficientes constantes no homogénea, cuya solución es la solución de la ecuación homogénea mas la solución particular igual al término constante.

La ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0 \quad (\text{D.26})$$

Tiene como solución:

$$u = Ce^{r\theta} \quad (\text{D.27})$$

Donde γ se obtiene de su ecuación característica

$$\gamma^2 + 1 = 0 \quad (\text{D.28})$$

Es decir:

$$\gamma = \pm \hat{i} \quad (\text{D.29})$$

Y, por tanto:

$$u = C e^{\pm \hat{i} \theta} \quad (\text{D.30})$$

Utilizando las relaciones de *Euler*:

$$e^{\pm \hat{i} \rho} = \cos \theta \pm \hat{i} \sin \theta \quad (\text{D.31})$$

Se tiene que:

$$u = A \cos \theta \quad (\text{D.32})$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$u = A \cos \theta + \frac{GM}{h^2} \quad (\text{D.33})$$

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + \frac{GM}{h^2} \quad (\text{D.34})$$

Si llamamos

$$\epsilon = \frac{A}{\frac{GM}{h^2}} \quad (\text{D.35})$$

Entonces:

$$\frac{1}{r} = \epsilon \frac{GM}{h^2} \cos \theta + \frac{GM}{h^2} \quad (\text{D.36})$$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} (\epsilon \cos \theta + 1) \quad (\text{D.37})$$

ϵ se llama la excentricidad de la cónica y, por tanto:

Si $\epsilon > 1$ la ecuación corresponde a una *hipérbola*, si $\epsilon = 1$ la ecuación corresponde a una *parábola* y si $0 < \epsilon < 1$ la ecuación representa una *elipse*. Estas son las tres posibles trayectorias para los planetas, satélites o asteroide que orbitan alrededor del sol o de un planeta bajo la influencia de una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del sol (planeta) al planeta, asteroide o satélite.

Y, ¿los cuarenta chelines? Según *Guicciardini, Niccoló* nunca se supo si Newton recibió el premio de los cuarenta chelines, “Y, sin embargo, pienso que el *incomparable Sir Isaac Newton* se mereció los cuarenta chelines. Para justificar el premio basta con darle la vuelta a las críticas de los detractores de Newton: si un vaso está medio vacío, ¡es porque está medio lleno! Aun admitiendo que en algunos casos hay saltos lógicos y discrepancias entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales, no puede olvidarse que muchas demostraciones funcionan perfectamente y que algunas predicciones se confirmaron con una precisión impresionante para los patrones de la época. Además, ¿disponían acaso los detractores contemporáneos de Newton de alguna teoría alternativa con el mismo grado de matematización, unificación y confirmación experimental? Pero mejor que recurrir a estos argumentos, preferimos entregar los cuarenta chelines a Newton por cuatro razones. La respuesta de Newton a Halley se caracteriza por:

1. Profundidad intelectual
2. Valentía
3. Elegancia
4. Una superación de la pregunta misma (*Guicciardini, Niccoló*)

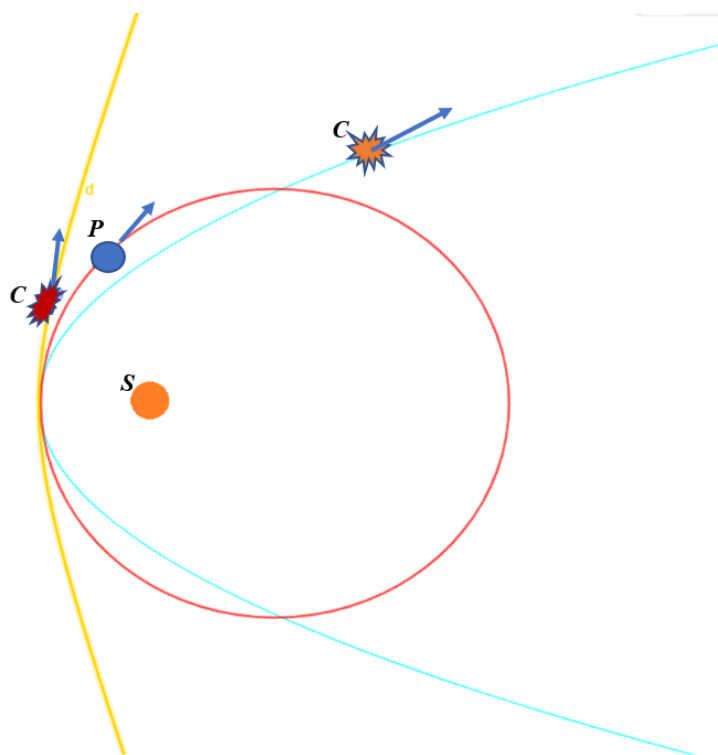


Figura D.2: Las tres orbitas posibles para un objeto sometido a la acción de una fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la adistancia

Apéndice E

MATRICES REALES CUADRADAS

E.1. Definición:

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos de algún conjunto, el cual para los propósitos de estas notas de clase es el conjunto de los números reales R .

Dicho arreglo rectangular permite ordenar los elementos de la matriz en filas y columnas dentro de un paréntesis común, de tal forma que, los elementos de una matriz A se representan como:

$$a_{ik} \tag{E.1}$$

Indicando con ello que se trata del elemento que se encuentra en la fila i columna k . Además, el número de filas y el número de columnas $m \times n$, indica el orden de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad (\text{E.2})$$

Aquellas matrices que tienen igual número de filas que de columnas se llaman matrices cuadradas. Por ejemplo, la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad (\text{E.3})$$

Es una matriz cuadrada de orden 3×3 , donde el elemento 4 es el elemento de la fila 3 columna 1.

E.2. Principales clases de matrices cuadradas

Matriz transpuesta: Si las columnas de una matriz corresponden a las filas de otra matriz A , se dice que dicha matriz es la matriz transpuesta de la matriz A , y se denota como A^T . Es decir que, si los elementos de la matriz A son a_{ik} los elementos de A^T son a_{ki} .

Matriz conjugada: La matriz conjugada, A^* , de una matriz A es aquella cuyos elementos son el complejo conjugado de los elementos de A . Es decir que, si los elementos de la matriz A son a_{ik} los elementos de A^* son a_{ik}^* . Nótese que para una matriz real su conjugada es ella misma.

Matriz adjunta: La matriz adjunta, A^+ , de una matriz A es la matriz $(A^*)^T$.

Matriz unidad: Es aquella matriz donde los únicos elementos diferentes de cero son los elementos de la diagonal principal y valen uno. Se denota como I .

Matriz diagonal: Es aquella matriz donde los únicos elementos diferentes de cero son los elementos de la diagonal principal y tienen cualquier valor.

Matriz singular: Es la matriz cuyo determinante es cero.

Matriz Hermítica o autoadjunta. Una matriz es hermítica si es igual a su adjunta.

Matriz simétrica: Una matriz es simétrica si es igual a su transpuesta.

Matriz antisimétrica Si $-A = A^T$ se dice que la matriz A es antisimétrica.

Matriz unitaria: Si $AA^T = A^T A = I$ se dice que la matriz A es una matriz unitaria.

Matriz ortogonal: Si $A^T A = I$ se dice que la matriz A es ortogonal.

Matriz inversa: La matriz inversa de la matriz A , denotada como A^{-1} , es tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (\text{E.4})$$

La matriz inversa de la matriz A se encuentra mediante:

$$A^{-1} = \frac{(A^C)^T}{|A|} \quad (\text{E.5})$$

Donde A^C se llama la matriz de cofactores.

Matriz de cofactores: Se llama cofactor al término

$$(-1)^{i+k} |A_{ik}| \quad (\text{E.6})$$

Donde A_{ik} es la submatriz que resulta al eliminar la fila i y la columna k en la matriz A , y $|A_{ik}|$ su determinante.

Así que, para una matriz 3×3 :

$$A^C = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & |A_{13}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & -|A_{23}| \\ |A_{31}| & -|A_{32}| & |A_{33}| \end{pmatrix} \quad (\text{E.7})$$

E.3. Operaciones con matrices.

Suma de matrices: Si A y B son dos matrices de la misma dimensión, entonces $A \pm B = C$ es tal que:

$$c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik} \quad (\text{E.8})$$

Producto de matrices: Si A es una matriz de dimensión, $m \times n$, y B una matriz de dimensión $n \times p$ entonces, $AB = C$ donde C es una matriz de dimensión, $m \times p$, y el elemento de la posición fila i y columna j es el resultado del producto de la fila i de A y la columna j de B .

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (\text{E.9})$$

Nota: En general el producto de matrices no es conmutativo.

$$AB \neq BA \quad (\text{E.10})$$

Producto de una matriz por un escalar: Si n es un escalar y A una matriz entonces, al multiplicar la matriz por el escalar todos los elementos de la matriz quedan multiplicados por el escalar. Es decir que, si $nA = C$ entonces se tiene que $c_{ik} = na_{ik}$.

Derivada de una matriz: Si A es una matriz cuyos elementos son funciones de alguna variable x entonces:

$$\frac{dA}{dx} = B \quad (\text{E.11})$$

Donde

$$b_{ik} = \frac{da_{ik}}{dx} \quad (\text{E.12})$$

Integral de una matriz: Si A es una matriz cuyos elementos son funciones de alguna variable x entonces:

$$\int A dx = B + Q \quad (\text{E.13})$$

Donde

$$b_{ik} = \int a_{ik} dx \quad (\text{E.14})$$

Y Q es una matriz constante, es decir que sus elementos no dependen de la variable x .

E.4. Determinante de una matriz cuadrada.

A toda matriz cuadrada se le puede asociar un número, llamado determinante de la matriz, el cual contiene los mismos elementos que la matriz, pero encerrados entre barras.

Si A es una matriz cuyos elementos son a_{ik} , entonces el determinante de A es:

$$|A| = |a_{ik}| \quad (\text{E.15})$$

Nota: Es bueno tener en cuenta que un determinante se resuelve, mientras que una matriz se transforma.

Propiedades de los determinantes:

1. El determinante de una matriz A y el de su traspuesta A^T son iguales.
2. El determinante de una matriz es cero si:

a) Posee dos filas (o columnas) iguales o,

- b)* todos los elementos de una fila (o una columna) son nulos o,
 - c)* los elementos de una fila (o una columna) son combinación lineal de las otras.
- 3. Si en un determinante se cambian entre sí dos filas (o dos columnas), su valor sólo cambia de signo.
- 4. Si a los elementos de una fila (o una columna) se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.
- 5. Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila (o cualquier columna), pero sólo una.
- 6. El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

Apéndice F

EL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

A la determinación de los valores propios (eigenvalores) y los vectores propios (eigenvectores) de un sistema se le llama *problema de valores propios*.

Sea la ecuación vectorial

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\text{F.1})$$

Donde A es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ y λ un número. A los valores de λ se les llama los valores propios de la matriz A y a los vectores $\vec{x}$ correspondientes a un determinado de λ se les llama los vectores propios de A .

Obviamente la solución trivial, $\vec{x} = \vec{0}$, es válida para todos los valores de λ y, por ello, los vectores propios son aquellos vectores diferentes de cero.

La ecuación de Schrödinger para sistemas cuánticos estacionarios es un ejemplo de una ecuación de valores propios:

$$\hat{H}\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (\text{F.2})$$

Donde $\hat{H}$ es el operador hermítico u operador de energía y E los valores de

la energía del sistema cuántico $\varphi(\vec{r})$.

En términos matriciales la ecuación de valores propios se puede escribir como:

$$AX = \lambda IX \quad (\text{F.3})$$

$$(A - \lambda I) X = 0 \quad (\text{F.4})$$

Donde I es la matriz unidad y X un vector columna.

La condición para que dicha ecuación tenga solución diferente a la solución trivial es:

$$|(A - \lambda I)| = 0 \quad (\text{F.5})$$

Ejemplo: Encontrar los valores y vectores propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

$$|(A - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{F.7})$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{F.8})$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{F.9})$$

$$(1-\lambda) [(2-\lambda)(-1-\lambda) + 1] + (3(-1-\lambda) + 2) + 4(3 - 2(2-\lambda)) = 0 \quad (\text{F.10})$$

$$(1 - \lambda) (-2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1) + (-1 - 3\lambda) + 4(-1 + 2\lambda) = 0 \quad (\text{F.11})$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad (\text{F.12})$$

Los factores del término independiente son **1, 2, 3** y por tanto podemos ensayar con cada uno de ellos formar un polinomio de primer grado que sea factor del polinomio.

$$\frac{\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6}{\lambda - 1} = \lambda^2 - \lambda - 6 \quad (\text{F.13})$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1) (\lambda^2 - \lambda - 6) \quad (\text{F.14})$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1) (\lambda + 2) (\lambda - 3) \quad (\text{F.15})$$

Por tanto:

$$(\lambda - 1) (\lambda + 2) (\lambda - 3) = 0 \quad (\text{F.16})$$

Es decir:

$$\lambda = 1 \quad \lambda = -2 \quad \lambda = 3 \quad (\text{F.17})$$

Son los valores propios de la matriz **A**.

Para calcular los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$, regresamos a la ecuación de valores propios y reemplazamos λ :

$$A - \lambda I \quad (\text{F.18})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.19})$$

Utilizando el método de Gauss-Jordan, tenemos:

1. La fila 2 la reemplazamos por la resta de la fila 2 y la fila 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.20})$$

2. Intercambiamos la fila 1 con la fila 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.21})$$

3. Cambiamos la fila 3 por la resta de la fila 3 con la fila 1 multiplicada por 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{F.22})$$

4. Multiplicamos la fila 2 por menos uno.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{F.23})$$

5. Cambiamos la fila 3 por la resta de la fila 3 con la fila 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.24})$$

Ello significa que:

$$x + z = 0 \quad (\text{F.25})$$

$$y - 4z = 0 \quad (\text{F.26})$$

Este es un sistema que tiene infinitas soluciones, pues cada solución depende del valor que se le asigne a z .

Por tanto, los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$, son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{F.27})$$

Similar procedimiento se realiza para los otros dos valores propios.

Ejemplo: Hallar las frecuencias de los modos normales de vibración del sistema de masas de la figura.

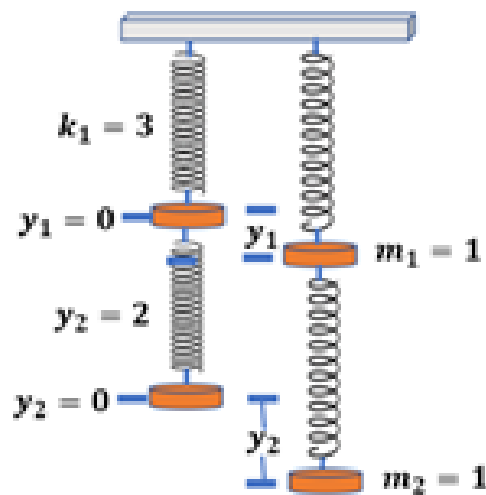


Figura F.1: Sistema oscilatorio correspondiente a dos resortes en serie.

La ecuación que rige para un sistema masa-resorte es:

$$my + ky'' = 0 \quad (\text{F.28})$$

O

$$my'' = -ky \quad (\text{F.29})$$

Donde $w = \frac{k}{m}$ es la frecuencia de oscilación del sistema, y cuya solución es de la forma:

$$y = Xe^{wt} \quad (\text{F.30})$$

Entonces para el sistema de la figura se puede establecer:

$$m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) \quad (\text{F.31})$$

$$m_2 y_2'' = -k_2 (y_2 - y_1) \quad (\text{F.32})$$

Donde $y_2 - y_1$ es el cambio neto en la longitud del resorte 2.

Suponiendo $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$, entonces el sistema de ecuaciones para el sistema es:

$$y_1'' = -5y_1 + 2y_2 \quad (\text{F.33})$$

$$y_2'' = 2y_1 - 2y_2 \quad (\text{F.34})$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.35})$$

Suponiendo una solución de la forma:

$$y = X e^{wt} \quad (\text{F.36})$$

$$y'' = w^2 X e^{wt} = A X e^{wt} \quad (\text{F.37})$$

Si $\lambda = w^2$ y dividiendo por e^{wt} , entonces:

$$\lambda X = A X \quad (\text{F.38})$$

$$(A - \lambda I) X = 0 \quad (\text{F.39})$$

Como $|A - \lambda I| = 0$, entonces:

$$\begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{F.40})$$

$$(-5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = 0 \quad (\text{F.41})$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \quad (\text{F.42})$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 6) = 0 \quad (\text{F.43})$$

Cuyas soluciones (valores propios) son:

$$\lambda = -1 \quad \lambda = -6 \quad (\text{F.44})$$

Y cuyos vectores propios para $\lambda = -1$ son:

$$A - \lambda I = 0 \quad (\text{F.45})$$

$$\begin{pmatrix} -5 - (-1) & 2 \\ 2 & -2 - (-1) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{F.46})$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{F.47})$$

Que corresponde al sistema de ecuaciones:

$$-4x + 2y = 0 \quad (\text{F.48})$$

$$2x - y = 0 \quad (\text{F.49})$$

El cual es un sistema que tiene infinitas soluciones de la forma:

$$y = 2x \quad (\text{F.50})$$

Es decir que los vectores propios correspondientes a $\lambda = -1$ son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \quad (\text{F.51})$$

Si $x = 1$ entonces, un vector propio es:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.52})$$

Similarmente, para $\lambda = -6$ un vector propio es:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.53})$$

Puesto que $w = \sqrt{\lambda}$ entonces la solución del sistema será:

$$y = X_1 (c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}) + X_2 (c_3 e^{i\sqrt{6}t} + c_4 e^{-i\sqrt{6}t}) \quad (\text{F.54})$$

Utilizando las relaciones de Euler:

$$y = a_1 X_1 \cos t + a_2 X_1 \sin t + b_1 X_2 \cos \sqrt{6}t + b_2 X_2 \sin \sqrt{6}t \quad (\text{F.55})$$

O también:

$$y_1 = a_1 \cos t + a_2 \sin t + ab_1 \cos \sqrt{6}t + 2b_2 \sin \sqrt{6}t \quad (\text{F.56})$$

$$y_2 = 2a_1 \cos t + 2a_2 \sin t - b_1 \cos \sqrt{6}t - b_2 \sin \sqrt{6}t \quad (\text{F.57})$$

La gráfica muestra los modos de oscilación de cada uno de los resortes, así como también el modo de oscilación de la combinación de los resortes. Las constantes a_1, a_2, b_1, b_2 se ajustaron a 1.

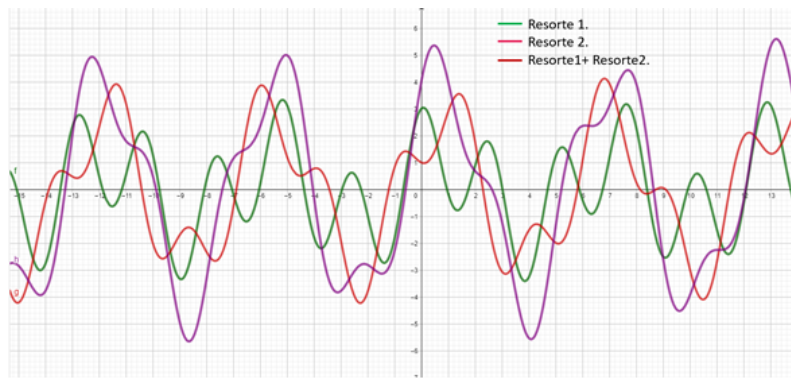


Figura F.2: Modos de oscilación de cada uno de los resortes y de la combinación de ellos.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

- Beer, F. P., Jr., E. R. J., Cornwell, P. J., & Self Brian, P. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: dinámica - 11 edición*. Data Mc Graw Hill.
- Bourne, D. E., & Kendall, P. C. (1976). *Análisis vectorial y tensores cartesianos*. Limusa.
- Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. Dover Pub.
- de La Plata, I. G. (s.f.). *Graficadora de campos vectoriales*. <https://www.geogebra.org/u/i.geogebra.lp>
- Galilei, G., & (h) Beltrán Marí, A. (2011). *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano* (A. B. Marí, Ed.). Alianza editorial.
- Gamow, G., & Vela, F. (2014). *Biografía de la física*. Alianza Editorial.
- García, C. M. (2002). *Elementos de matemáticas aplicadas* (U. N. de Colombia, Ed.). Universidad Nacional de Colombia.
- geogebra. (s.f.). Campos vectoriales en 2D.
- Guicciardini, N. (2007). Newton. *Investigación y Ciencia Temas 50 Prensa científica S. A.*
- Gustaavo, S. M., Rojas, Á. S. G., & Antonio., J. F. J. (2011). *Historia del análisis vectorial*. <https://www.youtube.com/watch?v=4tBg08ZPKBI>
- Hsu, H. P. (1987). *Análisis vectorial* (R. Mehra, Ed.). Addison-Wesley Iberoamericana.
- Kreyszig, E. (2000). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Limusa Wiley.
- Lagos, J. M. M. (2018). *Capítulo 6 Campos Vectoriales*. DOCPLAYER. <https://docplayer.es/79694651-Campos-vectoriales-capitulo-6.html>
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 2 de varias variables. - 9. edición: Cálculo Diferencial*. McGraw-Hill.

- Layzer, D. (1989). *Construccion Del Universo* (B. S. Series, Ed.). Prensa Científica, S.A.
- Leithold, L. (1998). *El cálculo*, EC7. Oxford University Press.
- Math, J. (s.f.). *Campos Vectoriales en 2D*. <https://www.geogebra.org/m/snpf3Pfg>
- Murray, R. S., Seymour, L., & Dennis, S. (2011). *Análisis vectorial*. - 2. ed. (S. (McGraw-Hill), Ed.). McGraw-Hill.
- Newton, S. I. (2011). *Principios matemáticos de la filosofía natural* - 1. ed. (E. R. García, Ed.). Alianza Editorial.
- Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. S., & Stanley, P. (2001). *Physics* (2 Vol. Set). John Wiley; Sons Inc.
- Rey, P. J., & Babini, J. (1985). *Historia de las matemáticas* (G. S. A., Ed.). Gedisa S. A.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2018). *Física para ciencias e ingeniería*. Volumen 1 - 10. edición. Cengage Learning.
- Valero, M. (1986). *Física fundamental 1* (M. Valero, Ed.). Norma.
- Weber, H. J., & Arfken, G. B. (2004). *Essential mathematical methods for physicists*. Academic Press.